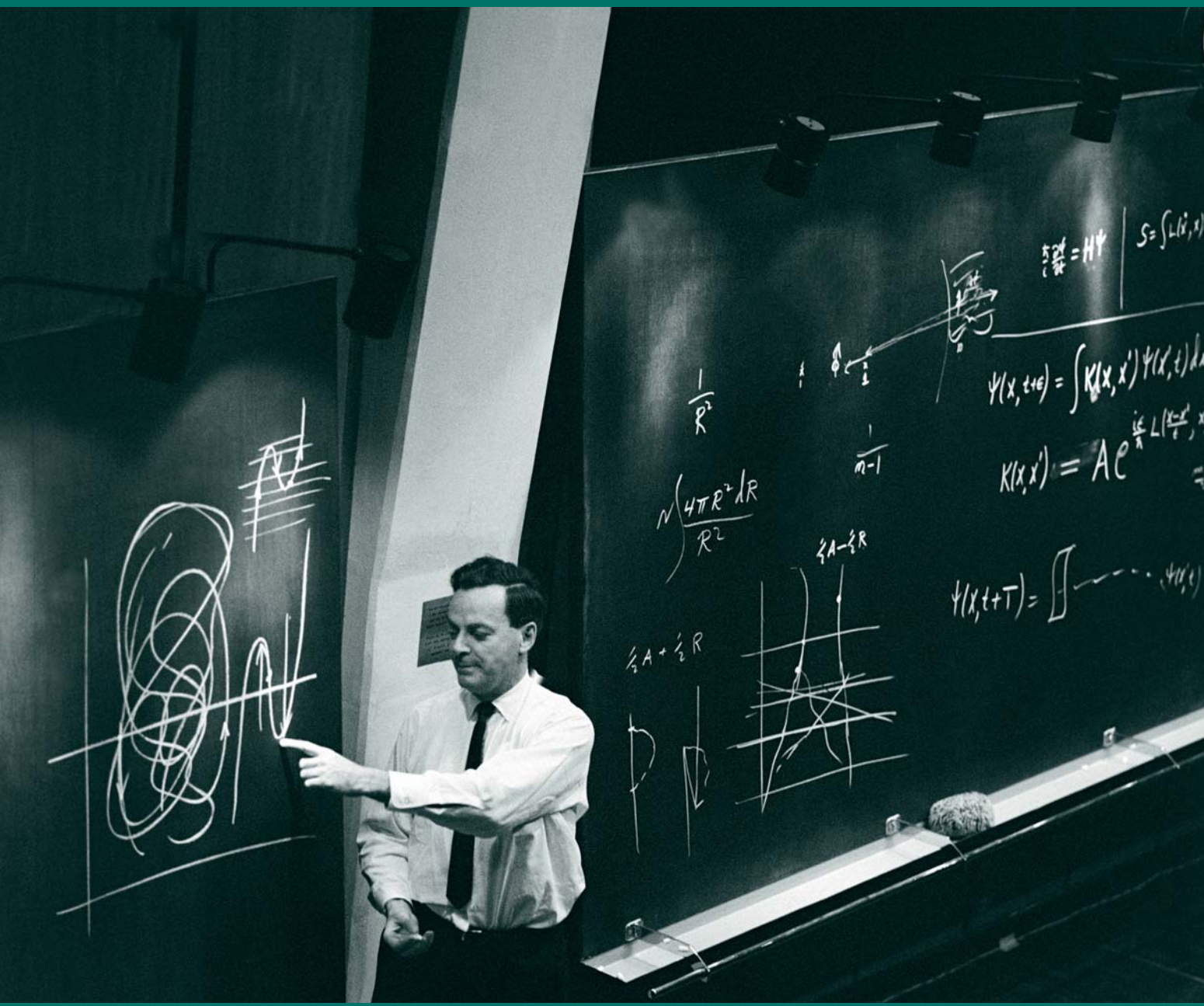
Lecciones de física de Feynman
II. Electromagnetismo y materia

Richard P. Feynman, Robert B. Leighton
y Matthew Sands



EDICIONES
CIENTÍFICAS
UNIVERSITARIAS

TEXTO CIENTÍFICO
UNIVERSITARIO

Richard P. Feynman (Nueva York, 1918-Los Ángeles, 1988) uno de los más reconocidos físicos del mundo, estudió ciencias en el Instituto Tecnológico de Massachusetts (MIT) y se doctoró en la Universidad de Princeton. Enseñó en Cornell y en el Instituto de Tecnología de California (Caltech). En 1965 recibió el Premio Nobel de Física, junto con Sin-Itiro Tomonaga y Julian Schwinger por su trabajo fundamental en electrodinámica cuántica, con profundas consecuencias para la física de las partículas elementales.

Robert B. Leighton (Detroit, 1919-Pasadena, 1997) realizó un trabajo pionero en física de estado sólido, física de rayos cósmicos, los comienzos de la física moderna de partículas, física solar, fotografía planetaria, astronomía infrarroja y astronomía de ondas milimétricas y submilimétricas a lo largo de su vida. Fue ampliamente conocido por su diseño innovador de instrumentos científicos, y muy admirado como profesor.

Matthew Sands (Oxford, Mass., 1919- Santa Cruz, 2014), reconocido físico y profesor, doctor por el MIT. Después de la segunda guerra, Sands ayudó a fundar la Federación de Científicos Atómicos de Los Álamos, que presionó contra el uso de armas nucleares. Participó en la construcción del sincrotrón de Caltech, fue director del Acelerador Lineal de Stanford, entre otros cargos científicos y educativos.

EDICIONES CIENTÍFICAS UNIVERSITARIAS

Serie Texto Científico Universitario

LECCIONES DE FÍSICA DE FEYNMAN, II

RICHARD P. FEYNMAN
ROBERT B. LEIGHTON • MATTHEW SANDS

Lecciones de física de Feynman

II. Electromagnetismo y materia

FONDO DE CULTURA ECONÓMICA

Primera edición en inglés, 1964
Primera edición en español, 1972
Primera edición, FCE, 2020

[Primera edición en libro electrónico, 2021]

Feynman, Richard P., Robert B. Leighton y Matthew Sands
Lecciones de física de Feynman II. Electromagnetismo y materia / Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sands ; trad. de Carlos Alberto Heras, Omar Bernaola, Rafael López Frontado. — México : FCE, 2020
XVII, 7, [598] p. ; ilus. ; 28 × 22 cm — (Colec. Ediciones Científicas Universitarias)
Título original: The Feynman Lectures on Physics, II. Mainly Electromagnetism and Matter
ISBN 978-607-16-5972-9 (Obra completa)
ISBN 978-607-16-6623-9 (Vol. 2)

1. Electromagnetismo 2. Materia 3. Física I. Leighton, Robert B., coaut. II. Sands, Matthew, coaut. III. Heras, Carlos Alberto, tr. IV. Bernaola, Omar, tr. V. López Frontado, Rafael, tr. VI. Ser. VII. t.

LC QC23.F47 Dewey 530 F574l Vol. 2

Diseño de portada: Laura Esponda Aguilar
Fotografía de portada: Conferencia post-Nobel de Richard Feynman en el CERN, 1965.
Crédito: CERN/Science Photo Library

La presente edición se basa en la *New Millennium Edition* publicada por Basic Books e incluye la corrección de erratas hasta su 7ª reimpresión. Ésta es una versión corregida y revisada de la traducción de Carlos Alberto Heras, Omar Bernaola y Rafael López Frontado, que fue publicada originalmente bajo el sello del Fondo Educativo Interamericano, S. A.

Título original: *The Feynman Lectures on Physics, II. Mainly Electromagnetism and Matter*
Copyright © 1964, 2006, 2010 por el California Institute of Technology
Michael A. Gottlieb y Rudolf Pfeiffer

D. R. © 2020, Fondo de Cultura Económica
Carretera Picacho-Ajusco, 227; 14738 Ciudad de México
www.fondodeculturaeconomica.com
Comentarios: editorial@fondodeculturaeconomica.com
Tel.: 55-5227-4672

Se prohíbe la reproducción total o parcial de esta obra, sea cual fuere el medio, sin la anuencia por escrito del titular de los derechos.

ISBN 978-607-16-5972-9 (rústico, obra completa)
ISBN 978-607-16-6623-9 (rústico, vol. 2)
ISBN 978-607-16-6120-3 (electrónico-pdf, obra completa)
ISBN 978-607-16-7046-5 (electrónico-pdf, vol. 2)

Hecho en México • *Made in Mexico*

Sobre Richard Feynman

Nacido en 1918 en la ciudad de Nueva York, Richard P. Feynman recibió su doctorado de la Universidad de Princeton en 1942. A pesar de que era muy joven, tuvo un papel importante en el Proyecto Manhattan en Los Álamos durante la segunda Guerra Mundial. Más tarde, dio clases en la Universidad Cornell y en el Instituto de Tecnología de California. En 1965 recibió el premio Nobel de física, junto con Sin-Itiro Tomonaga y Julian Schwinger, por su trabajo en la electrodinámica cuántica.

El doctor Feynman ganó el premio Nobel por haber resuelto con éxito algunos problemas de la teoría de la electrodinámica cuántica. También creó una teoría matemática que explica el fenómeno de la superfluidez en el helio líquido. Después, con Murray Gell-Mann, realizó un trabajo fundamental en el área de las interacciones débiles como la desintegración beta. En años posteriores, Feynman desempeñó un papel clave en el desarrollo de la teoría de los quarks al presentar su modelo de partones de procesos de colisión de protones de alta energía.

Más allá de estos logros, el doctor Feynman introdujo nuevas técnicas básicas de computación y notación en la física: se destacan los omnipresentes diagramas de Feynman que, quizá más que ningún otro formalismo en la historia científica cercana, han cambiado la manera en la que los procesos físicos básicos son conceptualizados y calculados.

Feynman fue un maestro sobresaliente en su labor. De todos sus numerosos galardones, estaba orgulloso en particular de la Medalla Oersted para la enseñanza, a la cual se hizo acreedor en 1972. Un reseñista de *Scientific American* describió las *Lecciones de física de Feynman*, publicadas originalmente en 1963, como "arduas, pero sustanciosas y llenas de sabor. Después de 25 años son *la* guía para maestros y para los mejores alumnos que comienzan". Con el fin de mejorar la comprensión de la física entre los no especialistas, el doctor Feynman escribió: *El carácter de la ley física* y *Electrodinámica cuántica. La extraña teoría de la luz y la materia.* También fue autor de varias publicaciones avanzadas que se han vuelto referencias y manuales clásicos para investigadores y estudiantes.

Richard Feynman fue un hombre público productivo. Su trabajo en la comisión Challenger es perfectamente conocido, sobre todo su famosa demostración de la susceptibilidad de las juntas tóricas al frío, un experimento elegante que requería de nada más que un vaso de agua helada y una abrazadera. Fueron menos célebres los esfuerzos del doctor Feynman en los años sesenta en el comité curricular de la Universidad Estatal de California, donde protestó por la mediocridad de los libros de texto.

Una recitación de los incontables logros científicos y educativos de Richard Feynman no puede capturar adecuadamente la esencia de este hombre. Como lo sabe cualquier lector de sus publicaciones, incluso las más técnicas, la personalidad dinámica y multifacética de Feynman resplandece a lo largo de toda su obra. Además de físico, en muchas ocasiones fue reparador de radios, forzador de cerraduras, artista, bailarín, intérprete de bongó y descifrador de jeroglíficos mayas. Con una curiosidad perpetua por su mundo, fue un empirista ejemplar.

Richard Feynman murió el 15 de febrero de 1988 en Los Ángeles.

Prefacio a la Edición del nuevo milenio

Han pasado casi 50 años desde que Richard Feynman impartió el curso introductorio de física en el Instituto de Tecnología de California (Caltech) que dio origen a estos tres volúmenes, las *Lecciones de física de Feynman*. En esos 50 años, nuestra comprensión del mundo físico ha cambiado en gran medida, pero esta obra ha perdurado. Las lecciones de Feynman son tan poderosas hoy en día como lo eran recién publicadas, gracias a lo singular de sus observaciones sobre la física y su método de enseñanza. Físicos principiantes y experimentados las han estudiado por igual en todo el mundo; han sido traducidas al menos a una docena de lenguas, con más de 1.5 millones de ejemplares impresos sólo en inglés. Quizá ninguna otra serie de libros de física haya tenido un impacto tan amplio y duradero.

Esta *Edición del nuevo milenio* abre paso a una nueva era para las *Lecciones de física de Feynman*: la era de la edición digital en el siglo XXI. Las *Lecciones* se han vuelto *Lecciones-e* cuyo texto y ecuaciones se expresan en el lenguaje de composición tipográfica LaTeX y cuyas figuras fueron hechas de nuevo en su totalidad con software de dibujo moderno.

Las consecuencias para la edición *impresa* de esta edición *no* sorprenden; se ve casi igual a los libros rojos originales que los estudiantes de física han conocido y disfrutado por décadas. Las diferencias principales están en un índice alfabético ampliado y mejorado, en la corrección de 885 erratas que los lectores encontraron a lo largo de cinco años desde la primera impresión de la edición anterior, y en la facilidad de corregir erratas que los futuros lectores lleguen a encontrar. Regresaré a esto líneas adelante.

La *eBook Version* de esta edición y la *Enhanced Electronic Version* son innovaciones electrónicas. En contraste con la mayoría de las versiones electrónicas de libros técnicos del siglo XX, cuyas ecuaciones, figuras y en ocasiones incluso texto pierden calidad en cuanto uno trata de ampliarlos, el manuscrito en LaTeX de la *Edición del nuevo milenio* hace posible la creación de libros electrónicos de la más alta calidad, en los que todas las características de la página (excepto las fotografías) pueden ampliarse sin límites y conservar sus formas y definición precisas. Y la *Enhanced Electronic Version*, que cuenta con audio y fotografías de pizarrones de las lecciones originales de Feynman, además de hipervínculos a otros recursos, es una innovación que le habría dado mucha satisfacción a Feynman.

Recuerdos de las lecciones de Feynman

Estos tres volúmenes son un tratado pedagógico autosuficiente. También son un registro histórico de las lecciones universitarias de física de Feynman entre 1961 y 1964, una materia obligatoria para todos los estudiantes de primer y segundo años en Caltech, sin importar la especialidad a la que aspirarán.

Los lectores se preguntarán, como lo hice yo, cuál fue el impacto que las lecciones de Feynman tuvieron en los estudiantes que las presenciaron. En su Prefacio a estos volúmenes, Feynman ofreció un punto de vista algo negativo al respecto: "No creo que me haya ido muy bien con los estudiantes", escribió. Matthew Sands, en su breve texto autobiográfico en *Feynman's Tips on Physics*, expresó un punto de vista mucho más optimista. Por pura curiosidad, en la primavera de 2005 envié correos electrónicos o hablé con una muestra *cuasi* aleatoria de 17 alumnos (de unos 150) de la clase de Feynman entre 1961 y

1963 —entre ellos algunos a los que se les dificultó mucho la clase y otros que no tuvieron ningún problema para dominarla, biólogos, químicos, ingenieros, geólogos, matemáticos y astrónomos, al igual que físicos—.

Puede que los años intermedios hayan esmaltado sus recuerdos de un matiz eufórico, pero cerca de 80 % de ellos recuerdan las lecciones de Feynman como uno de los puntos más memorables de sus años de universidad. "Era como ir a la iglesia." Las lecciones eran "una experiencia transformativa", "una experiencia de vida, probablemente lo más importante que obtuve de Caltech". "Yo estudiaba biología, pero las lecciones de Feynman se destacan como uno de los puntos más altos en mi experiencia universitaria... aunque debo admitir que en esa época no podía hacer la tarea y casi no entregué ninguna." "Yo me encontraba entre los estudiantes menos prometedores de su clase, y nunca me perdí una sola sesión... recuerdo y todavía puedo sentir el entusiasmo de Feynman por el descubrimiento... Sus lecciones tenían un... impacto emocional que quizá se perdió en las *Lecciones* impresas."

En contraste, varios de los estudiantes tienen recuerdos negativos debido en gran medida a dos cuestiones: (i) "No podías aprender a trabajar con los problemas de tarea al asistir a las lecciones. Feynman era demasiado ingenioso: conocía trucos y sabía qué aproximaciones podían hacerse, tenía una intuición basada en la experiencia y en una genialidad que un estudiante que apenas comienza no posee". Feynman y sus colegas, conscientes de esta falla en el curso, la resarcieron en parte con materiales que se han incorporado a *Feynman's Tips on Physics*: tres lecciones hechas por el propio Feynman sobre resolución de problemas, y un conjunto de ejercicios y respuestas preparado por Robert B. Leighton y Rochus Vogt. (ii) "La inseguridad de no saber lo que podría discutirse en la siguiente lección, la falta de un libro de texto o referencia que tuviera cualquier relación con el material de lectura y la consecuente inhabilidad que teníamos para adelantar lecturas eran muy frustrantes... Las lecciones me parecían emocionantes y comprensibles en el aula, pero afuera eran sánscrito (cuando trataba de reconstruir los detalles)." Desde luego, este problema se resolvió en estos tres volúmenes, la versión impresa de las *Lecciones de física de Feynman*. Éstas se volvieron el libro de texto que los estudiantes de Caltech han usado para estudiar durante muchos años después, y sobreviven hoy en día como uno de los mayores legados de Feynman.

Una historia de erratas

Feynman y sus coautores, Robert B. Leighton y Matthew Sands, produjeron las *Lecciones de física de Feynman* con gran rapidez, trabajando a partir de grabaciones y fotografías de pizarrones de las lecciones de Feynman* (ambas se incorporaron en la *Enhanced Electronic Version* de esta *Edición del nuevo milenio*). Debido al ritmo tan acelerado al que trabajaron Feynman, Leighton y Sands, era inevitable que muchos errores se colaran en la primera edición. Feynman acumuló largas listas de erratas alegadas en los años subsecuentes, erratas que hallaron los estudiantes y profesores de Caltech así como lectores alrededor del mundo. En los años sesenta e inicios de los setenta, Feynman hizo un espacio en su ajetreada vida para verificar la mayor parte de las erratas, aunque no todas, de los volúmenes I y II e insertar las correcciones en las reimpresiones siguientes. Pero el sentido del deber de Feynman nunca logró sobreponerse a su entusiasmo por nuevos descubrimientos para lograr que atendiera las erratas en el volumen III.† Después de su muerte prematura en 1988, las listas de erratas de los tres volúmenes se guardaron en el Archivo de Caltech y quedaron ahí olvidadas.

* Para descripciones de la génesis de las lecciones de Feynman y de estos volúmenes, véanse el prefacio y las introducciones a cada uno de los tres volúmenes, e incluso véase el texto autobiográfico de Matt Sands en *Feynman's Tips on Physics*, y el prefacio especial a la *Edición conmemorativa* de las *Lecciones de Feynman*, escrito en 1989 por David Goodstein y Gerry Neugebauer, que también aparece en la *Edición definitiva* de 2005.

† En 1975 comenzó a buscar las erratas del volumen III, pero se distrajo con otras cosas y nunca terminó la tarea, de modo que no se hicieron correcciones.

En 2002, Ralph Leighton (hijo del fallecido Robert Leighton y compañero de Feynman) me informó de las viejas erratas y de una nueva y larga lista que había compilado su amigo Michael Gottlieb. Leighton propuso que Caltech realizara una nueva edición de las *Lecciones de Feynman* con todas las erratas corregidas, y que la publicara junto con un nuevo volumen de material complementario, *Feynman's Tips on Physics*, que él y Gottlieb estaban preparando.

Feynman era mi héroe y fue mi amigo cercano. Cuando vi las listas de erratas y el contenido del nuevo volumen propuesto, accedí pronto a supervisar el proyecto en representación de Caltech (que durante mucho tiempo fue el hogar académico de Feynman, al cual él, Leighton y Sands habían encomendado todos los derechos y responsabilidades de las *Lecciones de Feynman*). Después de un año y medio de trabajo meticuloso por parte de Gottlieb, y del atento examen del doctor Michael Hartl (un investigador posdoctoral notable de Caltech que evaluó todas las erratas además del nuevo volumen), la *Definitive Edition of the Feynman Lectures on Physics* vio la luz en 2005; tenía alrededor de 200 erratas corregidas y estaba acompañada por *Feynman's Tips on Physics*, de Feynman, Gottlieb y Leighton.

Yo *pensé* que esa edición iba a ser la "definitiva". Lo que no anticipé fue la respuesta entusiasta de los lectores alrededor del mundo ante el llamado de Gottlieb para identificar más erratas y enviarlas por medio del sitio web que él creó y aún mantiene, *The Feynman Lectures Website*, `www.feynmanlectures.info`. En los cinco años a partir de entonces, se han enviado 965 erratas nuevas que sobrevivieron el meticuloso escrutinio de Gottlieb, Hartl y Nate Bode (un estudiante de posgrado notable de Caltech, quien sucedió a Hartl como el examinador de erratas por parte de esta institución). De estas 965 erratas evaluadas, 80 se corrigieron en la cuarta reimpresión de la *Definitive Edition* (agosto de 2006) y las otras 885 se corrigieron en esta primera impresión de la *Edición del nuevo milenio* (332 en el volumen I, 263 en el volumen II y 200 en el volumen III). Para los detalles de las erratas, véase `www.feynmanlectures.info`.

Está claro que liberar de errores las *Lecciones de física de Feynman* se ha vuelto una empresa comunitaria a nivel mundial. En nombre de Caltech agradezco a los 50 lectores que han contribuido desde 2005 y a los muchos más que lleguen a contribuir en los años por venir. Los nombres de todos los que contribuyeron se encuentran en `www.feynmanlectures.info/flp_errata.html`.

Casi todas las erratas han sido de tres tipos: (i) errores tipográficos en prosa; (ii) errores tipográficos y matemáticos en ecuaciones, tablas y figuras —errores en signos, números incorrectos (por ejemplo, un 5 que debería ser un 4), así como subíndices, signos de suma, paréntesis y términos faltantes en ecuaciones—; (iii) referencias cruzadas incorrectas a otros capítulos, tablas y figuras. Esta clase de errores, a pesar de que no son gravísimos para un físico experimentado, pueden ser frustrantes y confusos para la audiencia primaria de Feynman: los estudiantes.

Cabe resaltar que entre las 1 165 erratas que se corrigieron bajo mi auspicio son pocas las que considero como verdaderos errores en física. Un ejemplo está en el volumen II, página 5-10 que ahora dice "[...] si una cavidad está completamente encerrada por un conductor a tierra, ninguna distribución estática de cargas en el *interior* puede producir campos [eléctricos] en el *exterior*" (la precisión "a tierra" fue omitida en ediciones previas). Este error le fue señalado a Feynman por varios lectores, entre los que estaba Beulah Elizabeth Cox, estudiante en el College of William and Mary, quien confió en el pasaje erróneo de Feynman para un examen. En 1975 Feynman le escribió lo siguiente a la señorita Cox:* "Tu profesor tuvo razón en no darte puntos, pues tu respuesta es incorrecta, como lo demostró él usando la ley de Gauss. En la ciencia, se deben usar argumentos lógicos y elaborados con cuidado, no sólo creer en las autoridades. También leíste el libro correctamente y lo entendiste. Cometí un error, y el libro está mal. Tal vez estaba pensando en una esfera conductora a tierra, o bien en el hecho de que

* Páginas 288-289 de *Perfectly Reasonable Deviations from the Beaten Track, The Letters of Richard P. Feynman*, editado por Michelle Feynman (Basic Books, Nueva York, 2005).

mover las cargas en lugares distintos del interior no afecta las cosas en el exterior. No estoy seguro, pero metí la pata. Y tú también metiste la pata por creerme".

Cómo cobró vida esta Edición del nuevo milenio

Entre noviembre de 2005 y julio de 2006, 340 erratas fueron enviadas al sitio web de las *Lecciones de Feynman* `www.feynmanlectures.info`. Llama la atención que el grueso de éstas viniera de una sola persona: el doctor Rudolf Pfeiffer, que entonces era becario de posdoctorado en la Universidad de Viena, Austria. La editorial, Addison Wesley, arregló 80 erratas, pero se resistió a arreglar más debido al costo: los libros se imprimían mediante un proceso de foto offset y trabajaban con imágenes fotográficas de las páginas de los años sesenta. Corregir un error implicaba volver a formar la página entera, y para asegurar que no se colaran nuevos errores, la página debía volver a formarse por dos personas diferentes, para que luego la leyeran y corrigieran varias personas distintas: se trata de un proceso muy costoso cuando hay cientos de erratas en juego.

Gottlieb, Pfeiffer y Ralph Leighton estaban muy disgustados con esto, por lo que formularon un plan para facilitar el arreglo de todas las erratas, y también producir la versión electrónica y la aumentada de las *Lecciones de física de Feynman*. Me propusieron su plan a mí, como representante de Caltech, en 2007. Me emocioné, pero procedí con cautela. Después de ver más detalles, entre ellos un capítulo de muestra de la *Enhanced Electronic Version*, recomendé que Caltech cooperara con Gottlieb, Pfeiffer y Leighton para llevar a cabo su plan. El plan recibió la aprobación de tres catedráticos sucesivos de la División de Física, Matemáticas y Astronomía de Caltech: Tom Tombrello, Andrew Lange y Tom Soifer, y los detalles contractuales y legales complejos fueron resueltos por el abogado de Propiedad Intelectual de Caltech, Adam Cochran. Con la publicación de esta *Edición del nuevo milenio*, el plan se llevó a cabo con éxito, a pesar de su complejidad. Específicamente:

Pfeiffer y Gottlieb convirtieron a LaTeX los tres volúmenes de las *Lecciones* (y también más de 1 000 ejercicios del curso de Feynman para incorporarlos a *Feynman's Tips on Physics*). Las figuras de las *Lecciones* se volvieron a trazar en formato electrónico moderno en India, bajo la supervisión del traductor al alemán de las *Lecciones*, Henning Heinze, para su uso en la edición alemana. Gottlieb y Pfeiffer intercambiaron el uso no exclusivo de sus ecuaciones en LaTeX en la edición alemana (publicada por Oldenbourg) por el uso no exclusivo de las figuras de Heinze en esta *Edición del nuevo milenio* inglesa. Pfeiffer y Gottlieb verificaron con cuidado todo el texto y ecuaciones en LaTeX y todas las figuras que se volvieron a trazar, e hicieron las correcciones necesarias. Nate Bode y yo, en representación de Caltech, hemos hecho controles aleatorios del texto, ecuaciones y figuras; y sorprendentemente, no hemos encontrado errores. Gottlieb y Pfeiffer son meticulosos y precisos en un grado increíble. Gottlieb y Pfeiffer concertaron que John Sullivan de la Biblioteca Huntington digitalizara las fotos de los pizarrones de Feynman entre 1962 y 1964, y que George Blood Audio digitalizara las grabaciones de las lecciones —con apoyo financiero y moral del profesor de Caltech Carver Mead, apoyo logístico de la archivista Shelley Erwin, y apoyo legal de Cochran—.

La problemática legal era seria: en los años sesenta, Caltech cedió los derechos a Addison Wesley para publicar la edición impresa, y en los años noventa, los derechos para distribuir el audio de las lecciones de Feynman y una variante de una edición electrónica. En la década del 2000, a través de una serie de adquisiciones de esas licencias, los derechos impresos se transfirieron al grupo editorial Pearson, mientras que los derechos electrónicos y de audio se transfirieron al grupo editorial Perseus. Con ayuda de Ike Williams, abogado especialista en lo editorial, Cochran logró unir todos estos derechos con Perseus (Basic Books), con lo que hizo posible esta *Edición del nuevo milenio*.

Agradecimientos

En nombre de Caltech, agradezco a las numerosas personas que han hecho posible esta *Edición del nuevo milenio*. En específico, quiero agradecer a las personas clave mencionadas líneas arriba: Ralph Leighton, Michael Gottlieb, Tom Tombrello, Michael Hartl, Rudolf Pfeiffer, Henning Heinze, Adam Cochran, Carver Mead, Nate Bode, Shelley Erwin, Andrew Lange, Tom Soifer, Ike Williams, y a las 50 personas que enviaron las erratas (quienes se enlistan en `www.feynmanlectures.info`). También agradezco a Michelle Feynman (hija de Richard Feynman) por su apoyo y consejo continuos, a Alan Rice por su asistencia tras bambalinas y asesoría en Caltech, a Stephan Puchegger y Calvin Jackson por su ayuda y orientación, a Pfeiffer por la conversión de las *Lecciones* a LaTeX, y a Michael Figl, Manfred Smolik y Andreas Stangl por las discusiones sobre correcciones de erratas; así como al personal de Perseus/Basic Books, y (por las ediciones previas) al personal de Addison Wesley.

Kip S. Thorne
Profesor emérito Feynman de física teórica
Instituto de Tecnología de California *Octubre de 2010*

Prefacio de Feynman

Éstas son las lecciones de física que di el año pasado y el antepasado a los estudiantes de los primeros años en el Instituto Tecnológico de California (Caltech). Por supuesto que éstas no son textuales; han sido editadas, a veces con gran extensión y a veces con muy poca. Las clases constituyen sólo parte del curso completo. El grupo total de 180 estudiantes se reunía dos veces por semana en un aula grande para atender a las explicaciones, y luego se dividía en grupos pequeños de 15 a 20 estudiantes en secciones de discusión y práctica bajo la guía de un ayudante de docencia. Había, además, una sesión de laboratorio por semana.

Con estas clases tratábamos de resolver un problema especial: mantener el interés de los estudiantes muy entusiastas y bastante despiertos que egresaban del bachillerato para entrar en el Caltech. Muchos habían oído hablar de lo interesante y estimulante que es la física: la teoría de la relatividad, la mecánica cuántica y otras ideas modernas. Pero al terminar los dos años del curso anterior al nuestro, muchos de ellos se sentían descorazonados porque realmente se les presentaban muy pocas ideas geniales, nuevas o interesantes. Se les hacía estudiar planos inclinados, electrostática y cuestiones por el estilo, y después de dos años era como para volverse tonto. Se trataba, pues, de ver si podíamos hacer un curso que salvara a los estudiantes más avanzados y animados manteniéndoles el entusiasmo.

Aunque mi intención no fue convertir las clases en un campo de estudio e investigación, preparé las lecciones para los más inteligentes de la clase a fin de asegurarme, si era posible, que aun los estudiantes más inteligentes no podrían abarcar completamente el contenido de cada lección; para ello introduje recomendaciones sobre la aplicación de las ideas y conceptos en diversas direcciones, las cuales se apartaban de la línea principal de ataque. Por esta razón, sin embargo, traté concienzudamente de hacer que todos los enunciados fueran lo más precisos posibles, de señalar en cada caso, dónde encajaban las ecuaciones y las ideas en el cuerpo de la física y cómo —cuando aprendieron más— se modificarían las cosas. Pensé, además, que para los estudiantes es importante indicar qué es lo que deben ser capaces —si son suficientemente inteligentes— de comprender por deducción de lo que se ha dicho antes y qué se está introduciendo como cosa nueva. Cuando se presentaban nuevas ideas, traté de deducirlas si eran deducibles o de explicar que *era* una nueva idea sin base alguna en lo que ya habían aprendido y que se suponía que no era demostrable, sino simplemente un agregado.

Al comenzar estas lecciones supuse que los estudiantes traían cierto conocimiento del bachillerato —como óptica geométrica, ideas simples sobre química, etc.—. Creí, también, que no había ninguna razón para dictar las lecciones en un orden determinado, en el sentido de que no debería mencionar algo hasta que no estuviera en condiciones de estudiarlo en detalle. Había abundante material que surgiría, pero sin discusión completa. Las discusiones completas se harían más tarde cuando hubiera mayor preparación para seguirlas. Ejemplos de esto son el tratamiento de la inductancia y el de los niveles de energía, que primero se introducen en forma muy cualitativa y luego se desarrollan en forma más detallada.

Al mismo tiempo que me dirigía al estudiante más activo, quise cuidar del individuo para quien los adornos en demasía y las aplicaciones laterales son meramente intranquilizadores, cuando no se puede esperar, de ningún modo, que aprendan la mayor parte del material. Para ese estudiante traté que hubiera un núcleo central o columna vertebral de material que *pudiera* captar. Tenía la esperanza de que no se pondría nervioso aunque no entendiera todo el contenido de una lección. No esperaba que comprendiera todo sino los rasgos centrales y más directos. Naturalmente que se necesitaba cierta inteligencia de su parte para ver cuáles eran los teoremas e ideas centrales y cuáles los resultados y aplicaciones laterales más avanzados que sólo podría entender en años posteriores.

Había una dificultad seria para dar estas lecciones: por la forma en que se daba el curso, no había una retroacción del estudiante hacia el profesor que indicara cómo estaban yendo las lecciones. Ésta es una dificultad muy seria que me impide saber con certeza hasta qué punto, en realidad, fueron muy provechosas mis clases. Todo era esencialmente un experimento. Y si lo hiciera nuevamente no lo haría en la misma forma —¡espero que *no* tenga que hacerlo de nuevo!— Creo, no obstante, que en lo que respecta a la física las cosas anduvieron muy satisfactoriamente el primer año.

El segundo año no quedé tan satisfecho. En la primera parte del curso, que trataba de la electricidad y el magnetismo, no pude encontrar ningún modo realmente único o diferente de hacerlo —ninguna manera que fuera especialmente más estimulante que la forma habitual de presentarlo—. Por lo tanto, no creo que hice mucho en las clases sobre electricidad y magnetismo. Al final del segundo año había pensado originalmente continuar dando, después de la electricidad y el magnetismo, algunas clases sobre las propiedades de los materiales, no obstante con el interés de explicar los modos fundamentales, las soluciones de la ecuación de difusión, los sistemas vibrantes, las funciones ortogonales... desarrollando, así, las primeras etapas de lo que usualmente se denomina "métodos matemáticos de la fisica". Pensando en retrospectiva, creo que si lo hiciera de nuevo volvería a esa idea original. Pero como no se había contemplado que yo daría estas clases nuevamente, se sugirió que sería conveniente tratar de dar una introducción a la mecánica cuántica —que es lo que ustedes encontrarán en el tercer volumen—.

Queda perfectamente claro que los estudiantes que sigan estudiando física deberán esperar hasta el tercer año para estudiar mecánica cuántica. Por otra parte, se esgrimió el argumento de que muchos de los estudiantes de nuestro curso estudian física como base para su especialización en otros campos. Y la forma habitual de tratar la mecánica cuántica hace que el tema sea casi inalcanzable para la gran mayoría de los estudiantes ya que necesitan mucho tiempo para aprenderlo. No obstante, en sus aplicaciones concretas —especialmente en sus aplicaciones más complejas, como en la ingeniería eléctrica y en la química— realmente no se usa la maquinaria completa del tratamiento con ecuaciones diferenciales. Por ello, traté de describir los principios de la mecánica cuántica de un modo que no exigiera un conocimiento básico de la matemática de las ecuaciones diferenciales. Creo que aun para un físico es muy interesante presentar la mecánica cuántica de esta manera inversa —por varias razones que se pueden ver en las lecciones—. Sin embargo, creo que el experimento en lo correspondiente a la mecánica cuántica no tuvo éxito completo —en gran parte debido a que no tuve tiempo al final (por ejemplo, debería haber tenido tres o cuatro lecciones más para tratar detenidamente temas como las bandas de energía y la dependencia

espacial de las amplitudes)—. Además, nunca había presentado antes el tema de este modo, por lo que la falta de retroacción fue particularmente seria. Ahora creo que se debe dar la mecánica cuántica más tarde. A lo mejor algún día tenga la oportunidad de hacerlo de nuevo. Entonces lo haré mejor.

La razón de que no haya lecciones sobre cómo resolver problemas se debe a que había secciones de discusión y práctica. Aunque en el primer año incluí tres lecciones sobre cómo resolver problemas, en este curso no pude hacerlo. También había una lección sobre guía inercial que debe estar ciertamente después de la clase sobre sistemas que rotan, pero que desafortunadamente se omitió. Las lecciones quinta y sexta fueron dadas por Matthew Sands porque yo estaba fuera de la ciudad.

La pregunta es, por supuesto, hasta qué punto este experimento ha tenido éxito. Mi punto de vista —que, sin embargo, no lo comparten la mayoría de los que trabajaron con los estudiantes— es pesimista. No creo que me haya ido muy bien con los estudiantes. Cuando recuerdo el modo en que éstos manipulaban los problemas en los exámenes, pienso que el sistema es un fracaso. Por supuesto, mis amigos me indican que hubo una o dos docenas de estudiantes que —muy sorprendentemente— comprendieron casi todo el contenido en todas las lecciones y que fueron muy activos trabajando con el material y preocupándose con animación e interés por muchos tópicos. Estos individuos tienen actualmente, creo, una base de primera línea en física —y son, después de todo, aquellos a quienes quería llegar—. Pero entonces "El poder de la instrucción es, en general, poco eficaz, excepto en las felices disposiciones en que es casi superfluo" (Gibbons).

De todos modos, no quería dejar ningún estudiante completamente atrasado, como quizá lo hice. Creo que un modo más efectivo de ayudar al estudiante sería mediante la adición de tiempo y esfuerzo en el desarrollo de un conjunto de problemas que aclare algunas de las ideas contenidas en las lecciones. Los problemas dan la oportunidad de aumentar la comprensión del material expuesto haciéndolo más real, estructurado y accesible para el proceso de fijación.

Pienso, sin embargo, que la solución a este problema educativo no es otra que darse cuenta que la enseñanza sólo puede realizarse cuando hay una relación individual directa entre un estudiante y un buen profesor, situación en la cual el estudiante discute las ideas, piensa en las cosas y habla sobre ellas. Es imposible aprender simplemente asistiendo a una clase, o simplemente resolviendo los problemas asignados. Pero en los actuales momentos tenemos tantos estudiantes a quienes enseñar que debemos encontrar un sustituto de lo ideal. Quizá mis lecciones ejerzan alguna contribución. Quizá en algún lugar pequeño donde sea posible una relación individual entre profesores y estudiantes, éstos obtengan alguna inspiración o algunos conceptos de estas lecciones. Quizá entonces, también el proceso de fijar el material sea más alegre y placentero para ellos y dé origen al desarrollo de algunas ideas.

RICHARD P. FEYNMAN

Junio, 1963

Introducción

Este libro está basado en el curso de lecciones introductorias de física que dio el profesor R. P. Feynman en el Instituto de Tecnología de California (Caltech) durante el año académico 1961-1962; abarca el primero de los dos años del curso introductorio que toman todos los estudiantes de primer y segundo años en Caltech, y a éste siguió en 1962-1963 una serie similar que abarcó el segundo año. Las lecciones constituyen una parte muy importante en la revisión del curso introductorio, la cual se llevó a cabo a lo largo de un periodo de cuatro años.

La necesidad de una revisión básica surgió tanto del rápido desarrollo de la física en las décadas recientes como del hecho de que los estudiantes recién llegados han mostrado un aumento constante en su habilidad matemática a partir de las mejoras en el contenido de las clases de matemáticas del bachillerato. Nuestra intención fue aprovechar este mayor bagaje matemático y al mismo tiempo introducir suficientes temas modernos para que el curso fuera exigente, interesante y más representativo de la física de hoy en día.

Para generar una variedad de ideas sobre qué material incluir y cómo presentarlo, se alentó a un número sustancial de profesores de física a que ofrecieran sus ideas en forma de planes temáticos para un curso revisado. Varios de éstos fueron presentados y discutidos de manera crítica y profunda. Casi de inmediato se llegó al acuerdo de que una revisión básica del curso no se podría lograr adoptando un libro de texto diferente, ni siquiera escribiendo uno *ab initio*, sino que el nuevo curso debía centrarse en un conjunto de lecciones presentadas a ritmo de dos o tres por semana; el material textual apropiado se produciría luego como una operación secundaria conforme avanzaba el curso, y también se organizarían experimentos de laboratorio adecuados para el material de las lecciones. En consecuencia, se fijó un plan del curso a grandes rasgos, pero se reconoció que era tentativo y estaba incompleto y sujeto a modificaciones considerables por parte de quien fuera a tener la responsabilidad de efectivamente preparar las lecciones.

En cuanto al mecanismo mediante el cual sería finalmente puesto en práctica el curso, se consideraron varios planes. Éstos se parecían mucho entre sí, incluían un esfuerzo cooperativo por N número de miembros del personal que compartirían la carga total de trabajo de manera simétrica y equitativa: cada uno tomaría la responsabilidad de 1/N del material, daría las lecciones y escribiría el material textual para su parte. Sin embargo, la falta de disponibilidad de personal suficiente y la dificultad de mantener un punto de vista uniforme ante las diferencias de personalidad y filosofía entre los participantes individuales hacían que estos planes fueran irrealizables.

Darse cuenta de que verdaderamente poseíamos los medios para crear no sólo un curso nuevo y diferente de física, sino quizá uno único, resultó ser una inspiración dichosa para el profesor Sands. Él sugirió que el profesor R. P. Feynman preparara y diera las lecciones, y que éstas fueran grabadas. Una vez transcritas y editadas, se convertirían en el libro de texto para el nuevo curso. En esencia, éste fue el plan que se adoptó.

Se esperaba que la edición necesaria fuera menor, pues consistiría principalmente en proporcionar figuras y revisar la puntuación y la gramática; la harían uno o dos estudiantes de posgrado a tiempo parcial. Desafortunadamente, esta expectativa fue pasajera. En realidad, fue una operación editorial mayor poder transformar la transcripción literal a una forma legible, aun sin la reorganización o revisión del tema tratado que a veces se requería. Además, no era trabajo para un editor técnico o para un estudiante de posgrado, sino uno que requería la atención minuciosa de un físico profesional ¡de 10 a 20 horas por lección!

La dificultad de la tarea editorial, junto con la necesidad de poner el material en manos de los estudiantes tan pronto como fuera posible, puso un límite estricto en qué tanto se podía "pulir" el material en realidad, y en consecuencia nos vimos forzados a apostar por un producto preliminar pero técnicamente correcto que pudiera usarse de inmediato, en lugar de uno que pudiera considerarse final o terminado. Debido a una necesidad urgente de más ejemplares para nuestros alumnos, y a un interés alentador por parte de profesores y estudiantes de varias instituciones distintas, decidimos publicar el material en su forma preliminar en lugar de esperar una revisión ulterior más profunda que quizá nunca llegaría. No nos hacemos ilusiones en cuanto a lo completo o fluido del material, ni en cuanto a su organización lógica; de hecho, planeamos varias modificaciones menores en el futuro inmediato, y esperamos que no se vuelva estático en su forma o contenido.

Además de las lecciones, que constituyen una parte de importancia central para el curso, era necesario también proporcionar ejercicios adecuados para acrecentar la experiencia y habilidad de los estudiantes, así como experimentos oportunos para facilitar un contacto de primera mano con el material de las lecciones en el laboratorio. Ninguno de estos aspectos se encuentra en un estado tan avanzado como el material de las lecciones, pero se ha hecho un progreso considerable. Algunos ejercicios fueron elaborados conforme progresaban las lecciones y luego expandidos y amplificados para su uso al año siguiente. Sin embargo, puesto que todavía no estamos convencidos de que los ejercicios proporcionen suficiente variedad y profundidad de aplicación de los materiales de las lecciones para dar al alumno plena conciencia del tremendo poder que está a su disposición, los ejercicios se publicaron por separado en un formato menos permanente para así alentar una revisión frecuente.

El profesor H. V. Neher ha ideado varios novedosos experimentos para el nuevo curso. Entre ellos se encuentran varios que utilizan la fricción extremadamente baja que presenta un cojinete de gas: un nuevo canal lineal de aire con el que es posible hacer mediciones cuantitativas de movimiento unidimensional, impactos y movimiento armónico, y un trompo de color de Maxwell soportado e impulsado por aire con el que se pueden estudiar el movimiento de rotación acelerado y la precesión y nutación giroscópicas. Se espera que el desarrollo de nuevos experimentos de laboratorio dure un tiempo considerable.

El programa de revisión se llevó a cabo bajo la dirección de los profesores R. B. Leighton, H. V. Neher y M. Sands. En el programa participaron oficialmente los profesores R. P. Feynman, G. Neugebauer, R. M. Sutton, H. P. Stabler, F. Strong y R. Vogt, de la división de física, matemáticas y astronomía, y los profesores T. Caughey, M. Plesset y C. H. Wilts de la división de ciencias de la ingeniería. Reconocemos y agradecemos la valiosa asistencia de todos aquellos que contribuyeron al programa de revisión. Estamos en deuda en especial con la Fundación Ford, sin cuyo apoyo financiero este programa no podría haberse llevado a cabo.

Robert B. Leighton

Julio, 1963

Índice general

Capítulo 1. Electromagnetismo

1-1 Las fuerzas eléctricas 1-1
1-2 El campo eléctrico y el magnético 1-4
1-3 Las características de los campos vectoriales 1-4
1-4 Las leyes de electromagnetismo 1-5
1-5 ¿Qué son los campos? 1-10
1-6 El electromagnetismo en la ciencia y la tecnología 1-11

Capítulo 2. Cálculo diferencial de campos vectoriales

2-1 Comprendiendo la física 2-1
2-2 Los campos escalares y vectoriales —$\boldsymbol{T}$ y $\boldsymbol{h}$— . . . 2-2
2-3 Derivadas de los campos —el gradiente— 2-4
2-4 El operador $\boldsymbol{\nabla}$ 2-6
2-5 Operaciones con $\boldsymbol{\nabla}$ 2-7
2-6 La ecuación diferencial de la propagación del calor 2-9
2-7 Las segundas derivadas de campos vectoriales . . 2-10
2-8 Peligros 2-12

Capítulo 3. Cálculo integral vectorial

3-1 Integrales vectoriales; la integral de línea de $\boldsymbol{\nabla\psi}$ 3-1
3-2 Flujo de un campo vectorial 3-3
3-3 El flujo saliente de un cubo; el teorema de Gauss 3-5
3-4 Conducción del calor; la ecuación de difusión . . . 3-6
3-5 Circulación de un campo vectorial 3-9
3-6 Circulación a lo largo de un cuadrado; el teorema de Stokes 3-10
3-7 Campos de rotacional nulo y de divergencia nula 3-11
3-8 Resumen 3-13

Capítulo 4. Electrostática

4-1 Estática 4-1
4-2 Ley de Coulomb; superposición 4-2
4-3 El potencial eléctrico 4-4
4-4 $\boldsymbol{E = -\nabla\phi}$ 4-6
4-5 El flujo de $\boldsymbol{E}$ 4-7
4-6 Ley de Gauss; la divergencia de $\boldsymbol{E}$ 4-10
4-7 El campo de una esfera cargada 4-11
4-8 Líneas de campo; las superficies equipotenciales 4-11

Capítulo 5. Aplicaciones de la ley de Gauss

5-1 La electrostática es la ley de Gauss más... 5-1
5-2 El equilibrio en un campo electrostático 5-1
5-3 El equilibrio en presencia de conductores 5-2
5-4 Estabilidad de los átomos 5-3
5-5 El campo de una línea cargada 5-3
5-6 Una hoja cargada; dos hojas 5-4
5-7 La esfera cargada; cascarón esférico 5-5
5-8 ¿Es el campo de una carga puntual exactamente $\boldsymbol{1/r^2}$? 5-6
5-9 Los campos de un conductor 5-8
5-10 El campo en una cavidad de un conductor 5-9

Capítulo 6. El campo eléctrico en diversas situaciones

6-1 Ecuaciones del potencial electrostático 6-1
6-2 El dipolo eléctrico 6-2
6-3 Comentarios sobre ecuaciones vectoriales 6-4
6-4 El potencial de un dipolo como gradiente 6-5
6-5 La aproximación dipolar para una distribución arbitraria 6-7
6-6 Campos de conductores cargados 6-8
6-7 El método de las imágenes 6-9
6-8 La carga puntual cerca de un plano conductor . . . 6-9
6-9 La carga puntual cerca de una esfera conductora 6-11
6-10 Condensadores; el condensador de placas paralelas 6-12
6-11 Descarga de alto voltaje 6-14
6-12 El microscopio de emisión por campo 6-15

Capítulo 7. El campo eléctrico en diversas situaciones (continuación)

7-1 Métodos para calcular el campo electrostático . . . 7-1
7-2 Los campos en dos dimensiones; funciones de la variable compleja 7-2
7-3 Oscilaciones de plasma 7-6
7-4 Las partículas coloidales en un electrolito 7-8
7-5 El campo electrostático de una rejilla 7-11

Capítulo 8. Energía electrostática

8-1 La energía electrostática de cargas. Esfera uniforme 8-1
8-2 La energía de un condensador. Fuerzas sobre conductores cargados 8-2
8-3 La energía electrostática de un cristal iónico 8-4
8-4 La energía electrostática en los núcleos 8-6
8-5 La energía en el campo electrostáticos 8-10
8-6 La energía de una carga puntual 8-12

Capítulo 9. La electricidad en la atmósfera

9-1 El gradiente de potencial eléctrico en la atmósfera 9-1
9-2 Las corrientes eléctricas en la atmósfera 9-2
9-3 El origen de las corrientes atmosféricas 9-4
9-4 Las tormentas eléctricas 9-5
9-5 El mecanismo de separación de cargas 9-8
9-6 Los rayos 9-11

Capítulo 10. Dieléctricos

10-1 La constante dieléctrica 10-1
10-2 El vector de polarización $\boldsymbol{P}$ 10-2
10-3 Las cargas de polarización 10-3
10-4 Las ecuaciones electrostáticas en presencia de dieléctricos 10-6
10-5 Los campos y las fuerzas en presencia de dieléctricos 10-7

Capítulo 11. Dentro de los dieléctricos

11-1 Los dipolo molecular 11-1
11-2 La polarización electrónica 11-1
11-3 Las moléculas polares. Polarización de orientación 11-3
11-4 Los campos eléctricos en cavidades de un dieléctrico 11-5
11-5 La constante dieléctrica de líquidos; la ecuación de Clausius-Mossotti 11-7
11-6 Los dieléctricos sólidos 11-8
11-7 Ferroelectricidad; el $BaTiO_3$ 11-9

Capítulo 12. Analogías con la electrostática

12-1 Ecuaciones iguales tienen soluciones iguales . . . 12-1
12-2 El flujo de calor; la fuente puntual cerca de un contorno plano infinito 12-2
12-3 La membrana tensa 12-5
12-4 La difusión de neutrones; una fuente esférica uniforme en un medio homogéneo 12-7
12-5 El flujo irrotacional de un fluido; el flujo alrededor de una esfera 12-8
12-6 Iluminación; el plano alumbrado uniformemente 12-11
12-7 La "unidad subyacente" de la naturaleza 12-12

Capítulo 13. Magnetostática

13-1 El campo magnético 13-1
13-2 La corriente eléctrica; conservación de la carga 13-1
13-3 La fuerza magnética sobre una corriente 13-2
13-4 El campo magnético de las corrientes estacionarias; ley de Ampère 13-3
13-5 El campo magnético de un alambre rectilíneo y de un solenoide; las corrientes atómicas 13-5
13-6 La relatividad de los campos magnético y eléctrico 13-7
13-7 La transformación de las corrientes y de las cargas 13-12
13-8 Superposición; la regla de la mano derecha . . . 13-13

Capítulo 14. El campo magnético en diversas situaciones

14-1 El potencial vectorial 14-1
14-2 El potencial vectorial de corrientes conocidas . . 14-3
14-3 Un alambre recto 14-5
14-4 Un solenoide largo 14-5
14-5 El campo de un lazo pequeño; el dipolo magnético 14-7
14-6 El potencial vectorial de un circuito 14-9
14-7 La ley de Biot y Savart 14-9

Capítulo 15. El potencial vectorial

15-1 Las fuerzas sobre un lazo de corriente; energía de un dipolo 15-1
15-2 Las energías mecánica y eléctrica 15-4
15-3 La energía de las corrientes estacionarias 15-6
15-4 $\boldsymbol{B}$ contra $\boldsymbol{A}$ 15-7
15-5 El potencial vectorial y la mecánica cuántica . . 15-9
15-6 Lo que es verdadero para la estática y falso para la dinámica 15-15

Capítulo 16. Corrientes inducidas

16-1 Motores y generadores 16-1
16-2 Transformadores e inductancias 16-4
16-3 Las fuerzas sobre corrientes inducidas 16-6
16-4 La tecnología eléctrica 16-8

Capítulo 17. Las leyes de inducción

17-1 La física de la inducción 17-1
17-2 Excepciones a la "regla del flujo" 17-2
17-3 Aceleración de partículas por un campo eléctrico inducido; el betatrones 17-4
17-4 Una paradoja 17-6
17-5 Generador de corriente alterna 17-7
17-6 Inductancia mutua 17-9
17-7 Autoinductancia 17-12
17-8 Inductancia y energía magnéticas 17-13

Capítulo 18. Las ecuaciones de Maxwell

18-1 Ecuaciones de Maxwell 18-1
18-2 Cómo trabaja el nuevo término 18-3
18-3 Toda la física clásica 18-5
18-4 Un campo viajero 18-5
18-5 La velocidad de la luz 18-9
18-6 Resolver las ecuaciones de Maxwell; los potenciales y la ecuación de onda 18-10

Capítulo 19. El principio de mínima acción

19-1 Clase especial —prácticamente palabra por palabra— 19-1
19-2 Nota agregada después de la clase 19-14

Capítulo 20. Soluciones de las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre

20-1 Ondas en el espacio libre; ondas planas 20-1
20-2 Ondas tridimensionales 20-8
20-3 Imaginación científica 20-10
20-4 Ondas esféricas 20-12

Capítulo 21. Soluciones de las ecuaciones de Maxwell con corrientes y cargas

21-1 Luz y ondas electromagnéticas 21-1
21-2 Ondas esféricas procedentes de una fuente puntual 21-2
21-3 La solución general de las ecuaciones de Maxwell 21-4
21-4 Los campos de un dipolo oscilante 21-6
21-5 Los potenciales de una carga en movimiento; la solución general de Liénard y Wiechert . . . 21-10
21-6 Los potenciales de una carga moviéndose a velocidad constante; la fórmula de Lorentz 21-12

Capítulo 22. Circuitos de CA

22-1 Impedancias 22-1
22-2 Generadores 22-5
22-3 Redes de elementos ideales; leyes de Kirchhoff 22-7
22-4 Circuitos equivalentes 22-11
22-5 Energía 22-11
22-6 Un circuito en escalera 22-13
22-7 Filtros 22-14
22-8 Otros elementos de circuito 22-17

Capítulo 23. Cavidades resonantes

23-1 Elementos de circuito reales 23-1
23-2 Un capacitor a altas frecuencias 23-2
23-3 Una cavidad resonante 23-6
23-4 Modos de una cavidad 23-9
23-5 Cavidades y circuitos resonantes 23-11

Capítulo 24. Guías de onda

24-1 La línea de transmisión 24-1
24-2 La guía de onda rectangular 24-4
24-3 La frecuencia de corte 24-6
24-4 La velocidad de las ondas guiadas 24-7
24-5 Observación de ondas guiadas 24-8
24-6 Plomería con guías de onda 24-9
24-7 Modos de guía de onda 24-11
24-8 Otra manera de considerar las ondas guiadas . 24-11

Capítulo 25. La electrodinámica en notación relativista

25-1 Vectores de cuatro dimensiones 25-1
25-2 El producto escalar 25-3
25-3 El gradiente en cuatro dimensiones 25-6
25-4 La electrodinámica en notación cuatridimensional 25-9
25-5 El cuadripotencial de una carga en movimiento 25-10
25-6 Invariancia de las ecuaciones de la electrodinámica 25-11

Capítulo 26. Transformación de Lorentz de campos

26-1 El potencial de cuatro dimensiones de una carga en movimiento 26-1
26-2 Los campos de una carga puntual con una velocidad constante 26-2
26-3 Transformación relativista de los campos 26-5
26-4 Las ecuaciones de movimiento en notación relativista 26-11

Capítulo 27. Energía del campo y momentum del campo

27-1 Conservación local 27-1
27-2 Conservación de la energía y del electromagnetismo 27-2
27-3 Densidad de energía y flujo de energía en el campo electromagnético 27-3
27-4 La ambigüedad de la energía de campo 27-6
27-5 Ejemplos de flujo de energía 27-7
27-6 Momentum del campo 27-9

Capítulo 28. La masa electromagnética

28-1 La energía del campo de una carga puntual . . . 28-1
28-2 El momentum del campo de una carga en movimiento 28-2
28-3 Masa electromagnética 28-3
28-4 La fuerza de un electrón sobre sí mismo 28-4
28-5 Intentos de modificar la teoría de Maxwell 28-6
28-6 El campo de la fuerza nuclear 28-13

Capítulo 29. El movimiento de cargas en campos eléctricos y magnéticos

29-1 Movimiento en un campo eléctrico o magnético uniforme 29-1
29-2 Análisis de momentum 29-1
29-3 Una lente electrostática 29-3
29-4 Una lente magnética 29-3
29-5 El microscopio electrónico 29-4
29-6 Campos guía en aceleradores 29-4
29-7 Enfoque con gradiente alternado 29-6
29-8 Movimiento en campos eléctricos y magnéticos cruzados 29-8

Capítulo 30. La geometría interna de los cristales

30-1 La geometría interna de los cristales 30-1
30-2 Enlaces químicos en cristales 30-2
30-3 Crecimiento de cristales 30-3
30-4 Redes cristalinas 30-3
30-5 Simetrías en dos dimensiones 30-5
30-6 Simetrías en tres dimensiones 30-7
30-7 Resistencia de metales 30-8
30-8 Dislocación y crecimiento de cristales 30-9
30-9 El modelo cristalino de Bragg-Nye 30-10

Capítulo 31. Tensores

31-1 El tensor de polarizabilidad 31-1
31-2 Cómo transformar las componentes de un tensor 31-3
31-3 El elipsoide de energía 31-3
31-4 Otros tensores; el tensor de inercia 31-6
31-5 El producto vectorial 31-8
31-6 El tensor de esfuerzos 31-9
31-7 Tensores de orden superior 31-12
31-8 El tensor de dimensión cuatro de momentum electromagnético 31-13

Capítulo 32. Índice de refracción de materiales densos

32-1 Polarización de la materia 32-1
32-2 Las ecuaciones de Maxwell en un dieléctrico . . 32-3
32-3 Ondas en un dieléctrico 32-5
32-4 El índice de refracción complejo 32-8
32-5 El índice de una mezcla 32-9
32-6 Ondas en metales 32-10
32-7 Aproximaciones a bajas y altas frecuencias; la profundidad de penetración y la frecuencia de plasma 32-11

Capítulo 33. Reflexión de superficies

33-1 Reflexión y refracción de la luz 33-1
33-2 Ondas en materiales densos 33-2
33-3 Condiciones de frontera 33-4
33-4 Ondas reflejadas y transmitidas 33-8
33-5 Reflexión en metales 33-12
33-6 Reflexión interna total 33-12

Capítulo 34. Magnetismo de la materia

34-1 Diamagnetismo y paramagnetismo 34-1
34-2 Momentos magnéticos y momentum angular . . 34-3
34-3 Precesión de los imanes atómicos 34-4
34-4 Diamagnetismo 34-5
34-5 Teorema de Larmor 34-7
34-6 La física clásica no da ni diamagnetismo ni paramagnetismo 34-8
34-7 Momentum angular en la mecánica cuántica . . 34-9
34-8 Energía magnética de los átomos 34-12

Capítulo 35. Paramagnetismo y resonancias magnéticas

35-1 Estados magnéticos cuantizados 35-1
35-2 El experimento de Stern-Gerlach 35-3
35-3 El método de haces moleculares de Rabi 35-4
35-4 Paramagnetismo macroscópico de materiales . . 35-7
35-5 Enfriamiento por desmagnetización adiabática 35-10
35-6 Resonancia magnética nuclear 35-11

Capítulo 36. Ferromagnetismo

36-1 Corrientes de magnetización 36-1
36-2 El campo $\boldsymbol{H}$ 36-5
36-3 La curva de magnetización 36-7
36-4 Inductancias con núcleo de hierro 36-8
36-5 Electroimanes 36-10
36-6 Magnetización espontánea 36-11

Capítulo 37. Materiales magnéticos

37-1 Qué es el ferromagnetismo 37-1
37-2 Propiedades termodinámicas 37-5
37-3 La curva de histéresis 37-6
37-4 Materiales ferromagnéticos 37-10
37-5 Materiales magnéticos fuera de lo común 37-12

Capítulo 38. Elasticidad

38-1 Ley de Hooke 38-1
38-2 Deformaciones específicas uniformes 38-2
38-3 La barra de torsión; ondas de cortes 38-6
38-4 La viga flexionada 38-9
38-5 Flexión lateral 38-11

Capítulo 39. Materiales elásticos

39-1 El tensor de deformación específica 39-1
39-2 El tensor de elasticidad 39-4
39-3 Los movimientos dentro de un cuerpo elástico 39-6
39-4 Comportamiento no elástico 39-9
39-5 Cálculo de las constantes elásticas 39-11

Capítulo 40. El flujo del agua seca

40-1 Hidrostática 40-1
40-2 Las ecuaciones de movimiento 40-2
40-3 Flujo estacionario; teorema de Bernoulli 40-6
40-4 Circulación 40-10
40-5 Líneas de vórtice 40-11

Capítulo 41. El flujo de agua mojada

41-1 Viscosidad 41-1
41-2 Flujo viscoso 41-4
41-3 El número de Reynolds 41-5
41-4 Flujo transversal en torno a un cilindro 41-7
41-5 El límite de viscosidad nula 41-10
41-6 Flujo de Couette 41-11

Capítulo 42. El espacio curvo

42-1 Espacios curvos en dos dimensiones 42-1
42-2 La curvatura en el espacio tridimensional 42-5
42-3 Nuestro espacio es curvo 42-6
42-4 Geometría en el espacio-tiempo 42-8
42-5 La gravedad y el principio de equivalencia 42-8
42-6 La velocidad de los relojes en un campo gravitacional 42-9
42-7 La curvatura del espacio-tiempo 42-12
42-8 El movimiento en el espacio-tiempo curvo . . . 42-12
42-9 La teoría de la gravitación de Einstein 42-14

Índice análitico

Índice de nombres

Lista de símbolos

I

Electromagnetismo

1-1 Las fuerzas eléctricas
1-2 El campo eléctrico y el magnético
1-3 Las características de los campos vectoriales
1-4 Las leyes de electromagnetismo
1-5 ¿Qué son los campos?
1-6 El electromagnetismo en la ciencia y la tecnología

1-1 Las fuerzas eléctricas

Consideremos una fuerza análoga a la de gravitación que varíe con la inversa del cuadrado de la distancia, pero que sea un *billón de billón de billones* de veces más intensa. Y con otra diferencia. Hay dos tipos de "materia", que podríamos llamar positiva y negativa. Si son de la misma clase se repelen y si son de distinta clase se atraen, a diferencia de la gravitatoria que es sólo atractiva. ¿Qué sucedería?

Un conjunto de elementos positivos se repelerán con una fuerza enorme y se esparcirán en todas las direcciones. A un conjunto de elementos negativos le sucederá lo mismo. Pero una mezcla de elementos positivos y negativos deberá comportarse en una forma completamente diferente. Los elementos opuestos serán mantenidos juntos por una fuerza enorme de atracción. El resultado neto será que estas terribles fuerzas se equilibrarán perfectamente entre ellas y formarán una mezcla de elementos positivos y negativos íntimamente mezclados entre sí y de tal modo que dos porciones separadas de esa mezcla no sufran prácticamente ni atracción ni repulsión.

Revisar
Volumen I, capítulo 12,
Características de la fuerza

Una fuerza de este tipo existe: la fuerza eléctrica. Y toda la materia es una mezcla de protones positivos y de electrones negativos que se están atrayendo y repeliendo con una gran fuerza. Tan perfecto es el equilibrio, sin embargo, cuando se paran cerca de alguien más no sienten ninguna fuerza en absoluto. Si hubiera un pequeño desequilibrio lo sabrían. Si estuviesen ubicados a un brazo de distancia de alguien y en cualquiera de ustedes hubiera un *uno por ciento* más de electrones que de protones, la fuerza de repulsión sería increíble. ¿De qué magnitud? ¿Suficiente para levantar el edificio Empire State? ¡No! ¿Para levantar el Monte Everest? ¡No! ¡La repulsión sería suficiente para levantar un "peso" igual al de la Tierra entera!

Con una fuerza tan enorme y perfectamente equilibrada en esta íntima mezcla no es difícil comprender que la materia, tratando de conservar estas cargas positivas y negativas en el mejor equilibrio, pueda tener una gran rigidez y una gran resistencia. El edificio Empire State, por ejemplo, se aparta menos que 2.54 centímetros de su posición de equilibrio dado que las fuerzas eléctricas mantienen cada electrón y cada protón más o menos en su propio lugar. Por otra parte, si consideramos la materia en una escala mucho más pequeña de tal manera que tengamos sólo algunos átomos, cualquier porción de material de este tamaño no tendrá comúnmente igual número de cargas positivas y negativas y, en consecuencia, existirán intensas fuerzas eléctricas residuales. Además, cuando hay un número igual de cargas de signos opuestos en dos pequeños trozos de materia vecinos, puede haber entre ellos grandes fuerzas eléctricas resultantes, ya que las fuerzas entre cargas individuales varían con la inversa del cuadrado de la distancia. Se puede producir una fuerza resultante si una carga negativa de un trozo de material está más cerca de una carga positiva que de una negativa del otro trozo. La fuerza de atracción puede, entonces, ser mayor que la de repulsión de tal manera que puede existir una fuerza de atracción resultante entre los dos trozos de materia sin que haya un exceso neto de cargas. Las fuerzas que mantienen juntos los átomos y las fuerzas químicas que mantienen juntas las moléculas son, en realidad, fuerzas eléctricas actuando en una región en la cual el equilibrio de cargas no es perfecto, o bien en una región donde las distancias son muy pequeñas.

Tabla de letras griegas minúsculas y mayúsculas comúnmente utilizadas

α		alfa
β		beta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ϵ		épsilon
ζ		dseta
η		eta
θ	Θ	theta
ι		iota
κ		kappa
λ	Λ	lambda
μ		mi
ν		ni
ξ	Ξ	xi (ksi)
o		ómicron
π	Π	pi
ρ		rho
σ	Σ	sigma
τ		tau
υ	Υ	ípsilon
ϕ	Φ	phi
χ		chi (ji)
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	omega

Ustedes saben, por supuesto, que los átomos están construidos con protones positivos en el núcleo y con electrones en el exterior. Se podrían preguntar: "Si las fuerzas eléctricas son tan intensas, ¿por qué los protones y los electrones no están unidos? Si pueden formar una mezcla íntima, ¿por qué no lo hacen más íntimamente?" La respuesta tiene que ver con los efectos cuánticos. Si aprobáramos ubicar nuestros electrones en una región muy próxima a los protones, de acuerdo con el principio de incertidumbre debería tener un momentum medio cuadrático mayor a medida que tratamos de acercarlos. Es este movimiento, requerido por las leyes de la mecánica cuántica, el que impide que la atracción eléctrica llegue a acercar más las cargas.

Aquí podemos hacer otra pregunta: "¿qué es lo que mantiene unido al núcleo?" En un núcleo hay varios protones, y todos son positivos. ¿Por qué no se apartan unos de otros? Ello nos lleva a aceptar que en el núcleo, además de las fuerzas eléctricas, hay fuerzas de otro tipo, no eléctricas, llamadas fuerzas nucleares, que son mucho más intensas que las fuerzas eléctricas, y que pueden mantener los protones unidos aun cuando se repelen eléctricamente. Sin embargo, las fuerzas nucleares son de corto alcance —decrecen mucho más rápidamente que $1/r^2$—. Además, esto trae una consecuencia muy importante. Si un núcleo tiene muchos protones, se hace muy grande y no se mantiene unido. Un ejemplo es el uranio con 92 protones. Las fuerzas nucleares actúan principalmente entre cada protón (o neutrón) y sus vecinos inmediatos, mientras que las fuerzas eléctricas actúan aun a grandes distancias, ocasionando una repulsión entre cada protón y todos los restantes en el núcleo. Cuanto mayor cantidad de protones haya en un núcleo, mayor será la intensidad de la repulsión eléctrica y, por tanto, como en el caso del uranio, el equilibrio será demasiado frágil y el núcleo estará en mayores condiciones de explotar bajo la acción de las fuerzas eléctricas de repulsión. Si se "golpea" ligeramente un núcleo en tales condiciones (como podría suceder en el caso del bombardeo con neutrones lentos), se romperá en dos partes, cada una con una carga positiva, y estas partes se apartarán debido a su repulsión eléctrica. La energía que se libera es la energía de la bomba atómica. Esta energía se llama comúnmente "nuclear", pero es en realidad energía "eléctrica" liberada cuando las fuerzas eléctricas superan a las fuerzas de atracción nuclear.

Podríamos preguntar, finalmente, qué es lo que permite a los electrones cargados negativamente que se mantengan juntos (ya que ellos no sufren los efectos de las fuerzas nucleares). Si un electrón está constituido enteramente por una sola clase de sustancia, cada parte deberá repeler a la otra. ¿Por qué, entonces, ellas no se apartan? ¿Pero tiene "partes" el electrón? Quizá; podríamos decir que el electrón es puntual y que las fuerzas eléctricas actuarán entre *diferentes* cargas puntuales, de tal manera que el electrón no actúe sobre sí mismo. Quizá, todo lo que podemos decir, sobre este problema acerca de qué es lo que permite mantener cohesionado al electrón, es que ha provocado numerosas dificultades en la tentativa de elaborar una teoría completa del electromagnetismo. Este problema no ha sido resuelto todavía. Nos divertiremos al discutir un poco más sobre este tema en los próximos capítulos.

Como hemos visto, deberíamos esperar que una combinación de fuerzas eléctricas y efectos cuánticos debería determinar la estructura detallada de la materia y, por lo tanto, de sus propiedades. Existen materiales que son duros, otros que son blandos. Unos son "conductores" de la electricidad, porque sus electrones están libres para desplazarse; otros son "aislantes", ya que sus electrones están ligados fuertemente a cada átomo. Veremos más adelante el origen de algunas de estas propiedades, pero como es un aspecto más complicado, comenzaremos a considerar las fuerzas eléctricas sólo en casos simples. Comenzaremos por tratar solamente las leyes de la electricidad, incluyendo el magnetismo que es en realidad una parte de este mismo tema.

Hemos dicho que la fuerza eléctrica, como en el caso de la fuerza de gravitación, decrece con la inversa del cuadrado de la distancia que separa las cargas. Esta relación se llama ley de Coulomb. Pero esto no es enteramente cierto cuando las cargas están en movimiento —las fuerzas eléctricas dependen también de los movimientos de las cargas de una manera complicada—. Una parte de la

fuerza entre cargas en movimiento se llama fuerza *magnética*. Es en realidad sólo un aspecto de un efecto eléctrico. Ésta es la razón por la cual llamamos "electromagnetismo" a este tema.

Existe un principio general importante que permite tratar las fuerzas electromagnéticas en una forma relativamente simple. Se encuentra experimentalmente que la fuerza que actúa sobre una partícula cargada —cualquiera que sea el número de cargas existentes o la forma en que se desplazan— depende únicamente de la posición de esta carga, de la velocidad de la carga y del valor de esta carga. Podemos escribir la fuerza $\boldsymbol{F}$ sobre una carga q que se mueve con una velocidad $\boldsymbol{v}$ en la forma:

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}). \tag{1.1}$$

Llamaremos $\boldsymbol{E}$ al *campo eléctrico* y $\boldsymbol{B}$ al *campo magnético* en el punto donde se encuentra la carga. Algo muy importante es que las fuerzas eléctricas debidas a todas las otras cargas del universo pueden ser resumidas dando solamente estos dos vectores. Los valores dependen del lugar *donde* se encuentre la carga y pueden variar con el *tiempo*. Además, si remplazamos esta carga por otra, la fuerza sobre la nueva carga será proporcional al valor de esta carga, en la medida en que las otras cargas del universo no hayan cambiado su posición ni su estado de movimiento (en la realidad, por supuesto, cada carga produce fuerzas sobre todas las vecinas y puede causar un movimiento de las mismas, y así, en ciertos casos, los campos *pueden* cambiar si cambiamos la carga dada por otra).

Sabemos por lo visto en el volumen I cómo encontrar el movimiento de una partícula conociendo la fuerza que actúa sobre ella. La ecuación (1.1) puede combinarse con la ecuación de movimiento para dar:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{m\boldsymbol{v}}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}\right] = \boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}). \tag{1.2}$$

Donde $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ son conocidos, podremos encontrar el movimiento. Ahora necesitaríamos saber cómo se producen los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$.

Uno de los principios simplificadores más importantes respecto a la forma de producir los campos es el siguiente: supongamos que un cierto número de cargas se desplazan de una cierta manera produciendo un campo $\boldsymbol{E}_1$, y que otro conjunto de cargas produzca otro campo $\boldsymbol{E}_2$. Si ambos sistemas de cargas son considerados en el mismo instante (conservando las mismas posiciones y movimientos que tenían cuando se consideran por separado), entonces el campo producido es la suma

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2. \tag{1.3}$$

Este hecho se llama *principio de superposición* de los campos. Éste es también aplicable a los campos magnéticos. Este principio implica que si conocemos la ley según la cual una carga *única* moviéndose de una manera arbitraria produce los campos eléctricos y magnéticos, sabremos completamente todas las leyes de la electrodinámica. Si queremos conocer la fuerza que se ejerce sobre una carga A, debemos solamente calcular los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ producidos por cada una de las cargas B, C, D, etc., y después de sumar los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ producidos por cada una de estas cargas, podremos encontrar los campos totales, y a partir de ellos las fuerzas actuantes sobre la carga A. Si ocurriese que el campo fuera producido por una sola carga, ésta sería la forma más sencilla de describir las leyes de la electrodinámica. Hemos dado una descripción de esta ley (capítulo 28, volumen I) la cual es, desafortunadamente, muy complicada.

Resulta que las formas bajo la cual las leyes de la electrodinámica son más sencillas no es la que se podría esperar. *No* es simple dar una fórmula para la fuerza que una carga produce sobre la otra. Es cierto que cuando las cargas están quietas la ley de fuerza de Coulomb es simple, pero cuando las cargas están en movimiento las relaciones son complicadas, entre otras cosas, por el retardo y por los efectos de la aceleración. Como consecuencia, no deseamos presentar la electrodinámica solamente a partir de las leyes de fuerza entre las cargas; nos parece que es más conveniente adoptar otro punto de vista, aquel en el que las leyes de la electrodinámica aparezcan más fáciles de manejar.

1-2 El campo eléctrico y el magnético

En primer lugar, deberemos ampliar el conocimiento que tenemos de los vectores eléctrico y magnético, $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$. Los hemos definido en función de las fuerzas que experimenta una carga. Hablaremos ahora de los campos eléctricos y magnéticos *en un punto* cuando no hay cargas presentes en dicho punto. Lo que en realidad estamos diciendo es que, como hay fuerzas "actuando" sobre la carga, quedará "algo" en este lugar cuando se retira la carga. Si una carga ubicada en el punto (x, y, z) en el tiempo t sufre la acción de la fuerza $\boldsymbol{F}$ dada por la ecuación (1.1) asociaremos los vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ con *este punto* del espacio (x, y, z). Consideraremos a $\boldsymbol{E}(x, y, z, t)$ y $\boldsymbol{B}(x, y, z, t)$ como responsables de la fuerza que *sufriría* a un tiempo t, una carga situada en el punto (x, y, z), *con la condición* de que al ubicar la carga en este punto, la misma *no perturbe* la posición ni el estado de movimiento de todas las otras cargas responsables de los campos.

Siguiendo esta idea, asociaremos a *todo* punto (x, y, z) del espacio dos vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$, que pueden cambiar con el tiempo. Los campos eléctricos y magnéticos son ahora considerados como *funciones vectoriales* de x, y, z y t. Como un vector está caracterizado por sus componentes, cada uno de los campos $\boldsymbol{E}(x, y, z, t)$ y $\boldsymbol{B}(x, y, z, t)$ representa tres funciones matemáticas de x, y, z y t.

Esto es así precisamente porque se puede definir $\boldsymbol{E}$ (o $\boldsymbol{B}$) en todo punto del espacio y esto se llama "campo". Un "campo" es toda cantidad física que toma un valor diferente en cada punto del espacio. La temperatura, por ejemplo, es un campo —en este caso es un campo escalar— que desinaremos con $T(x, y, z, t)$. Así, la temperatura podría variar con el tiempo y en este caso diremos que el campo de temperaturas es función del tiempo, y lo escribimos $T(x, y, z, t)$. Otro ejemplo es el "campo de velocidades" de un líquido en movimiento. Seguiremos la notación $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ para indicar la velocidad del líquido en cada punto del espacio y en el instante t. Éste es un campo vectorial.

Volviendo a los campos electromagnéticos —aun cuando sean producidos por las cargas de acuerdo con fórmulas complicadas—, tienen la característica siguiente: las relaciones entre los valores de los campos en *un punto* y los valores en un *punto vecino* son muy simples. Con solamente algunas de estas relaciones presentadas en forma de ecuaciones diferenciales podemos describir completamente el campo. Y es bajo la forma de tales ecuaciones que las leyes de la electrodinámica se presentan de la manera más simple.

Existen varias ideas creadas con la finalidad de ayudar a visualizar el comportamiento de los campos. La más adecuada es, tal vez, la más abstracta: consideramos simplemente los campos como funciones matemáticas de la posición y del tiempo. Podremos así tratar de dar una imagen del campo asociando vectores a muchos puntos del espacio y en forma tal que cada uno de ellos dé la intensidad y la dirección en ese punto. Esta representación está mostrada en la figura 1-1. Podremos también trazar las líneas que en todo punto son tangentes a estos vectores —y que, por así decirlo, siguen las flechas y dan la dirección del campo—. Haciendo esto perdemos los *módulos* de los vectores, pero podremos tener una idea de la intensidad del campo dibujando las líneas más separadas cuando el campo es débil y más juntas cuando es fuerte. Adoptaremos la convención de que *el número de líneas por unidad de área* perpendicular a las líneas es proporcional a la *intensidad del campo*. Esto es, por supuesto, sólo una aproximación, y requerirá, en general, que de tiempo en tiempo aparezcan nuevas líneas a fin de ajustar su número a la intensidad del campo. El campo de la figura 1-1 está representado por líneas de campo en la figura 1-2.

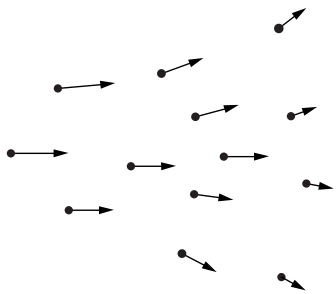


Figura 1-1. Un campo vectorial se puede representar dibujando un sistema de flechas cuyo módulo y dirección indican los valores del campo vectorial en los puntos en los cuales las flechas han sido dibujadas.

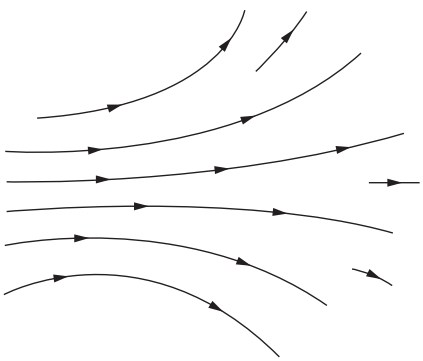


Figura 1-2. Un campo vectorial se puede representar dibujando líneas tangentes a la dirección del vector de campo en cada punto, y dibujando la densidad de las líneas proporcional a la magnitud del campo vectorial.

1-3 Las características de los campos vectoriales

Existen dos propiedades matemáticas importantes de los campos vectoriales que podremos utilizar en nuestra descripción de las leyes de la electricidad, utilizando el concepto de campo. Supongan que nos imaginamos una superficie cerrada cualquiera y nos preguntamos si estamos perdiendo "cualquier cosa" de su interior; es decir, ¿el campo tiene la propiedad de "fluir hacia afuera"? Por

ejemplo, para un campo de velocidades, podríamos preguntarnos si la velocidad está siempre dirigida hacia el exterior de la superficie, o más generalmente, si hay más fluido saliente (o por unidad de tiempo) que entrante. Llamamos "flujo de velocidad" saliente de la superficie, la cantidad total de fluido saliente de la superficie por unidad de tiempo. Además, el flujo a través de un elemento de una superficie es igual al producto de la componente de la velocidad normal a la superficie, por el área de esta superficie. Para una superficie cerrada cualquiera, el *flujo neto saliente* —o *flujo*— es el producto del promedio de la componente de la velocidad según la dirección hacia afuera, por el área de la superficie:

$$\text{Flujo} = (\text{componente normal media}) \cdot (\text{área de la superficie}). \qquad (1.4)$$

En el caso de un campo eléctrico, podremos definir matemáticamente algo análogo a un flujo saliente, que también llamaremos flujo, pero por supuesto no es el flujo de una sustancia, porque el campo eléctrico no es la velocidad de nada. Por otra parte, la componente normal media del campo es una cantidad matemática que tiene un sentido útil. Hablaremos, entonces, del *flujo eléctrico* —también definido por la ecuación (1.4)—. Finalmente, no sólo es útil hablar del flujo a través de una superficie completamente cerrada, sino a través de toda superficie de contorno. Aquí también, como en el caso anterior, el flujo a través de una superficie de contorno estará definido como el producto de la componente normal media del vector por el área de la superficie. Esta idea está ilustrada en la figura 1-3.

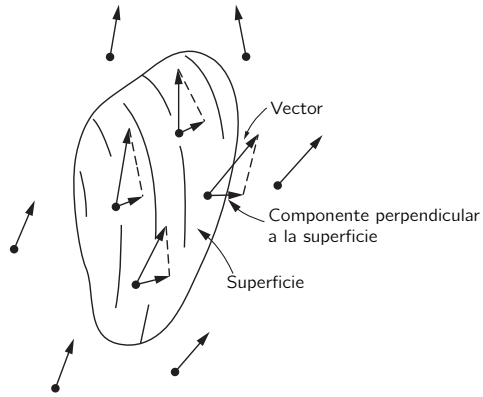


Figura 1-3. El flujo de un campo vectorial a través de una superficie está definido como el valor medio de la componente normal del vector por el área de la superficie.

Hay una segunda propiedad de un campo vectorial que se relaciona ya no con una superficie, sino con una línea. Supongan que consideramos ahora un campo de velocidades que describe el flujo de un líquido. Podríamos hacernos la siguiente pregunta de mucho interés: ¿Está circulando el líquido? Con esto queremos decir: ¿Hay un movimiento rotacional resultante a lo largo de algún lazo? Supongamos que en un instante dado se congele el líquido, excepto dentro de un tubo de diámetro uniforme que forma un lazo cerrado como está indicado en la figura 1-4. Fuera del tubo el líquido se detendrá, pero dentro del mismo continuará en movimiento debido a su momento —es decir, el momento es mayor en un sentido que en el otro en el interior del tubo—. Definiremos una cantidad llamada *circulación*, como el producto de la velocidad resultante del líquido en el tubo por su circunferencia. Podemos nuevamente extender nuestra definición y definir la "circulación" para todo campo vectorial (aunque no haya nada que se mueva). Para todo campo vectorial la *circulación a través de una curva cerrada imaginaria* se define como el componente tangencial promedio del vector (las tangentes en los diferentes puntos de la curva están orientadas en forma coherente) multiplicado por la circunferencia del lazo (figura 1-5):

$$\text{Circulación} = (\text{componente tangencial media}) \cdot (\text{longitud del lazo}). \qquad (1.5)$$

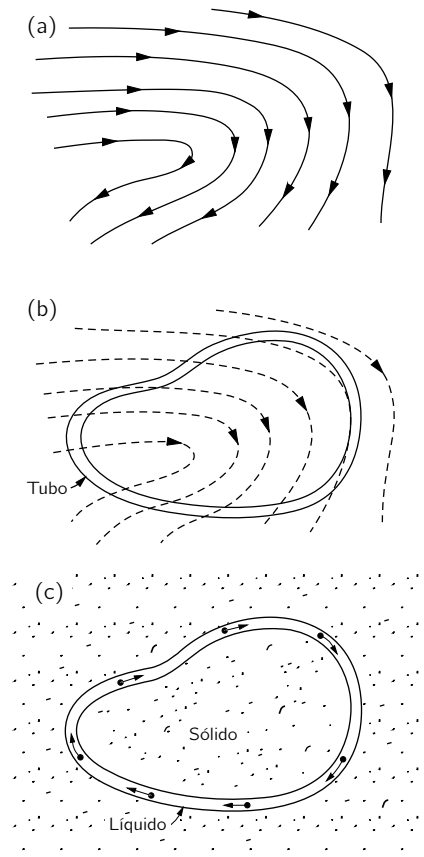


Figura 1-4. (a) El campo de velocidades en un líquido. Imaginen un tubo de sección uniforme que siga una trayectoria cerrada como en (b). Si el líquido fuera congelado instantáneamente excepto dentro del tubo, el líquido dentro del tubo circularía como se muestra en (c).

Podrán ver que esta definición da realmente un número que es proporcional a la velocidad de circulación en el tubo solidificado en un instante dado tal como se indicó anteriormente. Solamente con estas dos nociones —flujo y circulación— podremos describir de una vez las leyes de la electricidad y el magnetismo. Ustedes no comprenderán inmediatamente el sentido de dichas leyes, pero éstas podrán darnos una idea de cómo se describe la física del electromagnetismo en última instancia.

1-4 Las leyes de electromagnetismo

La primera ley del electromagnetismo describe el flujo del campo eléctrico:

$$\text{El flujo de } \boldsymbol{E} \text{ a través de una superficie cerrada} = \frac{\text{carga neta}}{\epsilon_0}, \qquad (1.6)$$

donde ϵ_0 es una constante conveniente (la constante ϵ_0 se lee comúnmente como "épsilon cero"). Si no hay cargas en el interior de la superficie, e igualmente si

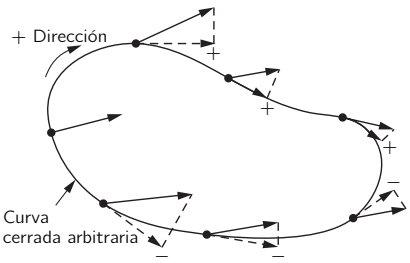


Figura 1-5. La circulación de un campo vectorial es el producto de la componente tangencial media del vector (con una orientación sistemática de las tangentes) por la circunferencia del lazo.

hay cargas vecinas pero externas a la superficie, la componente normal *media* del campo $\boldsymbol{E}$ es cero y, por lo tanto, no hay flujo neto a través de la superficie. Para mostrar el poder de este tipo de enunciado podríamos demostrar que la ecuación (1.6) es equivalente a la ley de Coulomb, sólo con la condición de que el campo de carga única tenga simetría esférica. Para una carga puntual trazaremos una esfera centrada en la carga. Entonces la componente normal media es exactamente la magnitud del campo $\boldsymbol{E}$ en todo punto, ya que el campo debe ser radial y tener la misma intensidad en todo punto de la esfera. Nuestra regla nos dice ahora que el producto del campo sobre la superficie de la esfera, por el área de la esfera, es decir, el flujo saliente es proporcional a la carga interior. Si aumentamos el radio de la esfera, el área aumentará con el cuadrado del radio. El producto de la componente normal del campo eléctrico por el área de la esfera debe ser siempre igual a la misma carga interior y, por lo tanto, el campo debe decrecer con el cuadrado de la distancia —tenemos entonces un campo que sigue una ley "inversa del cuadrado"—.

Si consideramos una curva cualquiera del espacio y medimos la circulación del campo eléctrico a lo largo de esta curva, encontraremos que en general no es igual a cero (aunque lo sea para el caso de un campo de Coulomb). Por el contrario, para el campo eléctrico, hay una segunda ley que dice: para toda superficie S (no cerrada) y que se apoye sobre una curva C,

$$\text{Circulación de } \boldsymbol{E} \text{ a lo largo de } C = -\frac{d}{dt}(\text{flujo de } \boldsymbol{B} \text{ a través de } S). \tag{1.7}$$

Podemos completar las leyes del campo electromagnético escribiendo dos ecuaciones correspondientes para el campo magnético $\boldsymbol{B}$:

$$\text{Flujo de } \boldsymbol{B} \text{ a través de cualquier superficie cerrada} = 0. \tag{1.8}$$

Para una superficie S que se apoye sobre una curva C,

$$c^2(\text{circulación de } \boldsymbol{B} \text{ a lo largo de } C) = \frac{d}{dt}(\text{flujo de } \boldsymbol{E} \text{ a través de } S) + \frac{\text{flujo del vector densidad de corriente a través de } S}{\epsilon_0}. \tag{1.9}$$

La constante c^2 que aparece en la ecuación (1.9) es el cuadrado de la velocidad de la luz. Aparece porque el magnetismo es en realidad un efecto relativista de la electricidad. La constante ϵ_0 ha sido introducida con la finalidad de poder tomar un sistema de unidades conveniente para la corriente eléctrica.

Las ecuaciones (1.6) y (1.9) junto con la ecuación (1.1) son todas las leyes de la electrodinámica.* Como recordarán, las leyes de Newton se escriben de manera simple, pero presentan algunas consecuencias complicadas y nos tomó mucho tiempo estudiarlas completamente. Estas leyes no son tan sencillas de escribir, lo que significa que las consecuencias van a ser más elaboradas y nos tomará mucho tiempo estudiarlas todas.

Podemos ilustrar algunas de las leyes de la electrodinámica con un conjunto de pequeños experimentos que muestran cualitativamente la interrelación entre los campos eléctrico y magnético. Ya han tenido experiencia con el primer término de la ecuación (1.1) por lo que no insistiremos en él. El segundo término de la ecuación (1.1) se puede poner en evidencia haciendo pasar una corriente a través del alambre que pasa por encima de una barra magnética, véase figura 1-6. El alambre se desplaza cuando se establece la corriente debido a la fuerza $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$. Cuando existe una corriente, las cargas dentro del alambre se están moviendo con una velocidad $\boldsymbol{v}$, y el campo magnético debido al imán ejerce una fuerza sobre ellas que tiene como resultado que el alambre se aparte hacia un costado.

Cuando el alambre se desplaza hacia la izquierda, esperaremos que el imán sea empujado hacia la derecha (¡de lo contrario podríamos poner todo el sistema

* Sólo necesitamos añadir una observación acerca de algunas convenciones para el *signo* de la circulación.

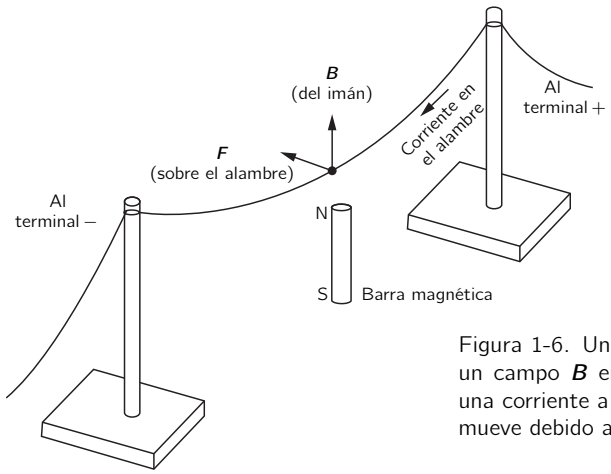


Figura 1-6. Una barra magnética produce un campo $\boldsymbol{B}$ en el alambre. Cuando hay una corriente a través del alambre, éste se mueve debido a la fuerza $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$.

dentro de un vagón y tener un sistema de propulsión en el cual no se conserva el momento!). Aunque la fuerza sea muy pequeña como para producir un movimiento visible en la barra magnética, un sistema magnético más sensible, como la aguja de una brújula, podría mostrar este movimiento.

¿Cómo empuja el cable al imán? La corriente en el alambre produce un campo magnético y éste ejerce una fuerza sobre el imán. De acuerdo con el último término de la ecuación (1.9), una corriente debe tener una *circulación* de $\boldsymbol{B}$ —en este caso, las líneas de $\boldsymbol{B}$ son lazos alrededor del alambre, como se muestra en la figura 1-7—. El campo $\boldsymbol{B}$ es el responsable de la fuerza sobre el imán.

La ecuación (1.9) nos dice que para una corriente dada en el alambre, la circulación de $\boldsymbol{B}$ es la misma para *toda* curva que circunde el alambre. Para las curvas —círculos digamos— que se encuentran más lejos del alambre, las circunferencias son mayores y, por lo tanto, la componente tangencial de $\boldsymbol{B}$ deberá disminuir. Podrán observar, de hecho, que debemos esperar un decrecimiento lineal de $\boldsymbol{B}$ con la distancia en el caso de un largo alambre rectilíneo.

Ahora bien, hemos dicho que una corriente por el alambre produce un campo magnético y que cuando hay un campo magnético presente, hay una fuerza sobre el alambre donde circula la corriente. Entonces debemos esperar que si producimos un campo magnético con una corriente en un alambre, éste deberá ejercer una fuerza sobre otro alambre que conduzca corriente. Esto se puede mostrar por medio de dos alambres tendidos como se muestra en la figura 1-8. En el momento de que las corrientes son del mismo sentido, los dos alambres se atraen, pero cuando las corrientes son opuestas, se repelen.

Brevemente, las corrientes eléctricas, tanto como los imanes, producen campos magnéticos. Pero un momento, ¿qué es un imán? Si los campos magnéticos son

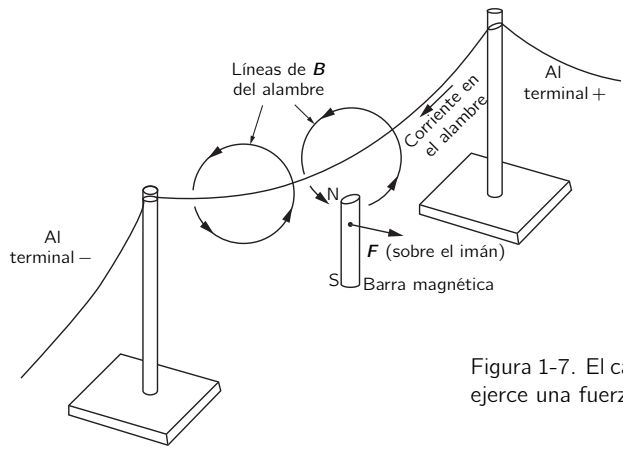


Figura 1-7. El campo magnético del alambre ejerce una fuerza sobre el imán.

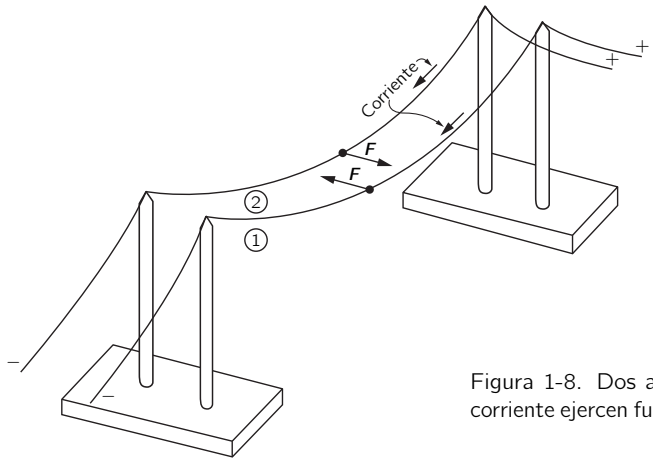


Figura 1-8. Dos alambres que conduzcan corriente ejercen fuerzas el uno sobre el otro.

producidos por cargas en movimiento, ¿no es posible que el campo magnético de un trozo de hierro sea realmente el resultado de corrientes? Parece ser así. Podemos remplazar la barra magnética de nuestro experimento por una bobina de alambre, como se muestra en la figura 1-9. Cuando una corriente circula por la bobina —así como en el alambre extendido encima de ella— observamos un movimiento del alambre exactamente como antes, cuando teníamos un imán en vez de una bobina. En otras palabras, la corriente de la bobina imita un imán. Pero tenemos entonces que cuando un trozo de hierro actúa de esta manera, contiene una corriente circulando perpetuamente. Podemos, en efecto, comprender los imanes en términos de corrientes permanentes en los átomos de hierro. La fuerza sobre el imán de la figura 1-7 se debe al segundo término de la ecuación (1.1).

¿De dónde provienen las corrientes? Una posibilidad puede ser del movimiento de los electrones en las órbitas atómicas. En realidad, éste no es el caso del hierro, pero es correcto para ciertos materiales. Además del movimiento orbital en el átomo, un electrón gira también sobre su propio eje —como sucede con la rotación de la Tierra sobre sí misma— y es la corriente debida a esta rotación que se produce el campo magnético en el caso del hierro (decimos: "como sucede con la rotación de la Tierra sobre sí misma" pero el problema es mucho más profundo en la mecánica cuántica, ya que un modelo clásico no describe lo que realmente sucede). En la mayor parte de las sustancias, algunos electrones giran en un sentido y otros en el otro, de tal modo que el magnetismo se anula, sin embargo, en el hierro —por una razón misteriosa que discutiremos más adelante— la mayor parte de sus electrones giran con sus ejes paralelos, y a esto se debe su magnetismo.

Como los campos de los imanes provienen de corrientes, debemos agregar algunos términos adicionales en las ecuaciones (1.8) o (1.9) para tener en cuenta

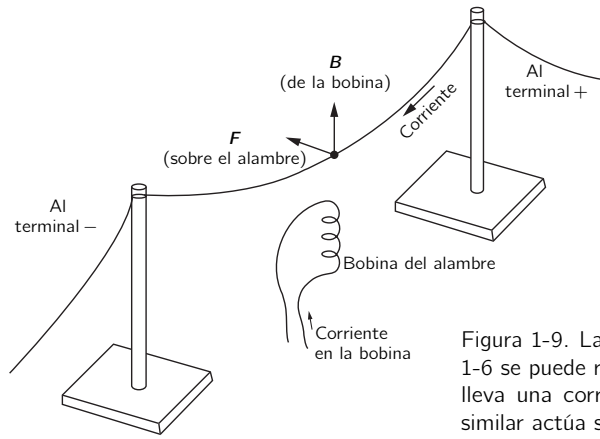


Figura 1-9. La barra magnética de la figura 1-6 se puede remplazar por una bobina que lleva una corriente eléctrica. Una fuerza similar actúa sobre el alambre.

los imanes. Tomaremos simplemente todas las corrientes, incluyendo las corrientes de circulación de los electrones que giran, y así la ley es exacta. Observaremos aquí que la ecuación (1.8) expresa el hecho de que no hay "cargas" magnéticas análogas a las cargas eléctricas que aparecen en el segundo miembro de la ecuación (1.6). Jamás se han encontrado.

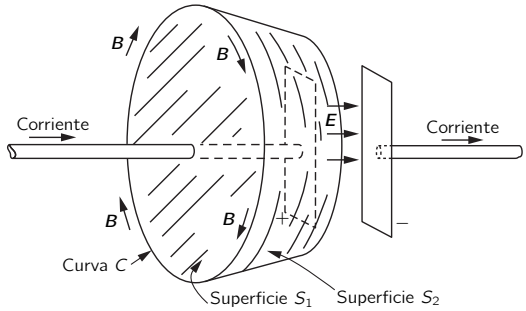


Figura 1-10. La circulación de $\boldsymbol{B}$ a lo largo de la curva C está dada por la corriente que atraviesa la superficie S_1, o por la variación del flujo de $\boldsymbol{E}$ a través de la superficie S_2.

El primer término del segundo miembro de la ecuación (1.9) fue descubierto teóricamente por Maxwell y es de una gran importancia. Dice que los campos *eléctricos* variables producen efectos magnéticos. En verdad, sin este término, la ecuación no tendría ningún sentido, porque sin él no podría haber corrientes en circuitos no cerrados. Pero tales corrientes deben existir, como podemos ver en el siguiente ejemplo. Imaginen un condensador constituido por dos placas. Se lo carga mediante una corriente que fluye hacia una placa alineada con la otra, como se muestra en la figura 1-10. Tracemos una curva C alrededor de uno de los alambres y lo llenamos con una superficie que cruza el cable, como se muestra en la superficie S_1, véase figura. De acuerdo con la ecuación (1.9), la circulación de $\boldsymbol{B}$ a lo largo de C (multiplicada por c^2) está dada por la corriente en el alambre (dividido entre ϵ_0). ¿Pero qué sucede si hacemos que se apoye sobre la curva una superficie *diferente* S_2, en forma de bol que pase entre las placas del condensador y sin cortar el alambre? Ciertamente no habrá ninguna corriente a través de esta superficie. ¡Pero, seguramente, por cambiar la ubicación de una superficie imaginaria no va a cambiar un campo magnético real! La circulación de $\boldsymbol{B}$ debe ser lo que era anteriormente. El primer término del segundo miembro de la ecuación (1.9) debe dar, combinado con el segundo término, el mismo resultado para las superficies S_1 y S_2. Para S_2 la circulación de $\boldsymbol{B}$ está dada por la derivada respecto al tiempo del flujo de $\boldsymbol{E}$ entre las placas del condensador. Se encuentra que el campo variable $\boldsymbol{E}$ está relacionado con la corriente justamente por la relación que es necesaria para que la ecuación (1.9) sea correcta. Maxwell vio que esta relación era necesaria y fue el primero en escribir la ecuación completa.

Con el dispositivo de la figura 1-6 podemos demostrar otra ley del electromagnetismo. Desconectemos los extremos del alambre de la batería y conectémoslos a un galvanómetro que nos indique cuándo una corriente pasa por el alambre. Cuando *pongamos* el alambre dentro del campo magnético del imán, observaremos una corriente. Tal efecto es simplemente otra consecuencia de la ecuación (1.1) —los electrones del alambre sufren la fuerza $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$—. Los electrones tienen una velocidad lateral, puesto que se desplazan con el alambre. Esta $\boldsymbol{v}$ con un $\boldsymbol{B}$ vertical del imán produce una fuerza dirigida sobre los electrones *a lo largo* del alambre, la cual hace mover los electrones hacia el galvanómetro.

Supongan, en cambio, que dejemos el alambre y que desplacemos el imán. Esperamos, a causa de la relatividad, no encontrar diferencia, y observamos en efecto una corriente similar en el galvanómetro. ¿Cómo produce fuerzas el campo magnético sobre las cargas en reposo? De acuerdo con la ecuación (1.1) debe haber un campo eléctrico. Un imán en movimiento debe crear un campo eléctrico. La ecuación (1.7) expresa cuantitativamente cómo se produce. Esta ecuación describe numerosos fenómenos de gran interés práctico, tales como los que se producen en los generadores eléctricos y en los transformadores.

La consecuencia más notable de nuestras ecuaciones es que la combinación de la ecuación (1.7) y la ecuación (1.9) contiene la explicación de la radiación electromagnética a grandes distancias. La razón es a grandes rasgos la siguiente: supongan que en cierto lugar tengamos un campo magnético que está creciendo debido, digamos, a que una corriente se establece súbitamente en el alambre. Luego, por la ecuación (1.7) debe haber una circulación de un campo eléctrico. Como la creación de un campo eléctrico produce esta circulación, de acuerdo con la ecuación (1.9) deberá generarse una circulación magnética. Pero la creación de *este* campo magnético producirá una nueva circulación del campo eléctrico, y así sucesivamente. De esta manera avanzan los campos en el espacio sin recurrir a cargas o corrientes, excepto en la fuente. ¡Es por esto que nos podemos *ver* los unos a los otros! Todo se encuentra en las ecuaciones de los campos electromagnéticos.

1-5 ¿Qué son los campos?

Vamos a hacer ahora algunas aclaraciones sobre nuestra forma de examinar este tema. Ustedes podrán decir: "Es bien abstracta toda esta historia de flujos y circulaciones. Hay campos eléctricos en todo punto del espacio; luego están esas 'leyes'. ¿Pero qué está sucediendo *realmente*? Por qué no se puede explicar, por ejemplo, lo que sucede *realmente* entre las cargas". Bien, esto depende de los prejuicios que tengan. Muchos físicos solían decir que la acción a distancia, sin intermediarios, es inconcebible (¿cómo podían encontrar una idea inconcebible si ya la habían concebido?). Ellos dirían: "Miren, las únicas fuerzas que conocemos son las que se ejercen en forma directa entre un trozo de materia y otro. Es imposible que pueda haber una fuerza sin nada que la transmita". ¿Pero qué sucede realmente cuando estudiamos "la acción directa" de un trozo de materia sobre el otro? Descubrimos que un trozo no está en contacto con otro; están ligeramente separados y hay fuerzas eléctricas actuando a una escala minúscula. Hallamos, desde luego, que para explicar las llamadas fuerzas de acción directa debemos recurrir a las fuerzas eléctricas. ¡Es ciertamente poco razonable insistir sobre el hecho de que una fuerza eléctrica debe relacionarse a la vieja noción familiar de fuerza muscular que empuja o que tira, puesto que se encuentra que las fuerzas musculares deben ser interpretadas como fuerzas eléctricas! La única cuestión razonable es la de preguntar cuál es el método *más cómodo* para describir los efectos eléctricos. Algunos prefieren presentarlos como una interacción a distancia entre cargas, y utilizan una ley complicada. Otros se apasionan por las líneas de campo. Dibujan siempre líneas de campo y piensan que escribir los $\boldsymbol{E}$ y los $\boldsymbol{B}$ es muy abstracto. Las líneas de campo, sin embargo, son solamente una forma burda de describir un campo, y es difícil dar las leyes cuantitativas correctas directamente en términos de líneas de campo. Además, el concepto de líneas de campo no contiene el principio fundamental de la electrodinámica que es el principio de superposición. Aunque conozcamos el aspecto de las líneas de campo para un conjunto de cargas y también para otro conjunto, no tenemos ninguna idea del aspecto de las líneas de campo obtenidas cuando los dos conjuntos de cargas se presentan simultáneamente. Desde el punto de vista matemático, por el contrario, la superposición es fácil —simplemente sumamos los dos vectores—. Además, las líneas de campo tienen la ventaja de dar una imagen viva, pero tienen algunas desventajas. La interacción directa es una forma de ver el problema que presenta grandes ventajas cuando se refiere a cargas eléctricas en reposo, pero tiene grandes desventajas cuando se trata de cargas en movimiento rápido.

El mejor método es utilizar el concepto abstracto de campo. Que sea abstracto es desafortunado, pero necesario. Las tentativas para tratar de representar el campo eléctrico como el movimiento de ruedas de un engranaje, o en términos de líneas de campo, o como tensiones en un cierto material, han costado mucho más esfuerzo a los físicos que el que hubiera costado obtener simplemente respuestas correctas sobre la electrodinámica. Es interesante hacer notar que las ecuaciones para el comportamiento de la luz en cristales fueron encontradas por MacCullagh

en 1839. Pero los físicos le dijeron: "Sí, pero no hay ningún material real cuyas propiedades mecánicas puedan satisfacer estas ecuaciones, y puesto que la luz es una oscilación que debe vibrar en *alguna cosa*, no podemos creer en esta historia de las ecuaciones abstractas". Si los físicos hubiesen tenido una mentalidad más avanzada, habrían podido creer en las ecuaciones correctas para el comportamiento de la luz mucho antes de lo que lo hicieron.

En el caso del campo magnético podemos señalar lo siguiente: supongan que finalmente accedemos a construir una imagen del campo magnético en términos de alguna clase de líneas o de ruedas de un engranaje moviéndose en el espacio. Tratemos de explicar qué es lo que sucede cuando dos cargas se mueven en el espacio, paralelamente y con la misma velocidad. Dado que están en movimiento, se comportarán como dos corrientes y tendrán un campo magnético asociado con ellas (como las corrientes en el alambre de la figura 1-8). Sin embargo, un observador que se desplace con las dos cargas las verá como si estuvieran quietas y dirá que *no* existen campos magnéticos. ¡Las "ruedas de engranaje" o las "líneas" desaparecen cuando uno se desplaza con el objeto! Todo lo que hemos hecho no es más que inventar un *nuevo* problema. ¡¿Cómo pueden desaparecer las ruedas de engranaje?! Los que dibujan líneas de campo se encuentran con dificultades similares. No solamente es imposible decir si las líneas de campo se desplazan o no con las cargas, pueden desaparecer completamente en ciertos sistemas de coordenadas.

Lo que estamos diciendo, desde luego, es que el magnetismo es realmente un efecto relativista. En el caso de las dos cargas que acabamos de considerar, moviéndose paralelamente entre sí, es de esperar que tengamos que hacer correcciones relativistas a sus movimientos, con términos del orden de v^2/c^2. Estas correcciones deben corresponder a la fuerza magnética. Pero ¿qué decir de la fuerza que se ejerce entre los dos alambres en nuestra experiencia? (véase figura 1-8). Allí la fuerza magnética es la *única* fuerza. No necesita una "corrección relativista". Además, si estimamos las velocidades de los electrones en el alambre (ustedes lo pueden hacer por sí mismos), encontramos que su velocidad promedio a lo largo del alambre es alrededor de 0.01 centímetro por segundo. Así pues, v^2/c^2 es alrededor de 10^{-25}. Seguramente una "corrección" despreciable. ¡Pero no! Aunque la fuerza magnética es, en este caso, 10^{-25} veces la fuerza eléctrica "normal" entre los electrones en movimiento, además, recuerden que las fuerzas eléctricas "normales" deben desaparecer en razón del equilibrio eléctrico casi perfecto —puesto que el alambre tiene el mismo número de protones que de electrones—. El equilibrio es mucho más preciso que una parte en 10^{25}, y el pequeño término relativista que hemos llamado fuerza magnética es el único que queda. Es entonces el término predominante.

Es la compensación casi perfecta de los efectos eléctricos la que ha permitido el estudio de los efectos relativistas (es decir, el magnetismo) y descubrir las ecuaciones correctas —hasta el orden de v^2/c^2—, si bien los físicos no *sabían* lo que estaba sucediendo. Y por ello cuando la relatividad fue descubierta no se necesitó cambiar las leyes del electromagnetismo. Éstas, contrariamente a las leyes de la mecánica, eran correctas con la precisión de v^2/c^2.

1-6 El electromagnetismo en la ciencia y la tecnología

Terminaremos este capítulo puntualizando que, de los muchos fenómenos estudiados por los griegos había dos muy extraños: si se frotaba un pedazo de ámbar se podía levantar pequeños trozos de papiro y había extrañas piedras de la tierra de Magnesia que atraían el hierro. Es sorprendente pensar que éstos eran los únicos fenómenos conocidos por los griegos en los cuales aparecían los efectos de la electricidad o el magnetismo. La razón de que sólo estos dos fenómenos aparecieran se debe principalmente a la fantástica precisión del equilibrio de cargas que mencionamos anteriormente. Estudios de científicos posteriores a los griegos descubrieron una serie de fenómenos nuevos que eran en realidad algunos aspectos de estos efectos del ámbar y de la piedra imán o de ella. Ahora

comprendemos que los fenómenos de interacción química y, en última instancia, los de la vida misma, deben ser comprendidos en términos de electromagnetismo.

Es importante recordar que al mismo tiempo que se desarrollaba el conocimiento del electromagnetismo, comenzaron a aparecer posibilidades técnicas que desafiaban la imaginación de las generaciones precedentes: se hizo posible el envío de señales a largas distancias por medio del telégrafo y la posibilidad de hablar con otra persona a muchos kilómetros de distancia sin ninguna conexión con la misma, y de comandar sistemas de enorme potencia; una inmensa turbina hidráulica conectada por medio de cables de cientos de miles de kilómetros con un motor que responde a la potencia suministrada por la turbina —muchos miles de cables de derivación— 10 000 motores en 10 000 lugares diferentes poniendo en funcionamiento las máquinas de la industria y del hogar; y todo ello debido al conocimiento de las leyes del electromagnetismo.

Hoy en día estamos aplicando efectos cada vez más sutiles. Las fuerzas eléctricas, enormes como son, pueden también ser muy pequeñas, y las podemos controlar y utilizar en miles de formas. Nuestros instrumentos son tan sensibles que podemos decir lo que está haciendo un hombre a varios cientos de kilómetros de distancia a través de los efectos que él produzca sobre los electrones de una pequeña varilla de metal. ¡Todo lo que necesitamos es hacer actuar la varilla como antena para un receptor de televisión!

Una larga mirada a la historia de la humanidad —una vista, digamos, desde hace 10 000 años— mostrará, sin lugar a dudas, que el descubrimiento de Maxwell de las leyes de la electrodinámica es el hecho más significativo del siglo XIX. La Guerra Civil norteamericana sería un hecho provinciano insignificante si la comparamos con este importante evento científico de la misma década.

2

Cálculo diferencial de campos vectoriales

2-1 Comprendiendo la física

2-2 Los campos escalares y vectoriales —T y h—

2-3 Derivadas de los campos —el gradiente—

2-4 El operador ∇

2-5 Operaciones con ∇

2-6 La ecuación diferencial de la propagación del calor

2-7 Las segundas derivadas de campos vectoriales

2-8 Peligros

2-1 Comprendiendo la física

El físico necesita herramientas para examinar los problemas desde varios puntos de vista. El análisis exacto de los problemas reales es comúnmente muy complicado, y toda situación física particular puede ser muy complicada para ser analizada directamente al resolver una ecuación diferencial. Pero se puede dar una idea bastante avanzada del comportamiento de un sistema si se tiene algún conocimiento de las soluciones para diferentes casos. Conceptos tales como líneas de campo, capacitancia, resistencia e inductancia son muy útiles para muchos fines. Dedicaremos una parte del tiempo para su análisis. En esta forma, encontraremos cierto sentido a lo que sucede en diferentes situaciones electromagnéticas. Por otra parte, algunos modelos heurísticos, tales como las líneas de campo, no son realmente adecuados y precisos para todos los casos. Existe una sola manera de presentar las leyes en forma precisa, y es por medio de las ecuaciones diferenciales. Tienen la ventaja de ser fundamentales y, hasta donde sabemos, precisas. Si han aprendido las ecuaciones diferenciales siempre pueden volver a ellas. No hay nada que perder.

Les tomará cierto tiempo comprender qué es lo que sucede en diferentes circunstancias. Podrán resolver las ecuaciones. Cada vez que resuelvan las ecuaciones aprenderán algo sobre las características de las soluciones. Para recordar estas soluciones, les será útil estudiar su significado en términos de líneas de campo y de otros conceptos. En esta forma realmente "comprenderán" las ecuaciones. Ésa es la diferencia entre la matemática y la física. Los matemáticos, o la gente que piensa muy matemáticamente, se extravían cuando "estudian" física, porque pierden de vista la física. Dicen: "Miren, esas ecuaciones diferenciales —las ecuaciones de Maxwell— es toda la electrodinámica; los físicos admiten que no hay nada que no esté contenido en estas ecuaciones. Estas ecuaciones son complicadas, pero después de todo, no son más que ecuaciones matemáticas y si las comprendemos matemáticamente en todas sus partes, podremos conocer la física en todos los casos". Solamente que éste no es el camino correcto. Los matemáticos que estudian la física desde este punto de vista —y ha habido muchos— hacen muy pequeña contribución a la física y, de hecho, también muy pequeña a la matemática. Se equivocan porque las situaciones físicas reales del mundo real son complicadas y es necesario un conocimiento muy amplio de las ecuaciones.

Revisar
Volumen I, capítulo 11,
Vectores

Lo que se entiende realmente por comprender las ecuaciones, es decir, más que en un sentido estrictamente matemático, fue descrito por Dirac. Él dijo: "Yo comprendo qué significa una ecuación si tengo el medio de representarme las características de las soluciones sin realmente resolver la ecuación". Así, si tenemos el medio de conocer qué está realmente sucediendo en una circunstancia dada sin resolver efectivamente las ecuaciones, entonces habremos comprendido las ecuaciones, aplicadas a esa circunstancia particular. La comprensión física es una cosa que no es algo matemático, impreciso e inexacto, pero es absolutamente necesario para los físicos.

Habitualmente, un curso como éste se da desarrollando gradualmente las ideas físicas —partiendo de situaciones simples y yendo hacia situaciones cada vez más complicadas—. Esto lleva a que continuamente se olviden cuestiones aprendidas previamente —cosas que son válidas en ciertas situaciones, pero que no lo son en general—. Por ejemplo, la "ley" de que la fuerza eléctrica depende del cuadrado de la distancia no es *siempre* válida. Preferimos seguir el camino

opuesto. Preferimos tomar primero la ley *completa*, y luego retornar y aplicarla a las situaciones simples, desarrollando en el camino los conceptos físicos. Y es esto lo que haremos en adelante.

Nuestro enfoque es completamente opuesto al enfoque histórico en el cual se desarrolla el tema en función de los experimentos que permitieron obtener la información. Pero la física ha sido desarrollada por personas muy ingeniosas durante los últimos 200 años, y como tenemos solamente un tiempo limitado para adquirir nuestros conocimientos, no tenemos la posibilidad de cubrir todo lo realizado. Desafortunadamente una de las cosas que en estos cursos tendremos tendencia a perder es el desarrollo histórico de los experimentos. Esperamos que puedan cubrir estas lagunas en el laboratorio. Podrán completar lo que estamos obligados a dejar de lado leyendo la enciclopedia Británica, que tiene artículos históricos excelentes sobre electricidad y sobre otros temas de física. Podrán encontrar información histórica en muchos textos sobre la electricidad y el magnetismo.

2-2 Los campos escalares y vectoriales —T y h—

Comenzaremos ahora a tratar la teoría de la electricidad y el magnetismo desde un punto de vista abstracto y matemático. La idea final es la de explicar el sentido de las leyes enunciadas en el capítulo 1. Para hacerlo, debemos primeramente explicar una nueva notación especial que vamos a utilizar. Olvidemos por el momento el electromagnetismo y discutamos las propiedades matemáticas de los campos vectoriales. Esto es de suma importancia, no solamente para el electromagnetismo, sino para todo el dominio de la física. Tanto como el cálculo diferencial e integral común, el cálculo diferencial vectorial es muy importante para todas las ramas de la física. Abordemos este tema.

Damos a continuación algunos resultados del álgebra vectorial. Se supone que ya los conocen.

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \text{escalar} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \text{vector} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_z &= A_xB_y - A_yB_x\\ (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_x &= A_yB_z - A_zB_y\\ (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_y &= A_zB_x - A_xB_z\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A} = 0 \tag{2.3}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = 0 \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) \tag{2.6}$$

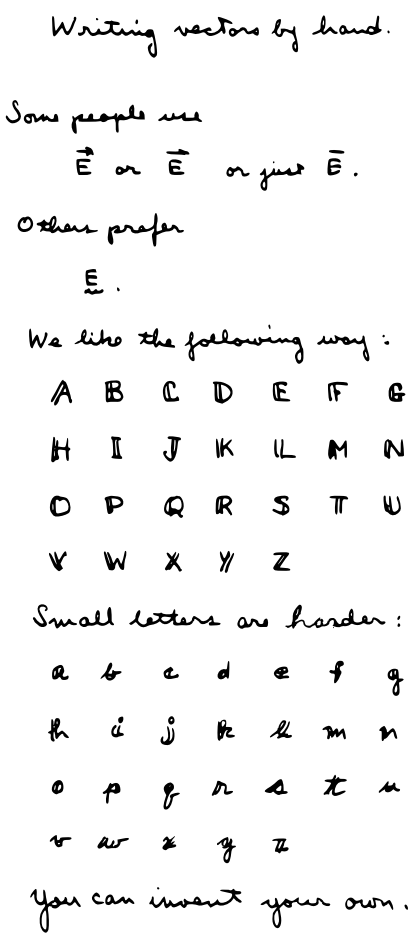
Utilizaremos también las dos igualdades siguientes del cálculo diferencial:

$$\Delta f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\Delta z, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}. \tag{2.8}$$

La primera ecuación (2.7) es, por supuesto, válida únicamente cuando Δx, Δy, y Δz tienden a cero.

El campo físico más simple es el campo escalar. Por campo, recordarán, entendemos una magnitud que depende de la posición en el espacio. Por *campo escalar* designaremos simplemente un campo que esté caracterizado en cada uno de esos puntos por un solo número —un escalar—. Por supuesto, este número puede variar con el tiempo, pero no necesitamos preocuparnos de esto por el



* "Para escribir vectores a mano / Algunos utilizan / O bien prefieren / Nosotros preferimos el modo siguiente / Las letras minúsculas son más difíciles / Puedes inventar lo que te plazca" [E.]

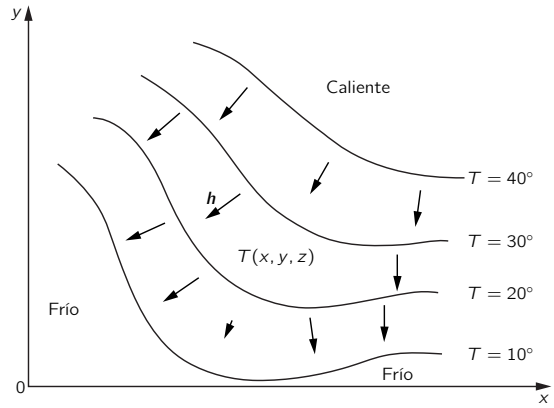


Figura 2-1. La temperatura T es un ejemplo de campo escalar. A cada punto (x, y, z) del espacio se le asocia un número $T(x, y, z)$. Todos los puntos de la superficie marcada $T = 20°$ (representada por una curva para $z = 0$) están a la misma temperatura. Las flechas indican el vector flujo de calor $\boldsymbol{h}$.

momento. Hablaremos de las características de un campo en un instante dado. Como ejemplo de campo escalar, consideremos un bloque sólido de material que ha sido calentado en un cierto punto y enfriado en otro, de modo que la temperatura varíe de un punto a otro en un modo complicado. La temperatura será ahora una función de x, y y z, coordenadas de posición en el espacio, medidas en un sistema de coordenadas cartesianas. La temperatura es un campo escalar.

Una manera de pensar en los campos escalares es la de imaginarnos "contornos" que son superficies imaginarias que pasan por todos los puntos en los cuales el campo toma el mismo valor, de este modo, como en un mapa las líneas de nivel unen todos los puntos que tienen la misma altitud. En el caso de un campo de temperaturas los contornos se llaman "superficies isotérmicas" o isotermas. La figura 2-1 ilustra un campo de temperaturas y muestra cómo varía T en función de x y y cuando $z = 0$. Se han dibujado varias isotermas.

Existen también campos vectoriales. El concepto es muy simple. Se da un vector para cada punto del espacio. El vector varía de un punto a otro. Como ejemplo consideremos un cuerpo en rotación. La velocidad del material que constituye el cuerpo en todo punto es un vector que es función de la posición del punto (figura 2-2). Como segundo ejemplo, consideremos el flujo de calor en un bloque de material. Si la temperatura en el bloque es alta en un punto y baja en otro, hay propagación de calor desde el punto caliente hacia el frío. Así, el calor puede fluir en diferentes direcciones en las distintas partes del bloque. El flujo de calor es una magnitud direccional que llamaremos $\boldsymbol{n}$. Su módulo mide la cantidad de calor que fluye. Ejemplos del vector flujo de calor también están indicados en la figura 2-1.

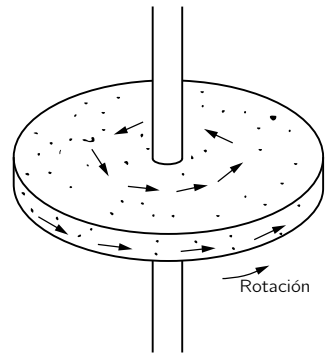


Figura 2-2. Un ejemplo de un campo vectorial es la velocidad de los átomos de un cuerpo en rotación.

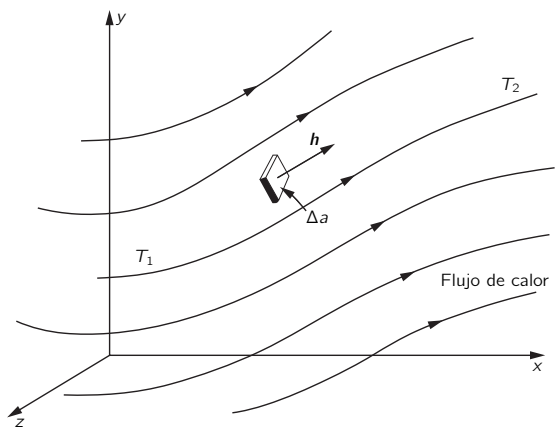


Figura 2-3. El flujo de calor es un campo vectorial. El vector $\boldsymbol{h}$ está orientado en el sentido del flujo. Su intensidad representa la energía que atraviesa por unidad de tiempo un elemento de superficie orientado perpendicularmente al flujo, y dividido entre el área del elemento de superficie.

Demos una definición más precisa de $\boldsymbol{h}$: el módulo del vector flujo de calor en un punto es la cantidad de energía térmica que atraviesa por unidad de tiempo y de superficie, una parte de superficie infinitesimal ortogonal a la dirección de propagación. El vector está orientado en el sentido de la propagación (véase la figura 2-3). Simbólicamente: si ΔJ es la energía térmica que atraviesa por unidad de tiempo el elemento de superficie Δa, se tiene

$$\boldsymbol{h} = \frac{\Delta J}{\Delta a}\,\boldsymbol{e}_f, \tag{2.9}$$

donde $\boldsymbol{e}_f$ es un *vector unitario* en la dirección del flujo.

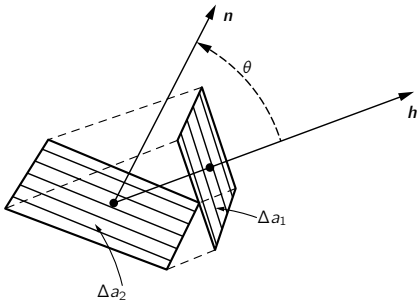


Figura 2-4. El flujo de calor a través de Δa_2 es el mismo que a través de Δa_1.

El vector $\boldsymbol{h}$ se puede definir de otra manera, en función de sus componentes. Nos preguntamos qué cantidad de calor atraviesa una pequeña superficie que forma un ángulo *cualquiera* con la dirección de propagación. Sobre la figura 2-4 hemos indicado una pequeña superficie Δa_2 inclinada en relación a la superficie Δa_1 que es perpendicular a la dirección de propagación. El *vector unitario* $\boldsymbol{n}$ es normal a la superficie Δa_2. El ángulo θ entre $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{h}$ es el mismo que entre las superficies (ya que $\boldsymbol{h}$ es normal a Δa_1). ¿Cuál es ahora el flujo de calor *por unidad de área* a través de Δa_2? El flujo a través de Δa_2 es el mismo que a través de Δa_1; solamente el área es diferente. En efecto, $\Delta a_1 = \Delta a_2 \cos\theta$. El flujo de calor a través de Δa_2 es:

$$\frac{\Delta J}{\Delta a_2} = \frac{\Delta J}{\Delta a_1}\cos\theta = \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}. \tag{2.10}$$

Interpretemos esta ecuación: el flujo de calor (por unidad de tiempo y de superficie) a través de *cualquier* elemento de superficie cuyo vector normal es $\boldsymbol{n}$, está dado por $\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}$. Podremos decir igualmente: la componente del vector de flujo de calor perpendicular al elemento de superficie Δa_2 es $\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}$. De esta manera, si lo deseamos, considerar que de este modo tenemos *definido* a $\boldsymbol{h}$. Podemos aplicar los mismos conceptos a otros campos vectoriales.

2-3 Derivadas de los campos —el gradiente—

Cuando los campos varían en el tiempo, podemos describir la variación tomando sus derivadas respecto a t. Podemos describir la variación respecto a la posición en una forma similar, porque nos interesa conocer, digamos, la relación entre la temperatura en un punto y en un punto vecino. ¿Cómo hacemos para hallar la derivada de la temperatura respecto a la posición? ¿Cómo derivamos la temperatura respecto a x? ¿O respecto a y, o z?

Las leyes útiles de la física son las que no dependen de la orientación del sistema de coordenadas. Deberán ser escritas en forma tal que los dos miembros sean o escalares o vectores. ¿Qué es la derivada de un campo escalar, digamos $\partial T/\partial x$? ¿Es un escalar, o un vector, o qué? No es ni un escalar ni un vector como lo podrán comprobar fácilmente, porque si tomamos un eje x diferente, $\partial T/\partial x$ tomará ciertamente un valor diferente. Pero atención, tenemos tres derivadas posibles: $\partial T/\partial x$, $\partial T/\partial y$ y $\partial T/\partial z$. Ya que hay tres clases de derivadas y que se necesitan tres números para formar un vector, quizá estas tres derivadas sean las componentes de un vector:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right) \stackrel{?}{=} \text{un vector.} \tag{2.11}$$

Por supuesto, no es generalmente verdadero que tres números *cualesquiera* constituyan un vector. Esto es cierto solamente si, al rotar el sistema de coordenadas, las componentes del vector se transforman entre ellas en la forma correcta. Entonces es necesario analizar cómo se transforman esas derivadas frente a una rotación del sistema de coordenadas. Demostraremos que (2.11) es efectivamente un vector. Las derivadas se transforman en la forma correcta cuando se rota el sistema de coordenadas.

Podemos ver esto de varias maneras. Una de ellas es hacer una pregunta en la que la respuesta sea independiente del sistema de coordenadas, y tratar de

expresar esta respuesta en una forma "invariante". Por ejemplo, si $S = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ y si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son vectores, sabemos —porque lo hemos demostrado en el capítulo 11 del volumen I— que S es un escalar. *Sabemos* que S es un escalar sin investigar si se modifica frente a un cambio del sistema de coordenadas. *No puede* cambiar porque es el producto escalar de dos vectores. Análogamente, si tenemos tres números B_1, B_2 y B_3 y descubrimos que para *cada* vector $\boldsymbol{A}$ hemos demostrado que:

$$A_x B_1 + A_y B_2 + A_z B_3 = S, \tag{2.12}$$

donde S tiene el mismo valor para todo sistema de coordenadas, *podemos* decir ahora que los tres números B_1, B_2 y B_3 deben ser las componentes B_x, B_y y B_z de un cierto vector $\boldsymbol{B}$.

Consideremos el campo de temperaturas. Supongan que tomemos dos puntos P_1 y P_2, separados por un pequeño intervalo $\Delta\boldsymbol{R}$. La temperatura en P_1 es T_1 y T_2 en P_2, y la diferencia $\Delta T = T_2 - T_1$. Las temperaturas en estos puntos físicos reales, no dependen de los ejes que tomemos para medir las coordenadas. En particular, ΔT es un número independiente del sistema de coordenadas. Es un escalar.

Si tomamos un sistema de ejes conveniente, podremos escribir $T_1 = T(x, y, z)$ y $T_2 = T(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$, donde Δx, Δy y Δz son las componentes del vector $\Delta\boldsymbol{R}$ (figura 2-5). Recordando la ecuación (2.7), podemos escribir:

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial T}{\partial y}\,\Delta y + \frac{\partial T}{\partial z}\,\Delta z. \tag{2.13}$$

El primer miembro de la ecuación (2.13) es un escalar. El segundo miembro es la suma de tres productos con Δx, Δy y Δz, que son las componentes de un vector. Por consiguiente, los tres números

$$\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$$

son entonces las componentes x, y y z de un vector. Escribiremos este nuevo vector con el símbolo $\boldsymbol{\nabla} T$. El símbolo $\boldsymbol{\nabla}$ (llamada "nabla") es una Δ invertida, y se supone que nos hace recordar la derivación. La gente lee $\boldsymbol{\nabla} T$ de varias maneras: "nabla T", o "gradiente de T", o "grad T",*

$$\operatorname{grad} T = \boldsymbol{\nabla} T = \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}\right). \tag{2.14}$$

Usando esta notación, podemos rescribir la ecuación (2.13) en la forma más compacta:

$$\Delta T = \boldsymbol{\nabla} T \cdot \Delta\boldsymbol{R}. \tag{2.15}$$

En palabras, esta ecuación indica que la diferencia de temperaturas entre dos puntos vecinos es el producto punto del gradiente de T por el vector desplazamiento entre los puntos. La forma de la ecuación (2.15) ilustra de una manera clara la prueba dada de que $\boldsymbol{\nabla} T$ es un vector.

¿Quizá no estén convencidos? Demostrémoslo en una forma diferente (¡aunque si miran cuidadosamente podrán ver que en realidad es la misma demostración, bajo una forma más platicada!). Podemos demostrar que las componentes de $\boldsymbol{\nabla} T$ se transforman del mismo modo que las componentes de $\boldsymbol{R}$. Si esto es así, $\boldsymbol{\nabla} T$ es un vector de acuerdo con la definición de vector que hemos dado en el capítulo 11 del volumen I. Tomemos un nuevo sistema de ejes x', y', z', y en este nuevo sistema calculemos $\partial T/\partial x'$, $\partial T/\partial y'$ y $\partial T/\partial z'$. Para hacer las cosas un poco más simples pongamos $z = z'$, de manera que podamos olvidarnos de la coordenada z (ustedes pueden tratar de resolver el caso más general).

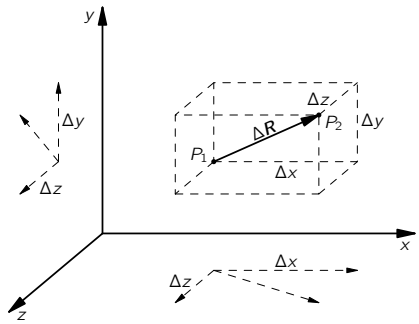


Figura 2-5. El vector $\Delta\boldsymbol{R}$, que tiene por componentes Δx, Δy y Δz.

* En nuestra notación, la expresión (a, b, c) representa un vector de componentes a, b y c. Si prefieren usar los vectores unitarios $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{k}$, pueden escribir:

$$\boldsymbol{\nabla} T = \boldsymbol{i}\frac{\partial T}{\partial x} + \boldsymbol{j}\frac{\partial T}{\partial y} + \boldsymbol{k}\frac{\partial T}{\partial z}.$$

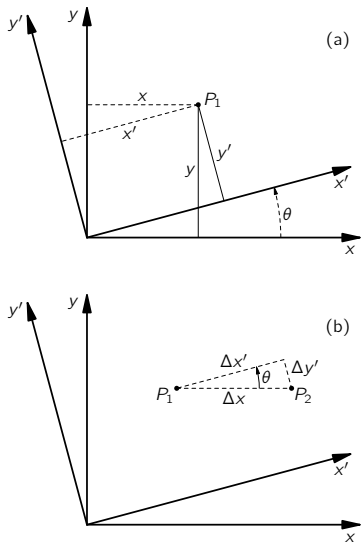


Figura 2-6. (a) Transformación a un sistema de coordenadas rotado. (b) Es un caso particular de un intervalo $\Delta \boldsymbol{R}$ paralelo al eje x.

Tomemos un sistema x', y' rotado un ángulo θ respecto al sistema x, y, como en la figura 2-6(a). Para un punto (x, y) las coordenadas en el primer sistema son:

$$x' = \quad x\cos\theta + y\,\mathrm{sen}\,\theta, \tag{2.16}$$

$$y' = -x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta. \tag{2.17}$$

o despejando x y y,

$$x = x'\cos\theta - y'\,\mathrm{sen}\,\theta, \tag{2.18}$$

$$y = x'\,\mathrm{sen}\,\theta + y'\cos\theta. \tag{2.19}$$

Si un par cualquiera de números se transforma según estas ecuaciones del mismo modo que x y y, estos números son los componentes de un vector.

Veamos ahora la diferencia de temperaturas entre dos puntos vecinos P_1 y P_2 tomados como en la figura 2-6(b). Si calculamos con el sistema de coordenadas x, y, podremos escribir:

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x}\,\Delta x \tag{2.20}$$

—puesto que Δy es cero—.

¿Qué cálculo daría en el sistema principal? Nosotros tendríamos que escribir:

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'}\,\Delta x' + \frac{\partial T}{\partial y'}\,\Delta y'. \tag{2.21}$$

Si observamos la figura 2-6(b), nosotros vemos que:

$$\Delta x' = \quad \Delta x\cos\theta \tag{2.22}$$

y

$$\Delta y' = -\Delta x\,\mathrm{sen}\,\theta, \tag{2.23}$$

puesto que $\Delta y'$ es negativo cuando Δx es positivo. Sustituyendo esto en la ecuación (2.21), encontramos que:

$$\Delta T = \frac{\partial T}{\partial x'}\,\Delta x\cos\theta - \frac{\partial T}{\partial y'}\,\Delta x\,\mathrm{sen}\,\theta \tag{2.24}$$

$$= \left(\frac{\partial T}{\partial x'}\cos\theta - \frac{\partial T}{\partial y'}\,\mathrm{sen}\,\theta\right)\Delta x. \tag{2.25}$$

Comparando la ecuación (2.25) con la (2.20), vemos que:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial x'}\cos\theta - \frac{\partial T}{\partial y'}\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{2.26}$$

Esta ecuación dice que $\partial T/\partial x$ se obtiene a partir de $\partial T/\partial x'$ y de $\partial T/\partial y'$, tal como se obtiene x de x' y y' en la ecuación (2.18). Así, $\partial T/\partial x$ es la componente x de un vector. La misma clase de razonamiento puede utilizarse para demostrar que $\partial T/\partial y$ y $\partial T/\partial z$ son las componentes y y z. Entonces $\boldsymbol{\nabla} T$ es definitivamente un vector. Es un campo vectorial derivado de un campo escalar T.

2-4 El operador $\boldsymbol{\nabla}$

Haremos ahora algo muy sorprendente e ingenioso —y característico de las cosas que hacen que la matemática sea hermosa—. El razonamiento hecho para demostrar que grad T o $\boldsymbol{\nabla} T$ es un vector, no depende en *qué* campo escalar derivemos. Todos los razonamientos serán los mismos si remplazamos T por un *campo escalar cualquiera*. Como las ecuaciones de transformación son las mismas para todo lo que derivemos, podríamos entonces omitir T y remplazar la ecuación (2.26) por la ecuación operacional:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x'}\cos\theta - \frac{\partial}{\partial y'}\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{2.27}$$

Dejamos los operadores, como decía Jeans, "hambrientos de algo para derivar".

Como los operadores diferenciales se transforman como las componentes de un vector, estamos autorizados para llamarlas componentes de un *operador vectorial*. Así, podemos escribir:

$$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), \tag{2.28}$$

que significa, por supuesto,

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}. \tag{2.29}$$

Nosotros hemos separado la operación gradiente del escalar T —y esta idea es extraordinaria—.

Deberán recordar en todo momento que, por supuesto, $\boldsymbol{\nabla}$ es un operador. Solo no significa nada. Si $\boldsymbol{\nabla}$ por sí solo no significa nada, ¿qué sentido tiene entonces que nosotros lo multipliquemos por un escalar —digamos T— para obtener el producto $T\boldsymbol{\nabla}$? (Siempre se puede multiplicar un vector por un escalar.) Esto no significa nada. Su componente x es:

$$T\frac{\partial}{\partial x}, \tag{2.30}$$

que no es un número, sino todavía un cierto operador. Por otra parte, y de acuerdo con el álgebra vectorial, deberíamos llamar vector a $T\boldsymbol{\nabla}$.

Multipliquemos ahora $\boldsymbol{\nabla}$ por un escalar pero por el otro costado, de tal manera que tengamos el producto $(\boldsymbol{\nabla}T)$. En el álgebra ordinaria tenemos lo siguiente:

$$T\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}T, \tag{2.31}$$

pero debemos recordar que el álgebra de los operadores es un poco diferente del álgebra vectorial ordinaria. Con los operadores debemos siempre conservar el orden correcto, de tal manera que las operaciones tengan realmente sentido. No tendrán ninguna dificultad si recuerdan simplemente que el operador $\boldsymbol{\nabla}$ obedece a las mismas convenciones que la notación diferencial. Lo que debe ser derivado debe colocarse a la derecha de $\boldsymbol{\nabla}$. El orden es importante.

Tomando en cuenta estas razones, entendemos por qué $T\boldsymbol{\nabla}$ es un operador, pero el producto $\boldsymbol{\nabla}T$ no es un operador hambriento; el operador está completamente satisfecho. Es por cierto un vector físico que tiene un sentido. Representa el grado de variación espacial de T. La componente x de $\boldsymbol{\nabla}T$ indica qué tan rápido varía T en la dirección de x. ¿Cuál es la dirección del vector $\boldsymbol{\nabla}T$? Sabemos que la derivada de T en una dirección cualquiera es la componente de $\boldsymbol{\nabla}T$ en esta dirección (véase la ecuación 2.15). Por consiguiente, la dirección de $\boldsymbol{\nabla}T$ es aquella en que puede tomar el mayor valor posible —en otras palabras, la dirección en que T varía más rápidamente—. El gradiente de T tiene la dirección de la pendiente más abrupta (en T).

2-5 Operaciones con $\boldsymbol{\nabla}$

¿Podemos efectuar otras operaciones algebraicas con el operador $\boldsymbol{\nabla}$? Ensayemos utilizarlo con un vector. Podemos combinar dos vectores a fin de obtener un producto escalar. Podremos efectuar el producto

$$(\text{un vector}) \cdot \boldsymbol{\nabla}, \qquad \text{o} \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot (\text{un vector}).$$

El primero todavía no significa nada, ya que es un operador. Lo que nos pueda decir finalmente dependerá de aquello sobre lo cual vaya a operar. Ahora bien, el segundo producto es cierto campo escalar ($\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ es siempre un escalar).

Ensayemos el producto escalar de $\boldsymbol{\nabla}$ con un campo vectorial que conozcamos, por ejemplo $\boldsymbol{h}$. Escribamos las componentes:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h} = \nabla_x h_x + \nabla_y h_y + \nabla_z h_z \tag{2.32}$$

o sea

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h} = \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z}. \tag{2.33}$$

La suma es invariante frente a una transformación de coordenadas. Si debemos tomar un sistema diferente (indicado por las primas), tendremos*

$$\boldsymbol{\nabla}' \cdot \boldsymbol{h} = \frac{\partial h_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial h_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial h_{z'}}{\partial z'}, \tag{2.34}$$

que es el *mismo* número que obtendríamos a partir de la ecuación (2.33), aunque parezca diferente. Es decir,

$$\boldsymbol{\nabla}' \cdot \boldsymbol{h} = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h} \tag{2.35}$$

para todo punto del espacio. Así pues, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h}$ es un campo escalar que puede representar cierta magnitud física. Deberán tener en cuenta que la combinación de las derivadas en $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h}$ es algo especial. Existen toda clase de combinaciones diferentes tales como $\partial h_y/\partial x$, y que no son ni escalares ni componentes de un vector.

La cantidad escalar $\boldsymbol{\nabla}\cdot$ (un vector) es sumamente útil en física. Se le ha dado el nombre de *divergencia*. Por ejemplo,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h} = \operatorname{div} \boldsymbol{h} = \text{“divergencia de } \boldsymbol{h}\text{”}. \tag{2.36}$$

Como hemos hecho para $\boldsymbol{\nabla} T$, podemos atribuir un significado físico a $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h}$. Deberemos, sin embargo, posponerlo para más adelante.

Primero, deseamos ver qué otras cosas podemos hacer con el operador rotacional $\boldsymbol{\nabla}$. ¿Y si hacemos el producto vectorial? Debemos esperar que:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{h} = \text{un vector}. \tag{2.37}$$

Éste es un vector cuyas componentes podemos escribir de acuerdo con las reglas usuales del producto vectorial (véase la ecuación 2.2):

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{h})_z = \nabla_x h_y - \nabla_y h_x = \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y}. \tag{2.38}$$

Análogamente,

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{h})_x = \nabla_y h_z - \nabla_z h_y = \frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial h_y}{\partial z} \tag{2.39}$$

y

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{h})_y = \nabla_z h_x - \nabla_x h_z = \frac{\partial h_x}{\partial z} - \frac{\partial h_z}{\partial x}. \tag{2.40}$$

La combinación $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{h}$ se llama *“curl* de $\boldsymbol{h}$”. Discutiremos más adelante la razón de este nombre y su sentido físico. Resumiendo, podemos tener tres clases de combinaciones con $\boldsymbol{\nabla}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} T &= \operatorname{grad} T = \text{ un vector}, \\ \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h} &= \operatorname{div} \boldsymbol{h} = \text{un escalar}, \\ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{h} &= \operatorname{rot} \boldsymbol{h} = \text{un vector}. \end{aligned}$$

Usando estas combinaciones, podemos escribir sobre las variaciones espaciales de los campos de una manera conveniente; de una manera general, ya que no depende de ningún conjunto particular de ejes.

Como ejemplo del uso del operador diferencial vectorial $\boldsymbol{\nabla}$, escribiremos un sistema de ecuaciones vectoriales que contiene las mismas leyes del electromagnetismo que nosotros hemos enunciado en palabras en el capítulo 1. Son las llamadas ecuaciones de Maxwell.

* Concebimos $\boldsymbol{h}$ como una cantidad *física* que depende de la posición en el espacio, y no estrictamente como una función matemática de tres variables. Cuando se “deriva” $\boldsymbol{h}$ respecto a x, y y z o respecto a x', y' y z', la expresión matemática para $\boldsymbol{h}$ debe expresarse primero en función de las variables apropiadas.

Ecuaciones de Maxwell

$$
\begin{aligned}
&(1) \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\\
&(2) \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\\
&(3) \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0\\
&(4) \quad c^2\,\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0}
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

donde ρ (rho), la "densidad de carga eléctrica", es la carga por la unidad de volumen, y $\boldsymbol{j}$, la "densidad de corriente eléctrica", es la carga que circula a través de una superficie unitaria en un segundo. Estas cuatro ecuaciones resumen completamente la teoría clásica del campo electromagnético. ¡Pueden ver que con nuestra nueva dotación estas ecuaciones toman una forma elegantemente simple!

2-6 La ecuación diferencial de la propagación del calor

Demos otro ejemplo de ley física escrita en notación vectorial. No es ésta una ley exacta, pero para numerosos metales y para un gran número de otras sustancias conductoras del calor está bien verificada. Ustedes saben que si toman una placa de un material y calientan una de las caras a la temperatura T_2 y enfrían la otra a la temperatura T_1, el calor se propagará a través del material desde T_2 hasta T_1 [figura 2-7(a)]. El flujo de calor es proporcional al área A de las caras y a la diferencia de temperatura. También es inversamente proporcional a d la distancia entre las caras (para una diferencia de temperatura dada, mientras menor es el espesor de la placa, mayor es el flujo de calor). Si J es la energía térmica que atraviesa la placa por unidad de temperatura, escribiremos:

$$J = \kappa(T_2 - T_1)\,\frac{A}{d}. \tag{2.42}$$

La constante de proporcionalidad κ (kappa) se llama *conductividad térmica*.

¿Qué sucederá en un caso más complicado? ¿Por ejemplo en un bloque de material de forma extraña y en el cual la temperatura varíe de una manera rara? Supongan que examinamos un pedazo pequeño del bloque e imaginen una placa, tal como la de la figura 2-7(a), en tamaño miniatura. Orientemos las caras paralelamente a las superficies isotérmicas, como se indica en la figura 2-7(b), de tal modo que la ecuación (2.42) sea correcta para la pequeña placa.

Si el área de la placa pequeña es ΔA, el flujo de calor por unidad de tiempo es:

$$\Delta J = \kappa\,\Delta T\,\frac{\Delta A}{\Delta s}, \tag{2.43}$$

donde Δs es el espesor de la placa. Ahora bien, hemos definido anteriormente $\Delta J/\Delta A$ como el módulo de $\boldsymbol{h}$, cuya dirección es la del flujo de calor. El flujo de calor será desde $T_1 + \Delta T$ hacia T_1, y será perpendicular a las isotermas, como está dibujado en la figura 2-7(b). Además, $\Delta T/\Delta s$ es precisamente la rapidez de variación de T con la posición. Y como la variación de la posición es perpendicular a las isotermas, nuestro $\Delta T/\Delta s$ es la rapidez de variación máxima. Éste es, entonces, el módulo de $\boldsymbol{\nabla}T$. Como el sentido de $\boldsymbol{\nabla}T$ es opuesto al de $\boldsymbol{h}$, podemos escribir (2.43) como una ecuación vectorial

$$\boldsymbol{h} = -\kappa\,\boldsymbol{\nabla}T. \tag{2.44}$$

(El signo menos es necesario dado que el calor fluye hacia temperaturas "más bajas".) La ecuación (2.44) es la ecuación diferencial de la conducción del calor en los materiales. Ustedes ven que es una verdadera ecuación vectorial. Si κ es un número, ambos miembros de la ecuación son vectores. Ésta es la generalización para un caso arbitrario de la ecuación particular (2.42) para placas rectangulares. Aprenderemos más adelante a escribir toda clase de relaciones físicas elementales

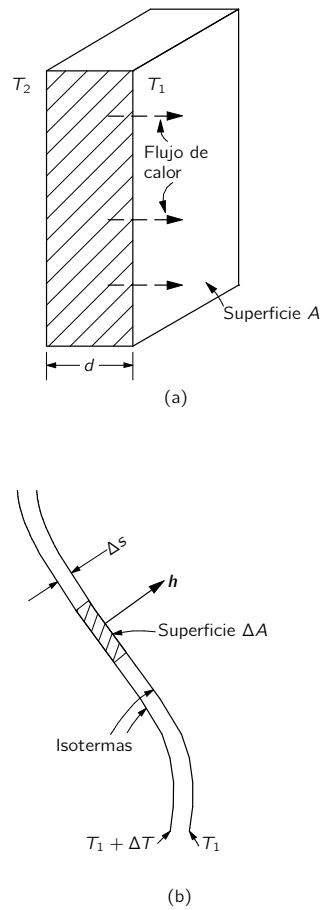


Figura 2-7. (a) Flujo de calor a través de una placa. (b) Una superficie isotérmica en un bloque paralela a placa infinitesimal.

tales como la (2.42) en una forma vectorial más elegante. Esta notación no es solamente útil porque presenta las ecuaciones bajo una *apariencia* más simple. Permite mostrar claramente el *contenido físico* de las ecuaciones sin referirse a ningún sistema de coordenadas tomado arbitrariamente.

2-7 Las segundas derivadas de campos vectoriales

Hasta el presente solamente hemos tomado las derivadas. ¿Por qué no considerar las segundas derivadas? Podemos obtener varias combinaciones:

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}T)\\ &\text{(b)} \quad \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}T)\\ &\text{(c)} \quad \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{h})\\ &\text{(d)} \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{h})\\ &\text{(e)} \quad \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{h}) \end{aligned} \tag{2.45}$$

Pueden verificar que son éstas todas las combinaciones posibles.

Consideremos primero la segunda, (b). Es de la misma manera que,

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{A}T)=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A})T=0,$$

ya que $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}$ es siempre cero. Entonces debemos tener:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad}T)=\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}T)=0. \tag{2.46}$$

Podemos ver cómo se obtiene esta ecuación si utilizamos una vez las componentes:

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}T)]_z &= \nabla_x(\boldsymbol{\nabla}T)_y-\nabla_y(\boldsymbol{\nabla}T)_x\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right), \end{aligned} \tag{2.47}$$

que es igual a cero (por la ecuación 2.8). Es lo mismo para las otras componentes. Así $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}T)=0$, para cualquier distribución de temperaturas; de hecho, para una función escalar *cualquiera*.

Tomemos otro ejemplo. Veamos si podemos encontrar alguna otra igual a cero. El producto escalar de un vector por un producto vectorial que contenga este vector, es nulo:

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=0, \tag{2.48}$$

porque $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ es perpendicular a $\boldsymbol{A}$, y por lo tanto no tiene componentes en la dirección de $\boldsymbol{A}$. La misma combinación aparece en (d) de la ecuación (2.45), y en consecuencia tenemos:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{h})=\operatorname{div}(\operatorname{rot}\boldsymbol{h})=0. \tag{2.49}$$

Es fácil demostrar que es cero realizando las operaciones con las componentes.

Enunciaremos ahora dos teoremas matemáticos que no demostraremos. Es muy útil e interesante para los físicos conocer estos teoremas. En un problema físico encontramos frecuentemente que el rotacional de una cierta cantidad —digamos del campo vectorial $\boldsymbol{A}$, por ejemplo— es cero. Hemos visto (ecuación 2.46) que el rotacional de un gradiente es cero, lo cual es fácil de recordar por la manera en que operan los vectores. Entonces, bien podemos decir que $\boldsymbol{A}$ es el gradiente de una cierta cantidad, ya que su rotacional es ahora necesariamente nulo. El teorema interesante es que si el rotacional de $\boldsymbol{A}$ es nulo, $\boldsymbol{A}$ es *siempre* el gradiente de *alguna cosa* —existe un cierto campo escalar ψ (psi) tal que $\boldsymbol{A}$ es igual a grad ψ—. En otras palabras, tenemos el:

TEOREMA:

$$\begin{aligned} &\text{Si} && \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}=0\\ &\text{existe un} && \psi\\ &\text{tal que} && \boldsymbol{A}=\boldsymbol{\nabla}\psi. \end{aligned} \tag{2.50}$$

Hay un teorema similar si la divergencia de $\boldsymbol{A}$ es cero. Hemos visto en la ecuación (2.49) que la divergencia de un rotacional de cualquier cosa es siempre cero. Si encuentran un campo vectorial $\boldsymbol{D}$ para el cual div $\boldsymbol{D}$ es cero, podrán concluir que $\boldsymbol{D}$ es el rotacional de un cierto campo vectorial $\boldsymbol{C}$.

Teorema:

$$\begin{aligned} &\text{Si} && \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D}=0\\ &\text{existe un} && \boldsymbol{C}\\ &\text{tal que} && \boldsymbol{D}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{C}. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Observando las posibles combinaciones de dos operadores $\boldsymbol{\nabla}$, hemos encontrado que dos de ellas dan siempre cero. Ahora examinemos las que *no* son cero. Tomemos la combinación $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}T)$, que es la primera de nuestra lista. En general, no es nula. Escribamos las componentes:

$$\boldsymbol{\nabla}T=\boldsymbol{i}\nabla_x T+\boldsymbol{j}\nabla_y T+\boldsymbol{k}\nabla_z T.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}T)&=\nabla_x(\nabla_x T)+\nabla_y(\nabla_y T)+\nabla_z(\nabla_z T)\\ &=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \end{aligned} \tag{2.52}$$

que, en general, debe ser igual a un cierto número. Es un campo escalar. Ustedes ven que no necesitamos usar paréntesis, sino que podemos escribir, sin ninguna clase de confusión,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}T)=\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}T=(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})T=\nabla^2 T. \tag{2.53}$$

Consideramos ∇^2 como un nuevo operador. Es un operador escalar. Dado que aparece en forma muy común en física, se le ha dado un nombre especial: el *laplaciano*.

$$\text{laplaciano}=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{2.54}$$

Como el laplaciano es un operador escalar, podemos operar con él sobre un vector; entendemos por esto, efectuar la misma operación sobre cada componente en coordenadas cartesianas:

$$\nabla^2\boldsymbol{h}=(\nabla^2 h_x,\nabla^2 h_y,\nabla^2 h_z).$$

Examinemos otra posibilidad: $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{h})$, que es la (e) en la lista (2.45). Ahora el rotacional del rotacional puede escribirse de manera diferente si usamos la igualdad vectorial (2.6):

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}). \tag{2.55}$$

Para utilizar esta fórmula, remplacemos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ por el operador $\boldsymbol{\nabla}$ y pongamos $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{h}$. Haciendo esto tenemos:

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{h})=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{h})-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})\ldots???$$

¡Un momento! Algo está mal. Los primeros dos términos son vectores (los operadores están satisfechos), pero el último término no nos dice nada, sigue siendo un operador. La dificultad proviene de que no hemos tenido suficiente cuidado en tomar los términos en el orden correcto. Sin embargo, si observan nuevamente la ecuación (2.55), verán que sería igualmente correcto escribir:

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}. \tag{2.56}$$

El orden de los términos parece mejor. Hagamos nuestra sustitución en (2.56). Nosotros obtenemos:

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{h})=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{h})-(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{h}. \tag{2.57}$$

Esta forma parece exacta. Es, de hecho, correcta, como pueden verificarlo calculando sus componentes. El último término es el laplaciano, por lo que podemos escribir de forma correcta:

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h}) - \nabla^2 \boldsymbol{h}. \tag{2.58}$$

Hemos tenido algo que decir respecto de todas las combinaciones de nuestra lista de dobles $\boldsymbol{\nabla}$ excepto para (c), $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h})$. Éste es posiblemente un campo vectorial, pero no hay nada en especial para decir respecto a él. Es un cierto campo vectorial que ocasionalmente puede aparecer. Será conveniente resumir en una tabla nuestras conclusiones:

$$\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} T) = \nabla^2 T = \text{un campo escalar} \\
&\text{(b)} \quad \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} T) = 0 \\
&\text{(c)} \quad \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h}) = \text{un campo vectorial} \\
&\text{(d)} \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{h}) = 0 \\
&\text{(e)} \quad \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{h}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h}) - \nabla^2 \boldsymbol{h} \\
&\text{(f)} \quad (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{h} = \nabla^2 \boldsymbol{h} = \text{un campo vectorial}
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Habrán notado que no hemos tratado de inventar un nuevo operador vectorial $(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla})$. ¿Ven la razón?

2-8 Peligros

Hemos aplicado nuestros conocimientos del álgebra vectorial ordinaria al álgebra del operador $\boldsymbol{\nabla}$. Debemos tener cuidado, porque podríamos tomar un camino equivocado. Existen dos peligros que debemos mencionar aunque no se presentarán durante este curso. ¿Qué pueden decir respecto a la siguiente expresión, en la que intervienen las dos funciones escalares ψ y ϕ (phi):

$$(\boldsymbol{\nabla}\psi) \times (\boldsymbol{\nabla}\phi)?$$

Podrían estar tentados a decir: debe ser cero puesto que es del tipo

$$(\boldsymbol{A}a) \times (\boldsymbol{A}b),$$

que es cero, ya que el producto vectorial de dos vectores *iguales* $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ es siempre cero. ¡Pero en nuestro ejemplo los dos operadores $\boldsymbol{\nabla}$ no son iguales! El primero opera sobre una función ψ, y el otro opera sobre una función ϕ diferente. Y si bien representamos a ambos con el mismo símbolo $\boldsymbol{\nabla}$ deben ser considerados como dos operadores diferentes. Claramente, la dirección de $\boldsymbol{\nabla}\psi$ depende de la función ψ, y no hay razón para que sea paralela a $\boldsymbol{\nabla}\phi$:

$$(\boldsymbol{\nabla}\psi) \times (\boldsymbol{\nabla}\phi) \neq 0 \quad \text{(generalmente)}.$$

Afortunadamente, no tendremos que utilizar tales expresiones (lo que hemos dicho no cambia el hecho de que $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\psi = 0$ para cualquier campo escalar, porque aquí los dos operadores $\boldsymbol{\nabla}$ actúan sobre la misma función). El peligro número dos (el cual no necesitamos profundizar en nuestro curso) es el siguiente: las reglas que hemos planteado aquí son simples y elegantes cuando las utilizamos en coordenadas cartesianas. Por ejemplo, si tenemos $\nabla^2 \boldsymbol{h}$ y hallamos la componente x, es:

$$(\nabla^2 \boldsymbol{h})_x = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) h_x = \nabla^2 h_x. \tag{2.60}$$

La misma expresión *no* será válida si pretendemos conocer la componente *radial* de $\nabla^2 \boldsymbol{h}$. La componente radial de $\nabla^2 \boldsymbol{h}$ no es igual a $\nabla^2 h_r$. La razón es que cuando estamos trabajando con el álgebra vectorial, las direcciones de los vectores están todas perfectamente definidas. Pero cuando estamos trabajando con campos vectoriales, las direcciones son diferentes en distintos lugares. Si tratamos de describir un campo vectorial en coordenadas polares, digamos, lo que nosotros

llamamos la dirección "radial" varía de punto a punto. En esta forma podemos tener muchas dificultades cuando pretendamos derivar las componentes. Por ejemplo, aun en el caso de un campo vectorial *constante*, la componente radial varía de punto en punto.

Por lo común lo más seguro y sencillo es utilizar coordenadas cartesianas para evitar dificultades, pero existe una excepción que vale la pena mencionar: como el laplaciano ∇^2 es un escalar, podemos escribirlo en cualquier sistema de coordenadas que deseemos (por ejemplo, en coordenadas polares). Pero como es un operador diferencial, lo debemos utilizar solamente con los vectores cuyas componentes tengan una dirección fija —es decir, coordenadas cartesianas—. Así, podremos expresar todos los campos vectoriales en términos de sus componentes x, y y z cuando escribamos nuestras ecuaciones vectoriales diferenciales en componentes.

3

Cálculo integral vectorial

3-1 Integrales vectoriales; la integral de línea de $\nabla\psi$

3-2 Flujo de un campo vectorial

3-3 El flujo saliente de un cubo; el teorema de Gauss

3-4 Conducción del calor; la ecuación de difusión

3-5 Circulación de un campo vectorial

3-6 Circulación a lo largo de un cuadrado; el teorema de Stokes

3-7 Campos de rotacional nulo y de divergencia nula

3-8 Resumen

3-1 Integrales vectoriales; la integral de línea de $\nabla\psi$

Vimos en el capítulo 2 que había varias maneras de obtener derivadas de campos. Unas nos daban campos vectoriales, otras daban campos escalares. Aunque hemos desarrollado diferentes fórmulas, todo el capítulo 2 se puede resumir en una sola regla: los operadores $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ y $\partial/\partial z$ son las tres componentes de un operador vectorial ∇. Queremos ahora entender el significado de las derivadas de los campos. Comprenderemos entonces mejor lo que representa una ecuación relativa a un campo vectorial.

Hemos discutido anteriormente el sentido de la operación gradiente (∇ actuando sobre un escalar). Ahora retornaremos sobre el significado de las operaciones divergencia y rotacional. Es mejor dar la interpretación de estas cantidades en términos de ciertas integrales vectoriales y ecuaciones que relacionen tales integrales. Estas ecuaciones no pueden, desafortunadamente, obtenerse del álgebra vectorial por una simple sustitución, por lo que deberán aprenderlas como algo nuevo. De estas fórmulas integrales, una es prácticamente trivial, pero no lo son las otras dos. Las demostraremos y explicaremos sus consecuencias. Las ecuaciones que vamos a estudiar son realmente teoremas matemáticos. Serán útiles no solamente para interpretar el sentido y el contenido de la divergencia y del rotor, sino también para desarrollar teorías físicas generales. Estos teoremas matemáticos son de tal importancia para la teoría de campos, como el teorema de la conservación de la energía lo es para la mecánica de las partículas. Los teoremas generales como éstos son importantes para una profunda comprensión de la física. Encontrarán, sin embargo, que no son muy útiles para la resolución de problemas —excepto en los casos más simples—. Es maravilloso pensar que en el comienzo de nuestro trabajo habrá numerosos problemas simples que podrán ser resueltos por medio de las tres fórmulas integrales que vamos a exponer. Veremos, sin embargo, que a medida que los problemas se tornen más complicados, no podremos utilizar más estos métodos simples.

Tratemos primero de abordar una fórmula integral en que intervenga el gradiente. La relación contiene una idea muy simple: como el gradiente representa el grado de variación de una magnitud del campo, si integramos este grado de variación, podremos obtener la variación total. Supongan que tenemos el campo escalar $\psi(x, y, z)$. En dos puntos cualesquiera (1) y (2) la función tendrá los valores $\psi(1)$ y $\psi(2)$, respectivamente. [Utilizamos una notación conveniente, en la cual (2) representa el punto (x_2, y_2, z_2) y $\psi(2)$ significa lo mismo que $\psi(x_2, y_2, z_2)$.] Si Γ (gamma) es cualquier curva que une (1) y (2), como en la figura 3-1, vale la siguiente relación:

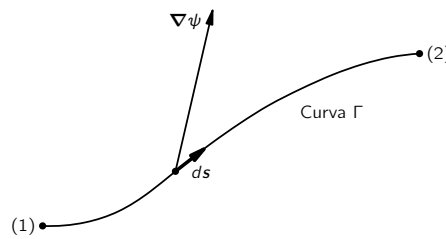


Figura 3-1. Los terminos utilizados en la Eq. (3.1). El vector $\nabla\psi$ se evalúa sobre el elemento de la curva $d\boldsymbol{s}$.

Teorema 1:

$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{\substack{(1)\\ \text{a lo largo de } \Gamma}}^{(2)} (\nabla\psi)\cdot d\boldsymbol{s}\,. \tag{3.1}$$

La integral es una *integral de línea*, desde (1) hasta (2) a lo largo de la curva Γ, del producto escalar de $\nabla\psi$ —un vector— por $d\boldsymbol{s}$ —otro vector, que es un elemento infinitesimal de la curva Γ [dirigido desde (1) hacia (2)]—.

Primeramente, recordemos el significado de integral de línea. Consideremos una función escalar $f(x, y, z)$, y la curva Γ que une los dos puntos (1) y (2). Marquemos sobre la curva diferentes puntos y unamos estos puntos por segmentos

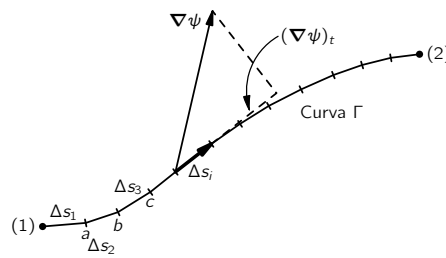


Figura 3-2. La integral de línea es el límite de una suma.

rectilíneos, como se muestra en la figura 3-2. Cada segmento tiene la longitud Δs_i, donde i es un índice que recorre $1, 2, 3, \ldots$ Por integral de línea

$$\int_{\substack{(1)\\ \text{a lo largo de } \Gamma}}^{(2)} f\, ds$$

entendemos el límite de la suma

$$\sum\nolimits_i f_i \Delta s_i,$$

donde f_i es el valor de la función en el i-ésimo segmento. El valor límite es aquel al que tiende la suma cuando aumentamos más y más el número de segmentos (de una forma razonable, de modo que mientras el número aumenta $\Delta s_i \to 0$).

La integral en nuestro teorema, ecuación (3.1), tiene el mismo significado, aunque esté escrita en forma diferente. En lugar de f, tenemos otro escalar —la componente de $\boldsymbol{\nabla}\psi$ en la dirección de Δs—. Si escribimos $(\boldsymbol{\nabla}\psi)_t$, es evidente que para esta componente tangencial resulteque

$$(\boldsymbol{\nabla}\psi)_t\, \Delta s = (\boldsymbol{\nabla}\psi) \cdot \Delta \boldsymbol{s}. \tag{3.2}$$

La integral de la ecuación (3.1) significa la suma de esos términos.

Veamos por qué la ecuación (3.1) es verdadera. En el capítulo 2 mostramos que la componente de $\boldsymbol{\nabla}\psi$ según un pequeño desplazamiento $\Delta \boldsymbol{R}$ era el grado de variación de ψ en la dirección de $\Delta \boldsymbol{R}$. Consideremos el segmento de línea Δs que va de (1) al punto a en la figura 3-2. De acuerdo con nuestra definición,

$$\Delta\psi_1 = \psi(a) - \psi(1) = (\boldsymbol{\nabla}\psi)_1 \cdot \Delta \boldsymbol{s}_1. \tag{3.3}$$

Además, tenemos

$$\psi(b) - \psi(a) = (\boldsymbol{\nabla}\psi)_2 \cdot \Delta \boldsymbol{s}_2, \tag{3.4}$$

donde, por supuesto, $(\boldsymbol{\nabla}\psi)_1$ significa el gradiente calculado sobre el segmento Δs_1 y $(\boldsymbol{\nabla}\psi)_2$ el gradiente calculado sobre Δs_2. Si sumamos las ecuaciones (3.3) y (3.4), obtenemos:

$$\psi(b) - \psi(1) = (\boldsymbol{\nabla}\psi)_1 \cdot \Delta \boldsymbol{s}_1 + (\boldsymbol{\nabla}\psi)_2 \cdot \Delta \boldsymbol{s}_2. \tag{3.5}$$

Pueden ver que si seguimos sumando esos términos de esta manera, resulta:

$$\psi(2) - \psi(1) = \sum\nolimits_i (\boldsymbol{\nabla}\psi)_i \cdot \Delta \boldsymbol{s}_i. \tag{3.6}$$

El primer miembro no depende de la forma en que hemos tomado nuestros intervalos —si (1) y (2) son siempre los mismos— de modo que podemos tomar el límite del segundo miembro. Hemos demostrado así la ecuación (3.1).

Habrán visto en nuestra demostración, que tal como la igualdad no depende de cómo tomemos los puntos $a, b, c, \ldots$, tampoco depende de la curva Γ que elijamos para unir (1) y (2). Nuestro teorema es cierto para cualquier curva entre (1) y (2). Una aclaración sobre la notación: habrán visto que no hay confusión si escribimos, por conveniencia,

$$(\boldsymbol{\nabla}\psi) \cdot d\boldsymbol{s} = \boldsymbol{\nabla}\psi \cdot d\boldsymbol{s}. \tag{3.7}$$

Con esta notación, nuestro teorema será:

Teorema 1:

$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{\substack{(1)\\ \text{cualquier curva de}\\ \text{(1) a (2)}}}^{(2)} \boldsymbol{\nabla}\psi \cdot d\boldsymbol{s}\,. \tag{3.8}$$

3-2 Flujo de un campo vectorial

Antes de considerar nuestro próximo teorema integral —un teorema relativo a la divergencia— deseamos considerar un concepto cuyo sentido físico es fácil de comprender en el caso de la propagación del calor. Hemos definido el vector $\boldsymbol{h}$, que representa el calor que fluye a través de un área unitaria y en la unidad de tiempo. Supongan que en el interior de un bloque de material tengamos una superficie cerrada S que encierra un volumen V (figura 3-3). Querríamos hallar la cantidad de calor que fluye de este *volumen*. Podemos, por supuesto, encontrarlo calculando el flujo total de calor que sale de la *superficie S*.

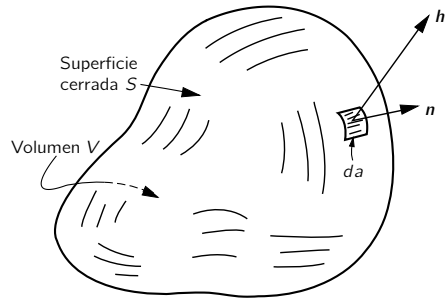


Figura 3-3. La superfice cerrada S define el volumen V. El vector $\boldsymbol{n}$ es la normal exterior al elemento de superficie da, y $\boldsymbol{h}$ es el vector flujo de calor sobre el elemento de superficie.

Llamemos da al área de un elemento de superficie. El símbolo representa un diferencial en dos dimensiones. Si, por ejemplo, la superficie se encuentra en el plano xy, tendremos:

$$da = dx\,dy.$$

Más adelante vamos a considerar integrales de volumen, por lo que es conveniente considerar un volumen diferencial, es decir, un pequeño cubo. Entonces cuando escribamos dV queremos decir,

$$dV = dx\,dy\,dz.$$

Algunos prefieren escribir d^2a en vez de da para recordar que es una cantidad de segundo orden. Escriben entonces d^3V en vez de dV. Nosotros utilizaremos la notación más simple, y consideraremos que pueden recordar que una superficie tiene dos dimensiones y un volumen, tres.

El flujo de calor saliente del elemento de superficie da es el producto de la superficie por la componente de $\boldsymbol{h}$ normal al elemento de superficie. Anteriormente habíamos definido a $\boldsymbol{n}$ como vector según la normal a la superficie, orientado con el sentido hacia el exterior de la misma (figura 3-3). La componente de $\boldsymbol{h}$ que necesitamos es:

$$h_n = \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n}. \tag{3.9}$$

El flujo de calor saliente a través de da es entonces

$$\boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n}\, da. \tag{3.10}$$

Para obtener la cantidad total de calor que fluye a través de una superficie cualquiera sumamos las contribuciones de todas las partes de la superficie. En otras palabras, integramos (3.10) sobre toda la superficie:

$$\text{Flujo total de calor saliente de } S = \int_S \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n}\, da. \tag{3.11}$$

Llamaremos a esta integral de superficie "el flujo de $\boldsymbol{h}$ a través de la superficie". Originariamente la palabra flujo tenía el significado de algo que fluía, un líquido por ejemplo, de modo que la integral de superficie significaba precisamente el fluir de $\boldsymbol{h}$ a través de la superficie. Podemos decir que: $\boldsymbol{h}$ es la "densidad de la corriente" del flujo de calor y su integral de superficie es la corriente total de calor que se dirige hacia afuera de la superficie, es decir, la energía térmica por unidad de tiempo (joules por segundo).

Queremos generalizar esta idea al caso de que el vector no represente el flujo de nada; por ejemplo, podrá representar el campo eléctrico. Podemos ciertamente integrar ahora la componente normal del campo eléctrico sobre una superficie. Aunque no es el flujo de nada, le llamaremos "flujo". Diremos:

$$\text{Flujo de } \boldsymbol{E} \text{ a través de la superficie } S = \int_S \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\, da. \tag{3.12}$$

Generalizamos la palabra "flujo" para indicar la "integral de superficie de la componente normal" de un vector. Utilizaremos también la misma definición cuando la superficie considerada no sea cerrada como lo es aquí.

Regresando al caso particular del flujo de calor, consideraremos el caso en que se *conserva el calor*. Por ejemplo, imaginemos algún material en el cual y después

de un calentamiento previo, no hay posterior generación o absorción de energía térmica. Entonces, si existe un flujo de calor hacia el exterior de la superficie cerrada, el contenido de calor dentro del volumen debe disminuir. Luego, en el caso en que deba haber conservación del calor, escribiremos que:

$$\int_S \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n}\, da = -\frac{dQ}{dt}, \tag{3.13}$$

donde Q es el calor dentro de la superficie. El flujo de calor hacia el exterior de S es igual a menos la derivada del calor total Q dentro de S respecto al tiempo. Esta interpretación es posible debido a que hemos hablado de flujo de calor y porque hemos supuesto que hay conservación del calor. No podemos, por supuesto, hablar del calor total dentro del volumen si hay generación de calor dentro de él.

Pondremos ahora en evidencia una propiedad interesante del flujo de un vector. Pueden pensar en el vector flujo de calor si lo desean, pero lo que diremos es válido para cualquier campo vectorial $\boldsymbol{C}$. Imaginen una superficie cerrada S que encierra el volumen V. Separemos ahora el volumen en dos partes mediante alguna clase de "corte", como en la figura 3-4. Ahora tenemos dos superficies cerradas y dos volúmenes. El volumen V_1 está encerrado por la superficie S_1, que está constituida en parte por la superficie original S_a y por la superficie de corte S_{ab}. El volumen V_2 está encerrado por S_2, la cual está constituida por la superficie original restante S_b y por la superficie de corte S_{ab}. Consideremos el siguiente problema: supongan que calculamos el flujo saliente a través de la superficie S_1 y lo sumamos al flujo saliente a través de S_2. ¿Será esta suma igual al flujo saliente a través de toda la superficie original? La respuesta es sí. El flujo a través de las partes de la superficie S_{ab} comunes a S_1 y S_2 se anulan mutuamente. Para el flujo del vector $\boldsymbol{C}$ saliente de V_1, podemos escribir:

$$\text{Flujo saliente de } S_1 = \int_{S_a} \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{n}\, da + \int_{S_{ab}} \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{n}_1\, da, \tag{3.14}$$

y para el flujo saliente de V_2,

$$\text{Flujo saliente de } S_2 = \int_{S_b} \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{n}\, da + \int_{S_{ab}} \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{n}_2\, da. \tag{3.15}$$

Observemos que en la segunda integral hemos escrito $\boldsymbol{n}_1$ para la normal saliente de S_{ab} cuando se refiere a S_1, y $\boldsymbol{n}_2$ cuando se refiere a S_2, como se indica en la figura 3-4. Claramente $\boldsymbol{n}_1 = -\boldsymbol{n}_2$, y entonces

$$\int_{S_{ab}} \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{n}_1\, da = -\int_{S_{ab}} \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{n}_2\, da. \tag{3.16}$$

Si reunimos las ecuaciones (3.14) y (3.15), vemos que la suma de los flujos a través de S_1 y S_2 es justamente la suma de las dos integrales que, tomadas juntas, dan el flujo a través de la superficie original $S = S_a + S_b$.

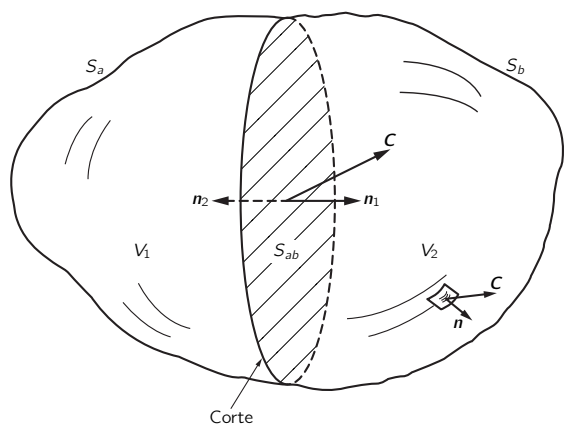


Figura 3-4. Se muestra un volumen V contenido dentro de una superficie S, dividido en dos partes por un "corte" por la superficie S_{ab}. Después del corte, se tiene el volumen V_1, encerrado por la superficie $S_1 = S_a + S_{ab}$ y el volumen V_2 encerrado por la superficie $S_2 = S_b + S_{ab}$.

Vemos que el flujo a través de la superficie exterior total S puede considerarse como la suma de los flujos de las dos partes en que ha sido dividido el volumen. Podemos igualmente subdividir nuevamente —digamos por corte de V_1 en dos partes—. Verán que se puede aplicar el mismo razonamiento. Así, para *cualquier* forma de dividir el volumen original, debe ser generalmente verdadero que el flujo a través de la superficie exterior, que es la integral original, sea igualmente la suma de los flujos salientes de todas las pequeñas partes interiores.

3-3 El flujo saliente de un cubo; el teorema de Gauss

Tomaremos ahora el caso especial de un pequeño cubo* y estableceremos una fórmula interesante para el flujo que sale de él. Consideremos un cubo cuyas aristas sean paralelas a los ejes como en la figura 3-5. Supongamos que las coordenadas del vértice más cercano al origen son x, y, z. Tomamos Δx la longitud de un lado del cubo en la dirección de x, Δy la de la dirección de y y Δz la de la dirección de z. Deseamos encontrar el flujo del campo vectorial $\boldsymbol{C}$ a través de la superficie del cubo. Haremos esto sumando los flujos a través de cada una de las seis caras. Primero, consideremos la cara marcada con 1 en la figura. El flujo *saliente* de esta cara es la componente de $\boldsymbol{C}$ con signo negativo según el eje x, integrada sobre la superficie de esta cara. Este flujo es:

$$-\int C_x \, dy \, dz.$$

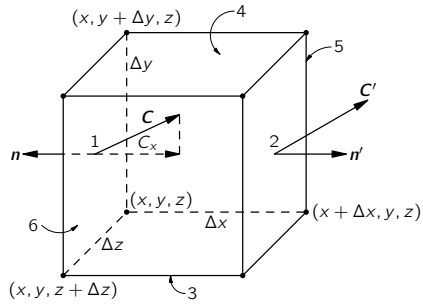


Figura 3-5. Cálculo del flujo de $\boldsymbol{C}$ saliente de un pequeño cubo.

Como hemos considerado un *pequeño* cubo, podemos tomar como un valor aproximado de esta integral el producto del valor de C_x en el centro de la cara —punto que llamaremos (1)— por el área de la cara, $\Delta y \, \Delta z$:

$$\text{Flujo saliente de } 1 = -C_x(1) \, \Delta y \, \Delta z.$$

Similarmente, para el flujo saliente de la cara 2, escribimos:

$$\text{Flujo saliente de } 2 = C_x(2) \, \Delta y \, \Delta z.$$

Ahora bien, $C_x(1)$ y $C_x(2)$ son, en general, ligeramente diferentes. Si Δx es suficientemente pequeño, podemos escribir:

$$C_x(2) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x} \, \Delta x.$$

Hay, por supuesto, más términos, pero contienen $(\Delta x)^2$ y potencias superiores, los que serán despreciables si consideramos solamente el límite para Δx pequeño. Así, el flujo a través de la cara 2 es:

$$\text{Flujo saliente de } 2 = \left[C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial x} \, \Delta x \right] \Delta y \, \Delta z.$$

Sumando los flujos para las caras 1 y 2, tenemos:

$$\text{Flujo saliente de 1 y 2} = \frac{\partial C_x}{\partial x} \, \Delta x \, \Delta y \, \Delta z.$$

La derivada se debe calcular en el centro de la cara 1, es decir, en el punto $[x, y + (\Delta y/2), z + (\Delta z/2)]$. Pero en el límite de un cubo infinitesimal, tendremos un error despreciable si la calculamos en el vértice (x, y, z).

Aplicando el mismo razonamiento a cada uno de los otros pares de caras, tenemos lo siguiente:

$$\text{Flujo saliente de 3 y 4} = \frac{\partial C_y}{\partial y} \, \Delta x \, \Delta y \, \Delta z$$

* El desarrollo siguiente es aplicable en forma igualmente correcta a cualquier paralelepípedo rectangular.

y

$$\text{Flujo saliente de 5 y 6 } = \frac{\partial C_z}{\partial z}\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z.$$

El flujo total a través de todas las caras es la suma de estos términos. Encontramos que:

$$\int_{\text{cubo}} \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{n}\,da = \left(\frac{\partial C_x}{\partial x}+\frac{\partial C_y}{\partial y}+\frac{\partial C_z}{\partial z}\right)\Delta x\,\Delta y\,\Delta z,$$

y la suma de las derivadas es justamente $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{C}$. Además $\Delta x\Delta y\Delta z = \Delta V$ es el volumen del cubo. Entonces podremos decir que para un *cubo infinitesimal*

$$\int_{\text{superficie}} \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{n}\,da = (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{C})\,\Delta V. \tag{3.17}$$

Hemos mostrado que el flujo saliente de la superficie de un cubo infinitesimal es igual a la divergencia del vector multiplicada por el volumen del cubo. Ahora vemos el "significado" de la divergencia de un vector. La divergencia de un vector en el punto P es el flujo —el "flujo" saliente de $\boldsymbol{C}$— *por unidad de volumen*, en las vecindades de P.

Hemos establecido una relación entre la divergencia de $\boldsymbol{C}$ y el flujo de $\boldsymbol{C}$ saliente de cada volumen infinitesimal. Para cualquier volumen finito podemos utilizar la propiedad que hemos demostrado anteriormente —que el flujo total saliente de un volumen es la suma de los flujos salientes de cada una de las partes—. Podemos así integrar la divergencia sobre todo el volumen. Esto nos conduce al teorema de que la integral de la componente normal de cualquier vector sobre una superficie cerrada arbitraria se puede escribir como la integral de la divergencia del vector sobre el volumen encerrada por la superficie. Este teorema se llama teorema de Gauss.

Teorema de Gauss:

$$\int_S \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{n}\,da = \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{C}\,dV, \tag{3.18}$$

donde S es cualquier superficie cerrada y V es el volumen que ésta encierra.

3-4 Conducción del calor; la ecuación de difusión

Vamos a considerar un ejemplo del uso de este teorema, sólo para familiarizarnos con él. Supongan que consideramos de nuevo el caso de la propagación del calor en un metal, por ejemplo. Supongan una situación simple en la cual un cuerpo ha sido previamente calentado y ahora se está enfriando. No hay fuentes de calor, de modo que el calor se conserva. Dado un instante cualquiera ¿qué cantidad de calor hay dentro de un volumen? Esta cantidad debe *disminuir* justamente en la misma cantidad de calor que fluye a través de la superficie que encierra el volumen considerado. Si nuestro volumen es un pequeño cubo, podemos escribir, de acuerdo con la ecuación (3.17),

$$\text{Calor saliente} = \int_{\text{cubo}} \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}\,da = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{h}\,\Delta V. \tag{3.19}$$

Pero esto debe ser igual al grado de disminución de la cantidad de calor dentro del cubo. Si q es el calor por unidad de volumen, el calor en el cubo es $q\,\Delta V$ y el grado de *disminución* es:

$$-\frac{\partial}{\partial t}(q\,\Delta V) = -\frac{\partial q}{\partial t}\,\Delta V. \tag{3.20}$$

Comparando (3.19) y (3.20), vemos que:

$$-\frac{\partial q}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{h}. \tag{3.21}$$

Tomen nota de la forma de esta ecuación, ya que aparece frecuentemente en física. Expresa una ley de conservación —aquí la conservación del calor—. Hemos expresado el mismo hecho físico en otra forma en la ecuación (3.13). Aquí tenemos la forma *diferencial* de una ecuación de conservación, mientras que la ecuación (3.13) es la forma *integral*.

Hemos obtenido la ecuación (3.21) por aplicación de la ecuación (3.13) a un cubo infinitesimal. Podemos hacerlo de otra manera. Para un gran volumen V limitado por S, la ley de Gauss dice que:

$$\int_S \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n}\, da = \int_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h}\, dV. \tag{3.22}$$

Utilizando (3.21), la integral del segundo miembro es justamente $-dQ/dt$ y nuevamente tenemos la ecuación (3.13).

Ahora vamos a considerar un caso diferente. Imaginen que tenemos un bloque de material y dentro de él un pequeño agujero en el cual se produce una reacción química cualquiera generando calor. O bien podemos imaginar algunos conductores a manera de pequeña resistencia calentados por una corriente eléctrica. Supondremos que el calor es generado prácticamente en un punto, del mismo modo que W representa la energía liberada por segundo en ese punto. Supondremos que en todo el resto del volumen el calor se conserva, y que el calor se ha estado generando durante un tiempo suficientemente grande —de tal manera que la temperatura ya no varíe en ningún punto—. El problema es el siguiente: ¿Cómo es el vector de flujo de calor $\boldsymbol{h}$ en diferentes puntos del metal? ¿Qué cantidad de calor fluye en cada punto?

Sabemos que integrando la componente normal de $\boldsymbol{h}$ sobre una superficie cerrada en torno de la fuente, tendremos siempre W. Todo el calor generado en la fuente puntual fluye a través de la superficie, puesto que hemos supuesto que nos encontramos en un régimen permanente. Nos encontramos frente al difícil problema de encontrar un campo vectorial que, integrado sobre una superficie cualquiera, dé siempre W. Podemos, sin embargo, encontrar el campo fácilmente tomando una superficie algo particular. Tomemos una esfera de radio R, centrada en la fuente, y supongamos que el flujo de calor es radial (figura 3-6). Nuestra intuición nos dice que $\boldsymbol{h}$ debe ser radial si el bloque de material es grande y si no nos acercamos a los bordes, y debe tener el mismo valor en todo punto de la esfera. Observarán que para encontrar el resultado estamos agregando ciertas conjeturas a nuestra matemática —que comúnmente se llama "intuición física"—.

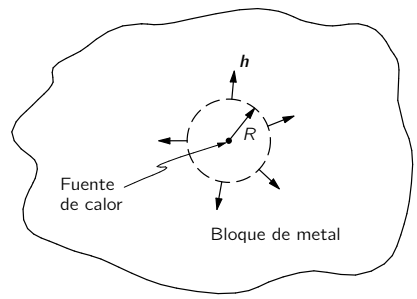


Figura 3-6. En la región vecina a una fuente puntual de calor, el flujo de calor es radial y dirigido hacia el exterior.

Cuando $\boldsymbol{h}$ es radial y esféricamente simétrico, la integral de la componente normal de $\boldsymbol{h}$ sobre la superficie es muy simple, puesto que la componente normal es justamente el módulo de $\boldsymbol{h}$ y es constante. La superficie sobre la cual integramos es $4\pi R^2$. Tenemos entonces

$$\int_S \boldsymbol{h} \cdot \boldsymbol{n}\, da = h \cdot 4\pi R^2 \tag{3.23}$$

(donde h es el módulo de $\boldsymbol{h}$). Esta integral debe ser igual a W, la cantidad de calor por unidad de tiempo producida por la fuente. Obtenemos:

$$h = \frac{W}{4\pi R^2},$$

o sea

$$\boldsymbol{h} = \frac{W}{4\pi R^2}\, \boldsymbol{e}_r, \tag{3.24}$$

donde, como siempre, $\boldsymbol{e}_r$ representa el vector en la dirección radial. Nuestro resultado dice que $\boldsymbol{h}$ es proporcional a W y varía en forma inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente.

El resultado que hemos obtenido se aplica a la propagación del calor en las vecindades de una fuente puntual. Tratemos ahora de encontrar las ecuaciones válidas para la propagación del calor en el caso más general, manteniendo solamente la condición de que el calor se conserva. Nos ocuparemos solamente de lo que sucede en lugares donde no hay ni fuentes ni absorbentes de calor.

La ecuación diferencial para la conducción del calor fue obtenida en el capítulo 2. De acuerdo con la ecuación (2.44),

$$\boldsymbol{h} = -\kappa\,\boldsymbol{\nabla}T. \tag{3.25}$$

(Recuerden que esta relación es aproximada, pero que la aproximación es buena para ciertos materiales tales como los metales.) Es aplicable, por supuesto, solamente en regiones del material donde no haya generación ni absorción de calor. Hemos obtenido antes otra relación, la ecuación (3.21), que es válida cuando el calor se conserva. Si combinamos esta ecuación con la (3.25), tenemos:

$$-\frac{\partial q}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{h} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\kappa\,\boldsymbol{\nabla}T),$$

o

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \kappa\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}T = \kappa\,\nabla^2 T, \tag{3.26}$$

si κ es una constante. Recuerden que q es la cantidad de calor contenida en la unidad de volumen y que $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla} = \nabla^2$ es el operador laplaciano

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Si hacemos ahora una conjetura más, podemos obtener una ecuación muy interesante. Supongamos que la temperatura del material sea proporcional al calor contenido por unidad de volumen —esto es, que el material tenga un calor específico definido—. Cuando esta conjetura es válida (como lo es frecuentemente), podemos escribir:

$$\Delta q = c_v\,\Delta T$$

o

$$\frac{\partial q}{\partial t} = c_v\,\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{3.27}$$

La variación del calor respecto al tiempo es proporcional a la derivada de la temperatura respecto al tiempo. La constante de proporcionalidad c_v es aquí el calor específico por unidad de *volumen* del material. Usando la ecuación (3.27) con la (3.26), tenemos:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{c_v}\,\nabla^2 T. \tag{3.28}$$

Encontramos que la derivada de T respecto al *tiempo* —en todo punto— es proporcional al laplaciano de T, que es la segunda derivada de T respecto a las coordenadas espaciales. Tenemos una ecuación diferencial —en x, y, z y t— para la temperatura T.

La ecuación diferencial (3.28) se llama *ecuación de difusión de calor*. Frecuentemente se escribe en la forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\,\nabla^2 T, \tag{3.29}$$

donde D se llama constante de *difusión*, y aquí es igual a κ/c_v.

La ecuación de difusión aparece en muchos problemas físicos: en la difusión de los gases, en la difusión de neutrones y en otros. Ya hemos discutido el aspecto físico de algunos de estos fenómenos en el capítulo 43 del volumen I. Ahora tienen la ecuación completa que describe la difusión en la situación más general posible. Más adelante trataremos de resolver la ecuación de difusión para encontrar cómo varía la temperatura en casos particulares. Volvamos ahora a considerar otros teoremas relativos a los campos vectoriales.

3-5 Circulación de un campo vectorial

Deseamos considerar ahora el rotor en la misma forma que lo hemos hecho con la divergencia. Hemos obtenido el teorema de Gauss considerando una integral de superficie, aunque no fue obvio *a priori* que tuviéramos que llegar a la divergencia. ¿Cómo sabíamos que debíamos suponer la integración sobre una superficie para obtener la divergencia? No estaba del todo claro que éste sería el resultado. Y así, con la misma falta aparente de justificación, vamos a calcular otra magnitud relacionada con el vector y mostraremos que la misma está relacionada con el rotacional. Esto que calculamos es lo que se llama circulación de un campo vectorial. Si $\boldsymbol{C}$ es un campo vectorial cualquiera, entonces podemos tomar su componente a lo largo de una curva, y calcular la integral de esta componente a lo largo del lazo completo. La integral se conoce como *circulación* del campo vectorial a lo largo del lazo. Anteriormente en este capítulo habíamos considerado la integral de línea de $\boldsymbol{\nabla}\psi$. Ahora operaremos de la misma manera para *cualquier* campo vectorial $\boldsymbol{C}$.

Sea Γ una curva cerrada cualquiera en el espacio —por supuesto imaginaria—. Se da un ejemplo en la figura 3-7. La integral de línea de la componente tangencial de $\boldsymbol{C}$ a lo largo del lazo se escribe:

$$\oint_\Gamma C_t\, ds = \oint_\Gamma \boldsymbol{C}\cdot d\boldsymbol{s}. \tag{3.30}$$

Observarán que la integral se toma a lo largo de toda la curva y no entre dos puntos como lo habíamos hecho anteriormente. El pequeño círculo sobre el signo integral en la fórmula nos dice que se debe tomar la integral a lo largo de toda la curva. Esta integral se llama circulación del campo vectorial a lo largo de la curva Γ. El nombre proviene originalmente de considerar la circulación de un líquido. Pero el nombre —como en el caso del flujo— se aplica por extensión a todo campo vectorial incluso cuando no hay una "circulación" material.

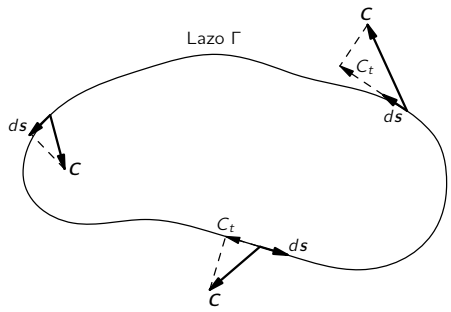


Figura 3-7. La circulación de $\boldsymbol{C}$ a lo largo de la curva Γ es la integral de línea de C_t, la componente tangencial de $\boldsymbol{C}$.

Efectuando el mismo juego que hemos hecho para el flujo, podemos demostrar que la circulación a lo largo de un lazo es la suma de las circulaciones a lo largo de dos lazos parciales. Supongan que rompemos nuestra curva de la figura 3-7 en dos lazos uniendo los puntos (1) y (2) de la curva original por medio de alguna línea que la atraviese como se indica en la figura 3-8. Hay ahora dos lazos Γ_1 y Γ_2. El lazo Γ_1 se construye siguiendo la trayectoria Γ_a, la cual es una parte de la curva original a la izquierda de (1) y (2) más Γ_{ab}, la línea de corte. Γ_2 se construye con el resto de la curva original más la línea de corte.

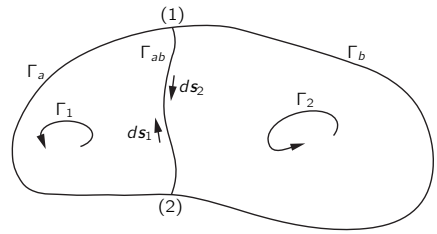


Figura 3-8. La circulación a lo largo del lazo es la suma de las circulaciones a lo largo de dos lazos : $\Gamma_1 = \Gamma_a + \Gamma_{ab}$ y $\Gamma_2 = \Gamma_b + \Gamma_{ab}$.

La circulación a lo largo de Γ_1 es la suma de dos integrales, una a lo largo de Γ_a y otra a lo largo de Γ_{ab}. Igualmente, la circulación a lo largo de Γ_2 es la suma de dos partes, una a lo largo de Γ_b y la otra a lo largo de Γ_{ab}. La integral a lo largo de Γ_{ab} tendrá, para la curva Γ_2, signo opuesto que para Γ_1, porque la dirección de recorrido es opuesta —debemos tomar ambas integrales de línea con el mismo "sentido" de rotación—.

Siguiendo la misma clase de razonamientos que utilizamos antes, pueden ver que la suma de las dos circulaciones dará justamente la integral de línea a lo largo de la curva original Γ. La parte debida a Γ_{ab} se cancela. Además, la circulación a lo largo de una parte, más la circulación a lo largo de la segunda parte, es igual a la circulación alrededor de la curva exterior. Podemos continuar el proceso de corte del lazo original en cualquier número de pequeños lazos. Cuando sumemos las circulaciones de los pequeños lazos, invariablemente se producirá la cancelación de las diferentes partes en las porciones adyacentes, de tal manera que la suma es equivalente a la circulación a lo largo del lazo simple original.

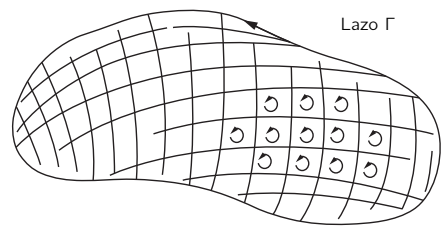


Figura 3-9. Se toma una superficie cualquiera limitada por el lazo Γ. La superficie está dividida en un cierto número de pequeñas superficies, aproximadamente cuadradas. La circulación alrededor de Γ es la suma de las circulaciones a lo largo de los pequeños lazos.

Supongamos ahora que una superficie se apoya sobre el lazo original. Existe, por supuesto, un número infinito de superficies que tienen el lazo original como contorno. Nuestro resultado, sin embargo, no dependerá de la superficie que tomemos. Primero, rompamos nuestro lazo original en cierto número de pequeños lazos que se encuentran todos en la superficie considerada, como en la figura 3-9. No importa la forma de la superficie, si tomamos lazos suficientemente pequeños,

podemos suponer que cada uno de los pequeños lazos encierra una superficie que es esencialmente plana. Igualmente, podemos tomar nuestros pequeños lazos de tal manera que sean aproximadamente cuadrados. Ahora podemos calcular la circulación a lo largo del lazo grande Γ calculando la circulación a lo largo de todos los pequeños cuadrados y tomando su suma.

3-6 Circulación a lo largo de un cuadrado; el teorema de Stokes

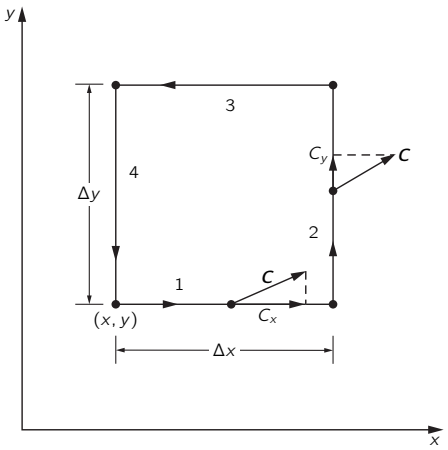


Figura 3-10. Cálculo de la circulación de $\boldsymbol{C}$ a lo largo de un pequeño cuadrado.

¿Cómo hallaremos la circulación para cada cuadrado pequeño? Una primera pregunta es, ¿cómo están orientados los cuadrados en el espacio? Pueden fácilmente hacer el cálculo si tienen una orientación particular. Por ejemplo, si nos encontramos en un plano de coordenadas. Como todavía no hemos supuesto nada referente a la orientación de los ejes de coordenadas podemos tomar los mismos de modo que el pequeño cuadrado que consideremos en ese momento esté contenido en el plano xy, como en la figura 3-10. Si nuestro resultado se expresa en forma vectorial, podemos decir que será el mismo, cualquiera que sea la orientación particular del plano.

Queremos encontrar ahora la circulación del campo $\boldsymbol{C}$ a lo largo de nuestro pequeño cuadrado. Será fácil calcular la integral de línea si tomamos un cuadrado suficientemente pequeño como para que el vector $\boldsymbol{C}$ no cambie mucho a lo largo de cualquier lado del cuadrado. (La suposición es mejor si el cuadrado es más pequeño, de modo que en realidad se está hablando de cuadrados infinitesimales.) Partamos del punto (x, y) —el vértice inferior izquierdo de la figura— y efectuemos el recorrido en el sentido indicado por las flechas. A lo largo del primer lado —marcado (1)— la componente tangencial es $C_x(1)$ y la distancia Δ_x. La primera parte de la integral es $C_x(1)\ \Delta_x$. A lo largo del segundo lado, tenemos $C_y(2)\Delta_y$. A lo largo del tercero tenemos $-C_x(3)\Delta_x$, y a lo largo del cuarto $-C_y(4)\Delta_y$. Los signos se requieren debido a que queremos la componente tangencial en el sentido del recorrido. La integral de línea completa es entonces

$$\oint \boldsymbol{C} \cdot d\boldsymbol{s} = C_x(1)\,\Delta x + C_y(2)\,\Delta y - C_x(3)\,\Delta x - C_y(4)\,\Delta y. \tag{3.31}$$

Observemos ahora el primer y el tercer términos. Juntos son:

$$[C_x(1) - C_x(3)]\,\Delta x. \tag{3.32}$$

Se podrá pensar que en nuestra aproximación la diferencia es cero. Esto es cierto en primera aproximación. Podemos ser más precisos, sin embargo, y tener en cuenta la variación de C_x. Si lo hacemos podemos escribir:

$$C_x(3) = C_x(1) + \frac{\partial C_x}{\partial y}\,\Delta y. \tag{3.33}$$

Si incluimos términos de orden más elevado, por ejemplo términos en $(\Delta y)^2$, debemos observar que al tomar el límite para $\Delta y \to 0$, esos términos serán despreciables. Poniendo (3.33) junto con (3.32), encontramos que:

$$[C_x(1) - C_x(3)]\,\Delta x = -\frac{\partial C_x}{\partial y}\,\Delta x\,\Delta y. \tag{3.34}$$

En nuestra aproximación la derivada se puede calcular en (x, y).

Análogamente, para los otros dos términos de la circulación, podemos escribir:

$$C_y(2)\,\Delta y - C_y(4)\,\Delta y = \frac{\partial C_y}{\partial x}\,\Delta x\,\Delta y. \tag{3.35}$$

La circulación alrededor de nuestro cuadrado es entonces

$$\left(\frac{\partial C_y}{\partial x} - \frac{\partial C_x}{\partial y}\right)\Delta x\,\Delta y, \tag{3.36}$$

lo cual es interesante, puesto que los dos términos del paréntesis son justamente la componente z del rotacional. Además, notemos que $\Delta x \Delta y$ es la superficie de nuestro cuadrado. Entonces podemos escribir nuestra circulación (3.36) como:

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{C})_z \, \Delta a.$$

Pero la componente z significa realmente la componente *normal* al elemento de superficie. Podemos, en consecuencia, escribir la circulación a lo largo de un cuadrado diferencial en una forma vectorial invariante:

$$\oint \boldsymbol{C} \cdot d\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{C})_n \, \Delta a = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{C}) \cdot \boldsymbol{n} \, \Delta a. \tag{3.37}$$

Nuestro resultado es: la circulación de cualquier vector $\boldsymbol{C}$ a lo largo de un cuadrado infinitesimal es el producto de la componente del rotacional de $\boldsymbol{C}$ normal a la superficie, por el área del cuadrado.

La circulación a lo largo de cualquier lazo Γ puede ahora referirse fácilmente al rotor del campo vectorial. Llenemos el lazo con cualquier superficie conveniente S, como en la figura 3-11, y sumemos las circulaciones a lo largo de un sistema de cuadrados infinitesimales en la superficie. La suma puede escribirse como una integral. Nuestro resultado es un teorema sumamente útil llamado teorema de Stokes (en honor a Stokes).

Teorema de Stokes:

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{C} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{C})_n \, da, \tag{3.38}$$

donde S es cualquier superficie limitada por Γ.

Debemos hablar ahora de una convención de signos. En la figura 3-10 el eje z apuntaría *hacia* ti, saliendo de la página, en el sistema "usual" —esto es, una terna derecha"— de ejes. Cuando calculamos nuestra integral de línea con un sentido "positivo" de rotación, encontramos que la circulación era igual a la componente z de $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{C}$. Si la hubiésemos obtenido recorriendo el sentido contrario habríamos obtenido el signo opuesto. Ahora bien, ¿cómo sabremos, en general, qué dirección tomar para el sentido positivo de la componente "normal" de $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{C}$? La normal "positiva" siempre se debe relacionar con el sentido de la rotación, como se indica en la figura 3-10. El caso general se muestra en la figura 3-11.

Una forma de recordar esta relación es por medio de "la regla de la mano derecha". Si ponen los dedos de su mano *derecha* a lo largo de la curva Γ, con la punta de los dedos apuntando en la dirección del sentido positivo de $d\boldsymbol{s}$, entonces el pulgar apuntará en la dirección de la normal *positiva* a la superficie S.

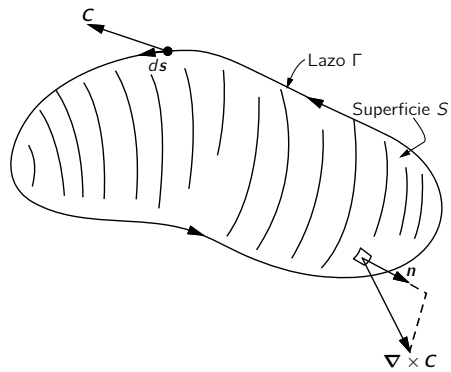


Figura 3-11. La circulación de $\boldsymbol{C}$ a lo largo de Γ es la integral de superficie de la componente normal de $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{C}$.

3-7 Campos de rotacional nulo y de divergencia nula

Vamos a considerar ahora algunas consecuencias de nuestros nuevos teoremas. Tomemos primero el caso de un vector cuyo rotacional sea cero *en todo punto*. El teorema de Stokes dice que la circulación a lo largo de cualquier lazo es cero. Ahora bien, si tomamos dos puntos (1) y (2) en una curva cerrada (figura 3-12), concluimos que la integral de línea de la componente tangencial desde (1) hasta (2) es independiente de cuál de los dos caminos posibles se considere. Podemos concluir que la integral desde (1) hasta (2) puede depender solamente de la ubicación de esos puntos —es decir, es función de la posición únicamente—. El mismo razonamiento fue utilizado en el capítulo 14 del volumen I, donde demostramos que si la integral a través de un lazo cerrado de cierta cantidad es siempre cero, la integral se puede representar como la diferencia entre los valores de una función de la posición de los dos extremos. Este hecho nos llevó a inventar el concepto de potencial. Demostramos, además, que el campo vectorial era el gradiente de esta función potencial (véase la ecuación 14.13 del volumen I).

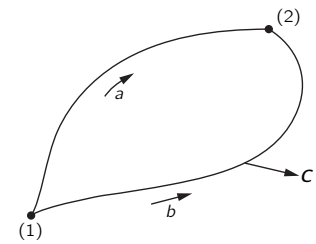


Figura 3-12. Si $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{C}$ es cero, la circulación a lo largo de la curva cerrada Γ es cero. La integral de línea de (1) a (2) debe ser la misma a lo largo de a que a lo largo de b.

Por consiguiente, cualquier campo vectorial cuyo rotacional es cero es igual al gradiente de alguna función escalar. Esto es, si $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{C} = 0$ en todo punto,

existe alguna ψ (psi) para la cual $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{\nabla}\psi$ —una idea muy útil—. Podemos, si lo deseamos, describir esta clase especial de campo vectorial por medio de un campo escalar.

Demostremos algo más. Supongan que tenemos *algún* campo escalar ϕ (phi). Si tomamos su gradiente, $\boldsymbol{\nabla}\phi$, la integral de este vector a lo largo de cualquier lazo cerrado debe ser cero. Su integral de línea desde el punto (1) hasta el punto (2) es $[\phi(2) - \phi(1)]$. Si (1) y (2) son el mismo punto, nuestro teorema 1, ecuación (3.8), nos indica que la integral de línea es cero:

$$\oint_{\text{lazo}} \boldsymbol{\nabla}\phi \cdot d\boldsymbol{s} = 0.$$

Usando el teorema de Stokes, podemos concluir que:

$$\int (\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\phi))_n \, da = 0$$

sobre *cualquier* superficie. Pero si la integral es cero sobre *cualquier* superficie, el integrando debe ser cero. Entonces

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla}\phi) = 0, \quad \text{siempre.}$$

Hemos demostrado el mismo resultado en la sección por medio del álgebra vectorial.

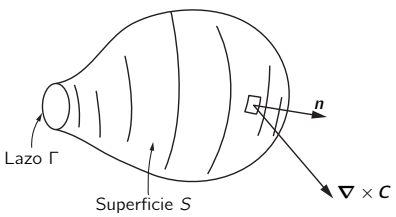


Figura 3-13. Pasando al límite de una superficie cerrada encontramos que la integral de superficie de $(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{C})_n$ debe anularse.

Veamos ahora un caso especial en el cual llenamos un *pequeño* lazo Γ con una *gran* superficie S, como se indica en la figura 3-13. Deseamos ver, de hecho, qué sucede cuando el lazo se reduce a un punto, de modo que el borde de la superficie desaparece —la superficie se transforma en una superficie cerrada—. Si el vector $\boldsymbol{C}$ es distinto de cero en todo lugar, la integral de línea a lo largo de Γ debe tender a cero a medida que vamos disminuyendo el tamaño del lazo —la integral es aproximadamente proporcional a la longitud de Γ, que tiende a cero—. De acuerdo con el teorema de Stokes, la integral de superficie de $(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{C})_n$, también debe anularse. De alguna manera, al cerrar la superficie introducimos contribuciones que anulan las anteriores. Tenemos entonces un nuevo teorema:

$$\int_{\substack{\text{cualquier}\\ \text{superficie}\\ \text{cerrada}}} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{C})_n \, da = 0. \tag{3.39}$$

Esto es interesante, porque anteriormente teníamos un teorema relativo a la integral de superficie de un campo vectorial. Tal integral de superficie es igual a la integral de volumen de la divergencia del vector, de acuerdo con el teorema de Gauss (3.18). El teorema de Gauss, aplicado a $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{C}$, dice que:

$$\int_{\substack{\text{superficie}\\ \text{cerrada}}} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{C})_n \, da = \int_{\substack{\text{volumen}\\ \text{interior}}} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{C}) \, dV. \tag{3.40}$$

Concluimos así que la segunda integral también debe ser cero:

$$\int_{\substack{\text{cualquier}\\ \text{volumen}}} \boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{C}) \, dV = 0, \tag{3.41}$$

y esto vale para cualquier campo vectorial C. Como la ecuación (3.41) es válida para *cualquier volumen*, debe valer para *todo punto* del espacio que el integrando es cero. Tenemos:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{C}) = 0, \quad \text{siempre.}$$

Pero este resultado es el mismo que habíamos obtenido del álgebra vectorial en la sección 2-7. Ahora comenzamos a ver cómo todo ensambla perfectamente.

3-8 Resumen

Resumamos lo que hemos encontrado respecto al cálculo diferencial e integral vectorial. Éstos son los puntos realmente importantes de los capítulos 2 y 3:

1. Los operadores $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$ y $\partial/\partial z$ pueden ser considerados como las tres componentes del operador vectorial $\boldsymbol{\nabla}$, y las fórmulas que resultan del álgebra vectorial considerando a este operador como un vector son correctas:
$$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

2. La diferencia de los valores de un campo escalar en dos puntos es igual a la integral de línea de la componente tangencial del gradiente de dicho escalar a lo largo de cualquier curva que una el primer punto con el segundo:
$$\psi(2) - \psi(1) = \int_{\substack{(1)\\ \text{cualquier curva}}}^{(2)} \boldsymbol{\nabla}\psi \cdot d\boldsymbol{s}. \tag{3.42}$$

3. La integral de superficie de la componente normal de un vector arbitrario sobre una superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia del vector sobre el volumen interior a la superficie:
$$\int_{\substack{\text{superficie}\\ \text{cerrada}}} \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{n}\, da = \int_{\substack{\text{volumen}\\ \text{interior}}} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{C}\, dV. \tag{3.43}$$

4. La integral de línea de la componente tangencial de un vector arbitrario a lo largo de un lazo cerrado es igual a la integral de superficie de la componente normal del rotor del vector sobre cualquier superficie limitada por el lazo:
$$\int_{\text{frontera}} \boldsymbol{C} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{\text{superficie}} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{C}) \cdot \boldsymbol{n}\, da. \tag{3.44}$$

4

Electrostática

4-1 Estática

Comenzamos ahora nuestro estudio detallado de la teoría del electromagnetismo. Todo el electromagnetismo está contenido en las ecuaciones de Maxwell.

Ecuaciones de Maxwell:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{4.2}$$

$$c^2\,\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0}, \tag{4.3}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0. \tag{4.4}$$

Las situaciones descritas por estas ecuaciones pueden ser muy complicadas. Consideraremos primero situaciones relativamente simples y aprenderemos a manejarlas antes de encarar otras más complicadas. La situación más fácil de tratar es cuando nada depende del tiempo —llamada el caso *estático*—. Todas las cargas están permanentemente fijas en el espacio o, si se mueven, lo hacen en forma de flujo estacionario en un circuito (de modo que ρ y j son constantes en el tiempo). En estas circunstancias, son nulos todos los términos de las ecuaciones de Maxwell que sean derivadas temporales de los campos. En este caso, las ecuaciones de Maxwell se convierten en:

Electrostática:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{4.5}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=0. \tag{4.6}$$

Magnetostática:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0 c^2}, \tag{4.7}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0. \tag{4.8}$$

Habrán notado algo interesante en este sistema de cuatro ecuaciones. Se puede separar en dos pares. El campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ aparece únicamente en las dos primeras y el campo magnético $\boldsymbol{B}$ aparece sólo en las dos segundas. Estos campos no están interconectados. Esto significa que *la electricidad y el magnetismo son fenómenos distintos mientras las cargas y las corrientes son estáticas.* La interdependencia de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ no aparece hasta que las cargas o las corrientes varían, como cuando se carga un condensador o se mueve un imán. Sólo cuando hay cambios suficientemente rápidos, de modo que las derivadas temporales en las ecuaciones de Maxwell se hacen significativas, $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ dependen uno de otro.

Ahora bien, si examinan las ecuaciones de la estática verán que el estudio de los dos temas que llamamos electrostática y magnetostática es ideal para aprender las propiedades matemáticas de los campos vectoriales. La electrostática es un ejemplo típico de campo vectorial con *rotacional cero* y *divergencia dada.* La magnetostática es un ejemplo típico de campo con *divergencia cero* y *rotacional dado.* La manera más convencional —y puede que piensen, más satisfactoria—

4-1 Estática
4-2 Ley de Coulomb; superposición
4-3 El potencial eléctrico
4-4 $\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{\nabla}\phi$
4-5 El flujo de $\boldsymbol{E}$
4-6 Ley de Gauss; la divergencia de $\boldsymbol{E}$
4-7 El campo de una esfera cargada
4-8 Líneas de campo; las superficies equipotenciales

Revisar
Volumen I, capítulo 13,
Trabajo y energía potencial (A)
Volumen I, capítulo 14,
Conservación de la energía

$$\boldsymbol{\epsilon_0 c^2}=\frac{\boldsymbol{10^7}}{\boldsymbol{4\pi}}$$
$$\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{4\pi\epsilon_0}}\boldsymbol{\approx 9\times 10^9}$$
$$\boldsymbol{[\epsilon_0]=\text{coulomb}^2/\text{newton}\cdot\text{metro}^2}$$

de presentar la teoría del electromagnetismo es comenzar con la electrostática y enterarse así de lo que es divergencia. Más tarde se trata la magnetostática y el rotacional. Finalmente, se junta la electricidad con el magnetismo. Hemos elegido comenzar con la teoría completa del cálculo vectorial. Ahora lo aplicaremos al caso especial de la electrostática, el campo $\boldsymbol{E}$ dado por el primer par de ecuaciones.

Comenzaremos con las situaciones más simples —aquellas en que las posiciones de todas las cargas están especificadas—. Si sólo tuviéramos que estudiar electrostática a este nivel (como haremos en los próximos dos capítulos), la vida sería muy simple —en verdad, casi trivial—. Como verán, todo se puede obtener de la ley de Coulomb y algunas integraciones. Sin embargo, en muchos problemas electrostáticos reales no *sabemos* inicialmente dónde están las cargas. Sólo sabemos que se han distribuido de ciertos modos que dependen de las propiedades de la materia. Las posiciones que asumen las cargas dependen del campo $\boldsymbol{E}$, que a su vez depende de las posiciones de las cargas. Y entonces las cosas se tornan muy complicadas. Por ejemplo, si se acerca un cuerpo cargado a un conductor o un aislador, los electrones y protones del conductor o del aislador se moverán. La densidad de carga ρ que aparece en la ecuación (4.5) puede tener una parte que conocemos por la carga que trajimos; pero habrá otras partes provenientes de cargas que se han movido en el conductor. Y hay que tener en cuenta todas las cargas. Se puede caer en problemas bastante sutiles e interesantes. Así pues, aunque este capítulo será sobre electrostática, no abarcará las partes más bellas y sutiles del tema. Tratará únicamente la situación en que podemos suponer que se conoce la posición de todas las cargas. Naturalmente, deben ser capaces de resolver ese caso antes de intentar los otros.

4-2 Ley de Coulomb; superposición

Sería lógico usar las ecuaciones (4.5) y (4.6) como punto de partida. Sin embargo, será más fácil comenzar con algo diferente y volver luego a estas ecuaciones. Los resultados serán equivalentes. Comenzaremos con una ley de la que hemos hablado antes, llamada ley de Coulomb, que dice que entre dos cargas en reposo hay una fuerza directamente proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. La fuerza yace según la recta que une las dos cargas.

Ley de Coulomb:

$$\boldsymbol{F}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\,\boldsymbol{e}_{12} = -\boldsymbol{F}_2. \tag{4.9}$$

Donde $\boldsymbol{F}_1$ es la fuerza *sobre* la carga q_1, $\boldsymbol{e}_{12}$ es el vector en la dirección de q_2 *a* q_1, y r_{12} es la distancia entre q_1 y q_2. La fuerza $\boldsymbol{F}_2$ actúa sobre q_2 y es igual y opuesta a $\boldsymbol{F}_1$.

La constante de proporcionalidad se escribe, por razones históricas, como $1/4\pi\epsilon_0$. En el sistema de unidades que empleamos —el sistema mks— se define como exactamente igual a 10^{-7} por el cuadrado de la velocidad de la luz. Ahora bien, como la velocidad de la luz es aproximadamente 3×10^8 metros por segundo, la constante es aproximadamente 9×10^9, y la unidad resulta newton $\cdot$ metro^2 por coulomb^2 o volt $\cdot$ metro por coulomb.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi\epsilon_0} &= 10^{-7}c^2 \qquad \text{(por definición)}\\ &= 9.0\times10^9 \quad \text{(experimentalmente).}\\ \text{Unidades:}\quad &\text{newton}\cdot\text{metro}^2/\,\text{coulomb}^2,\\ \text{o}\quad &\text{volt}\cdot\text{metro/coulomb.}\end{aligned} \tag{4.10}$$

Cuando hay más de dos cargas —los únicos casos realmente interesantes— debemos complementar la ley de Coulomb con otro hecho de la naturaleza: la fuerza sobre cualquier carga es la suma vectorial de las fuerzas de Coulomb provenientes de cada una de las otras cargas. Esto se conoce como "principio de superposición". Ésa es toda la electrostática. Si combinamos la ley de Coulomb

con el principio de superposición no hay nada más. Las ecuaciones (4.5) y (4.6) —las ecuaciones de la electrostática— no dicen ni más ni menos que esto.

Al aplicar la ley de Coulomb, es conveniente introducir el concepto de campo eléctrico. Decimos que el campo $\boldsymbol{E}(1)$ es la fuerza *por unidad de carga* que actúa sobre q_1 (debida a todas las otras cargas). Dividiendo la ecuación (4.9) entre q_1, tenemos, cuando hay una carga además de q_1,

$$\boldsymbol{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q_2}{r_{12}^2}\,\boldsymbol{e}_{12}. \tag{4.11}$$

Además, consideramos que $\boldsymbol{E}(1)$ indica algo acerca del punto (1) aunque q_1 no esté allí —suponiendo que todas las otras cargas mantienen la misma posición—. Decimos que $\boldsymbol{E}(1)$ es el campo eléctrico en el punto (1).

El campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ es un vector, por lo que la ecuación (4.11) significa realmente tres ecuaciones —una para cada componente—. Escribiendo explícitamente la componente x, la ecuación (4.11) significa:

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{x_1 - x_2}{[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{3/2}}, \tag{4.12}$$

y análogamente para las otras componentes.

Si hay muchas cargas presentes, el campo $\boldsymbol{E}$ en cualquier punto (1) es una suma de las contribuciones provenientes de cada una de las otras cargas. Cada término de la suma tendrá el mismo aspecto que (4.11) o (4.12). Si q_j es el valor de la j-ésima carga y $\boldsymbol{r}_{1j}$ es el vector que va de q_j al punto (1), escribimos:

$$\boldsymbol{E}(1) = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q_j}{r_{1j}^2}\,\boldsymbol{e}_{1j}. \tag{4.13}$$

Lo cual significa, naturalmente,

$$E_x(x_1, y_1, z_1) = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q_j(x_1 - x_j)}{[(x_1 - x_j)^2 + (y_1 - y_j)^2 + (z_1 - z_j)^2]^{3/2}}, \tag{4.14}$$

etcétera.

Muchas veces es conveniente ignorar que las cargas vienen en paquetes como electrones y protones, y considerarlas diseminadas en forma continua —en una "distribución" como se le llama—. Esto está muy bien mientras no estemos interesados en lo que ocurre en una escala demasiado pequeña. Describimos una distribución de cargas por medio de una "densidad de carga" $\rho(x, y, z)$. Si Δq_2 es la cantidad de carga contenida en un pequeño volumen ΔV_2 ubicado en el punto (2), entonces ρ está definida por:

$$\Delta q_2 = \rho(2)\Delta V_2. \tag{4.15}$$

Para usar la ley de Coulomb con esta descripción, remplazamos las sumas de las ecuaciones (4.13) o (4.14) por integrales sobre todos los volúmenes que contienen las cargas. Tenemos:

$$\boldsymbol{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{\substack{\text{todo el}\\ \text{espacio}}} \frac{\rho(2)\boldsymbol{e}_{12}\,dV_2}{r_{12}^2}. \tag{4.16}$$

Algunos prefieren escribir

$$\boldsymbol{e}_{12} = \frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}},$$

donde $\boldsymbol{r}_{12}$ es la distancia vectorial *desde* (2) *hasta* (1), como muestra la figura 4-1. La integral para $\boldsymbol{E}$ se escribe entonces en la forma

$$\boldsymbol{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{\substack{\text{todo el}\\ \text{espacio}}} \frac{\rho(2)\boldsymbol{r}_{12}\,dV_2}{r_{12}^3}. \tag{4.17}$$

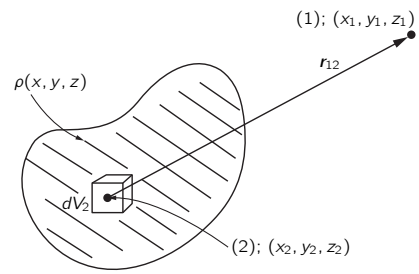


Figura 4-1. El campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ en el punto (1), originado por una distribución de carga, se obtiene de una integral sobre la distribución. El punto (1) también podría estar dentro de la distribución.

Cuando queremos calcular algo con estas integrales, generalmente tenemos que escribirlas con sus detalles explícitos. Por ejemplo, para la componente x de (4.16) o (4.17) tendríamos:

$$E_x(x_1,y_1,z_1)=\int\limits_{\substack{\text{todo el}\\ \text{espacio}}}\frac{(x_1-x_2)\rho(x_2,y_2,z_2)\,dx_2\,dy_2\,dz_2}{4\pi\epsilon_0[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2]^{3/2}}. \tag{4.18}$$

No vamos a usar mucho esta fórmula. La escribimos aquí sólo para recalcar que hemos resuelto completamente todos los problemas electrostáticos en que conocemos la ubicación de todas las cargas. Dadas las cargas, ¿cuáles son los campos? *Respuesta*: calculen esta integral. Así pues, no hay nada más en el tema; es simplemente un caso de calcular integrales en tres dimensiones —¡estrictamente un trabajo para una máquina de calcular!—.

Con nuestras integrales podemos hallar los campos producidos por una hoja de cargas, por una línea de cargas, por un cascarón esférico de cargas o por cualquier distribución especificada. Es importante darse cuenta, al continuar para dibujar las líneas de campo, hablar de potenciales o calcular divergencias, que ya tenemos la respuesta aquí. Es simplemente cuestión de que a veces es más fácil hacer una integral con una conjetura ingeniosa que calcularla realmente. Para hacer conjeturas es necesario aprender todo tipo de cosas extrañas. En la práctica puede que sea más fácil olvidarse de tratar de ser ingenioso y hacer siempre la integral directamente en vez de ser listo. Sin embargo, vamos a tratar de ser listos. Discutiremos a continuación algunas otras características del campo eléctrico.

4-3 El potencial eléctrico

Tomemos primero el concepto de potencial eléctrico, que está relacionado con el trabajo que se realiza al llevar una carga de un punto a otro. Hay cierta distribución de carga que produce un campo eléctrico. Preguntamos cuánto trabajo se necesitaría para llevar una carga de un lugar a otro. El trabajo realizado *contra* las fuerzas eléctricas al llevar una carga a lo largo de cierto camino es *menos* la componente de la fuerza eléctrica en la dirección del movimiento, integrada a lo largo del camino. Si llevamos una carga de un punto a a un punto b, entonces tenemos:

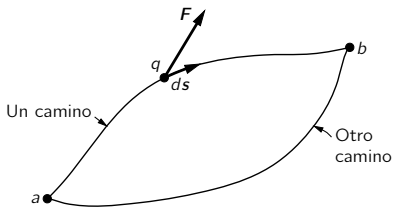


Figura 4-2. El trabajo realizado al llevar una carga desde a hasta b es menos la integral de $\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$ lo largo del camino seguido.

$$W=-\int_a^b \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s},$$

donde $\boldsymbol{F}$ es la fuerza eléctrica *sobre* la carga de cada punto y $d\boldsymbol{s}$ es el vector desplazamiento diferencial a lo largo del camino. (Véase la figura 4-2.) Para nuestros fines es más interesante considerar el trabajo que se realizaría al llevar *una unidad* de carga. Entonces la fuerza sobre la carga es numéricamente igual al campo eléctrico. Llamando $W(\text{unidad})$ al trabajo realizado contra las fuerzas eléctricas en este caso, escribimos

$$W(\text{unidad})=-\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}. \tag{4.19}$$

Ahora bien, lo que obtenemos en general con este tipo de integral depende del camino que tomemos. Pero si la integral en (4.19) dependiera del camino de a a b, podríamos obtener trabajo del campo llevando la carga hasta b por un camino y luego de vuelta hasta a por otro. Iríamos hasta b por un camino para el cual W fuera menor y *volveríamos* por el otro, *sacando* más trabajo del que *ponemos*.

En principio no es imposible obtener energía de un campo. De hecho, encontraremos campos donde es posible. Podría ser que a medida que mueven una carga producen fuerzas en la otra parte de la "maquinaria". Si la "maquinaria" se moviera contra la fuerza, perdería energía y de esa manera mantendría constante

la energía del universo. Sin embargo, no hay tal "maquinaria" para la *electrostática*. Sabemos cuáles son las fuerzas de reacción sobre las fuentes del campo. Son las fuerzas de Coulomb sobre las cargas que originan el campo. Si las otras cargas tienen posición fija —tal como suponemos sólo en la *electrostática*— las fuerzas de reacción no pueden realizar trabajo sobre ellas. No hay manera de obtener energía de ellas —siempre que, por supuesto, el principio de conservación de la energía funcione en situaciones electrostáticas—. Creemos que funcionará, pero demostremos que debe ser una consecuencia de la ley de fuerza de Coulomb.

Consideremos primero lo que ocurre en el campo debido a una sola carga q. Tomemos el punto a a una distancia r_a de q y b a r_b. Llevemos ahora una carga diferente, que llamaremos carga "de prueba" y cuyo valor elegimos como unidad, desde a hasta b. Comencemos con el camino más simple de calcular. Llevamos nuestra carga de prueba primero a lo largo de un arco de circunferencia, luego a lo largo de un radio, como se muestra en la parte (a) de la figura 4-3. Ahora bien, para ese camino particular es un juego de niños hallar el trabajo realizado (de lo contrario no lo hubiéramos elegido). Primero, no hay ningún trabajo al ir desde a hasta a'. El campo es radial (según la ley de Coulomb), de modo que es perpendicular a la dirección de movimiento. Segundo, en el camino desde a' hasta b el campo está en la dirección del movimiento y varía como $1/r^2$. Así, el trabajo realizado sobre la carga de prueba al llevarla desde a hasta b sería

$$-\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{a'}^b \frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right). \tag{4.20}$$

Tomemos ahora otro camino fácil. Por ejemplo el que se muestra en la parte (b) de la figura 4-3. Va un poco a lo largo de un arco de circunferencia, luego otro poco radialmente, luego a lo largo de un arco nuevamente, luego radialmente y así sucesivamente. Siempre que recorremos las partes circulares no efectuamos ningún trabajo. A lo largo del primer tramo radial integramos de r_a a $r_{a'}$; luego a lo largo del siguiente tramo radial de $r_{a'}$ a $r_{a''}$ y así sucesivamente. La suma de todas estas integrales es lo mismo que una sola integral entre r_a y r_b. Obtenemos la misma respuesta para este camino que para el que probamos primero. Está claro que obtendríamos la primera respuesta para *cualquier* camino construido con un número arbitrario de tramos del mismo tipo.

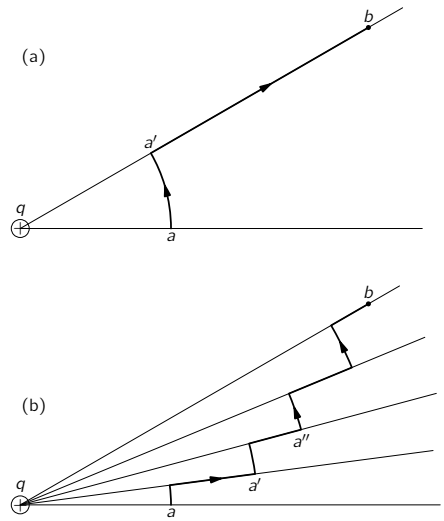


Figura 4-3. Al llevar una carga de prueba desde *a* hasta *b*, se realiza el mismo trabajo a lo largo de cualquiera de los dos caminos.

¿Y qué pasa con los caminos suaves? ¿Obtenemos la misma respuesta? Discutimos este punto anteriormente en el capítulo 13 del volumen I. Empleando los mismos razonamientos que usamos allí podemos concluir que el trabajo realizado al llevar una carga unida desde a hasta b es independiente del camino.

$$\left.\begin{matrix} W(\text{unidad}) \\ a\to b \end{matrix}\right\} = -\int_{\substack{a \\ \text{cualquier} \\ \text{camino}}}^{b} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}.$$

Como el trabajo realizado depende únicamente de los extremos, se lo puede representar como la diferencia entre dos números. Podemos ver esto de la siguiente manera. Elijamos un punto P_0 de referencia y acordemos calcular nuestra integral usando un camino que siempre *pase por* el punto P_0. Sea $\phi(a)$ el trabajo realizado contra el campo al ir *desde* P_0 hasta el punto a y consideramos $\phi(b)$ el trabajo realizado al ir *desde* P_0 hasta el punto b (figura 4-4). El trabajo realizado al ir *hasta* P_0 desde a (en camino hacia b) es menos $\phi(a)$, de modo que tenemos

$$-\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = \phi(b)-\phi(a). \tag{4.21}$$

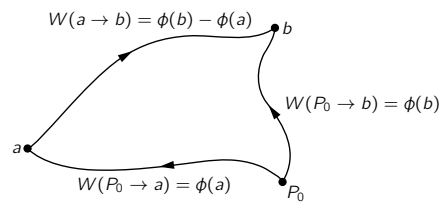


Figura 4-4. El trabajo realizado al recorrer cualquier camino desde *a* hasta *b*, es menos el trabajo desde cierto punto P_0 hasta *a* y se suma el trabajo desde P_0 hasta *b*.

Como siempre interviene únicamente la diferencia de la función ϕ en los dos puntos, en realidad no tenemos que especificar la ubicación de P_0. Sin embargo, una vez elegido un punto de referencia, queda determinado un número ϕ para *todo* punto del espacio; ϕ es entonces un *campo escalar*. Es una función de x, y, z. Llamamos a esta función escalar el *potencial electrostático* en cada punto.

Potencial electrostático:

$$\phi(P) = -\int_{P_0}^{P} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s}. \tag{4.22}$$

Por conveniencia, tomaremos a menudo el punto de referencia en el infinito. Entonces, para una sola carga en el origen, el potencial está dado para cualquier punto (x, y, z) —usando la ecuación (4.20)—:

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r}. \tag{4.23}$$

El campo eléctrico de varias cargas se puede escribir como suma del campo eléctrico de la primera, el de la segunda, el de la tercera, etc. Al integrar esta suma para hallar el potencial obtenemos una suma de integrales. Cada una de las integrales es el negativo del potencial de una de las cargas. Concluimos que el potencial ϕ de muchas de las cargas es la suma de los potenciales de todas y cada una de ellas. También hay un principio de superposición de los potenciales. Usando el mismo tipo de razonamiento por el que encontramos el campo de un grupo de cargas y de una distribución de cargas, podemos obtener las fórmulas completas para el potencial ϕ en un punto que llamamos (1):

$$\phi(1) = \sum_j \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q_j}{r_{1j}}, \tag{4.24}$$

$$\phi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int\limits_{\substack{\text{todo el}\\ \text{espacio}}} \frac{\rho(2)\,dV_2}{r_{12}}. \tag{4.25}$$

Recuerden que el potencial ϕ tiene un significado físico: es la energía potencial que tendría una unidad de carga si se la trajera al punto especificado del espacio desde cierto punto de referencia.

4-4 $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$

¿Y a quién le importa ϕ? Las fuerzas sobre las cargas están dadas por $\boldsymbol{E}$, el campo eléctrico. La cuestión es que se puede obtener fácilmente $\boldsymbol{E}$ de ϕ —por cierto, es tan fácil como derivar—. Consideren dos puntos, uno en x y otro en $(x + \Delta x)$, pero ambos con los mismos y y z, y busquen cuánto trabajo se realiza al llevar una carga unitaria desde un punto hasta el otro. El camino es a lo largo de la línea horizontal entre x y $x + \Delta x$. El trabajo realizado es la diferencia de los potenciales en los dos puntos:

$$\Delta W = \phi(x + \Delta x, y, z) - \phi(x, y, z) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\,\Delta x.$$

Pero el trabajo realizado contra el campo en el mismo camino es:

$$\Delta W = -\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = -E_x\,\Delta x.$$

Vemos que

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x}. \tag{4.26}$$

Análogamente, $E_y = -\partial\phi/\partial y$, $E_z = -\partial\phi/\partial z$ o sea, resumiendo con la notación del cálculo vectorial,

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi. \tag{4.27}$$

Esta ecuación es la forma diferencial de la ecuación (4.22). Cualquier problema con cargas especificadas se puede resolver calculando el potencial con (4.24) o (4.25) y usando (4.27) para obtener el campo. La ecuación (4.27) concuerda

también con lo que encontramos en el cálculo vectorial: que para cualquier campo escalar ϕ

$$\int_a^b \boldsymbol{\nabla}\phi \cdot d\boldsymbol{s} = \phi(b) - \phi(a). \tag{4.28}$$

Conforme a la ecuación (4.25) el potencial escalar ϕ está dado por una integral triple similar a la que teníamos para $\boldsymbol{E}$. ¿Hay alguna ventaja en calcular ϕ en vez de $\boldsymbol{E}$? Sí. Hay una sola integral para ϕ, mientras que hay tres integrales para $\boldsymbol{E}$ —porque es un vector—. Además, $1/r$ es generalmente un poco más fácil de integrar que x/r^3. En muchos casos prácticos resulta que es más fácil calcular ϕ y luego tomar el gradiente para hallar el campo eléctrico, que calcular las tres integrales correspondientes a $\boldsymbol{E}$. Es sencillamente una cuestión práctica.

Hay también un significado físico más profundo para el potencial ϕ. Hemos demostrado que $\boldsymbol{E}$ de la ley de Coulomb se obtiene de $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\phi$, cuando ϕ está dado por (4.22). Pero si $\boldsymbol{E}$ es igual al gradiente de un campo escalar, sabemos por el cálculo vectorial que el rotacional de $\boldsymbol{E}$ debe ser cero:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0. \tag{4.29}$$

Pero ésta es precisamente nuestra segunda ecuación fundamental de la electrostática, ecuación (4.6). Hemos demostrado que la ley de Coulomb da un campo $\boldsymbol{E}$ que satisface esa condición. Hasta ahora todo está correcto.

En realidad habíamos demostrado que $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}$ era cero antes de definir el potencial. Habíamos demostrado que el trabajo realizado a lo largo de un camino cerrado es cero. Es decir que

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$$

para *cualquier* camino. Vimos en el capítulo 3 que para cualquier campo de este tipo , $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}$ debe ser cero en todas partes. El campo eléctrico en la electrostática es un ejemplo de campo a rotacional nulo.

Pueden practicar su cálculo vectorial demostrando de un modo diferente que $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}$ es cero —calculando las componentes de $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}$ para el campo de una carga puntual dado por la ecuación (4.11)—. Si obtienen cero, el principio de superposición les dice que obtendrían cero para el campo de cualquier distribución de carga.

Debemos señalar un hecho importante. Para cualquier fuerza *radial* el trabajo realizado es independiente del camino y existe un potencial. Si lo piensan un poco, todo el razonamiento que hicimos más arriba para demostrar que la integral del trabajo era independiente del camino, dependía únicamente de que la fuerza debida a una sola carga era radial y con simetría esférica. No provenía de que la exigencia de la distancia era como $1/r^2$ —podría haber cualquier dependencia de r—. La existencia de un potencial y el que el rotacional de $\boldsymbol{E}$ sea cero, proviene en realidad sólo de la *simetría* y de la *dirección* de las fuerzas electrostáticas. A causa de esto, la ecuación (4.28) —o la (4.29)— pueden contener sólo una parte de las leyes de la electricidad.

4-5 El flujo de $\boldsymbol{E}$

Deduciremos ahora una ecuación de campo que depende específica y directamente de que la ley de fuerza es inversa del cuadrado. Algunos consideran que es "sencillamente natural" que el campo varíe con la inversa del cuadrado de la distancia, porque "ésa es la manera en que las cosas se difunden". Tomen una fuente luminosa: la cantidad de luz que atraviesa una superficie determinada por un cono con su vértice en la fuente es la misma, cualquiera que sea el radio a que se coloque la superficie. Debe ser así para que se conserve la energía luminosa. La cantidad de luz por unidad de área —la intensidad— debe variar inversamente a la superficie cortada por el cono, es decir, con la inversa del cuadrado de la distancia a la fuente. ¡Está claro que el campo eléctrico debe variar inversamente

al cuadrado de la distancia por la misma razón! Pero aquí no hay tal cosa como "la misma razón". Nadie puede decir que el campo eléctrico mide el flujo de algo como la luz, el cual se debe conservar. *Si* tuviéramos un "modelo" del campo eléctrico según el cual el vector del campo eléctrico representara la dirección y la velocidad —la corriente, digamos— de una especie de "balas" pequeñas en vuelo, y si nuestro modelo requiriese que estas balas se conservasen, que ninguna pudiese desaparecer nunca una vez que fuese disparada por una carga, entonces podríamos decir que podemos "ver" que la ley de la inversa del cuadrado es necesaria. Por otra parte, debería haber necesariamente una manera matemática de expresar esta idea física. Si el campo eléctrico *fuera* como balas disparadas que se conservan, entonces variaría inversamente al cuadrado de la distancia y tendríamos que poder describir ese comportamiento con una ecuación —que es puramente matemática—. Ahora bien, no hay nada de malo en pensar de este modo en tanto no digamos que el campo eléctrico *está hecho* de balas, pero dense cuenta que estamos usando un modelo para que nos ayude a encontrar la matemática correcta.

Supongan, por cierto, que imaginamos por un momento que el campo eléctrico representa el flujo de algo que se conserva —en todas partes, es decir, excepto en las cargas—. (¡Tiene que comenzar en alguna parte!) Imaginamos que algo que no importa lo que es fluye de una carga hacia el espacio que la rodea. Si $\boldsymbol{E}$ fuera el vector de ese flujo (como lo es $\boldsymbol{h}$ para el flujo de calor), tendría una dependencia de la forma $1/r^2$ cerca de una fuente puntual. Ahora queremos usar este modelo para encontrar cómo enunciar la ley de la inversa del cuadrado en forma más profunda o más abstracta, en vez de decir simplemente "inversa del cuadrado". (Ustedes se preguntarán por qué querríamos evitar el enunciado de una ley tan simple, y pretender en su lugar decir lo mismo en forma diferente. ¡Tengan paciencia! Van a ver que es útil.)

Preguntamos: ¿cuál es el "flujo" de $\boldsymbol{E}$ que sale por una superficie cerrada arbitraria en la vecindad de una carga puntual? Tomemos primero una superficie fácil —la que muestra la figura 4-5—. Si el campo $\boldsymbol{E}$ es como algo que fluye, el flujo neto que sale de esta caja debe ser cero. Esto es lo que obtenemos si por "flujo" a través de esta caja entendemos la integral de superficie de la componente normal de $\boldsymbol{E}$ —es decir, el flujo (en sentido matemático) de $\boldsymbol{E}$—. Sobre las caras radiales la componente normal es cero. Sobre las caras esféricas la componente normal E_n es simplemente el módulo de $\boldsymbol{E}$ —menos para la cara pequeña y más para la mayor—. El módulo de $\boldsymbol{E}$ decrece como $1/r^2$, pero el área de la superficie es proporcional a r^2, de modo que el producto es independiente de r. El flujo de $\boldsymbol{E}$ hacia la cara a compensa exactamente el flujo desde la cara b. El flujo total que sale de S es cero, lo cual significa que para esta superficie

$$\int_S E_n \, da = 0. \tag{4.30}$$

Demostremos ahora que se pueden inclinar las dos superficies de los extremos respecto a la línea radial sin cambiar la integral (4.30). Aunque es válido en

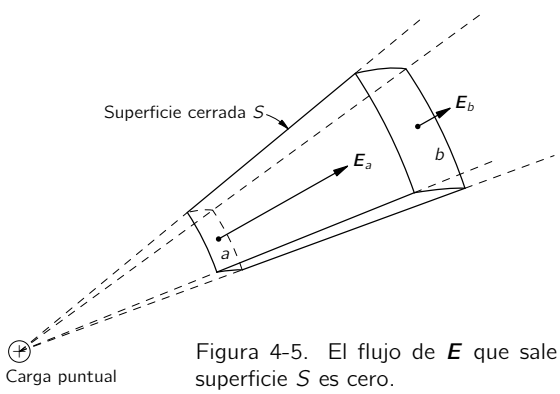


Figura 4-5. El flujo de $\boldsymbol{E}$ que sale de la superficie S es cero.

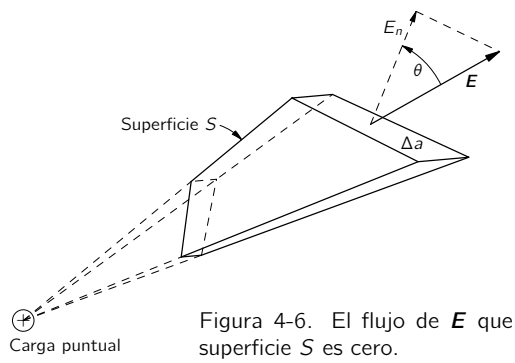


Figura 4-6. El flujo de $\boldsymbol{E}$ que sale de la superficie S es cero.

general, para nuestros fines sólo es necesario demostrar que es válido cuando las superficies son pequeñas, de modo que subtienden un ángulo pequeño en la fuente —en realidad, un ángulo infinitesimal—. En la figura 4-6 mostramos una superficie S cuyos "lados" son radiales, pero cuyos "extremos" están inclinados. Las superficies de los extremos no son pequeñas en la figura, pero se tienen que imaginar el caso en que son muy pequeñas. Entonces el campo $\boldsymbol{E}$ será lo suficientemente uniforme sobre la superficie como para que podamos usar simplemente su valor en el centro. Al inclinar la superficie en un ángulo θ, el área aumenta en el factor $1/\cos\theta$. Pero E_n, la componente de $\boldsymbol{E}$ normal a la superficie, disminuye en el factor $\cos\theta$. El producto $E_n\Delta_a$ no varía. El flujo que sale de toda la superficie S sigue siendo cero.

Ahora bien, es fácil ver que el flujo que sale de un volumen encerrado por *cualquier* superficie S debe ser cero. Se puede considerar que cualquier volumen está hecho de pedazos como el de la figura 4-6. La superficie quedará subdividida completamente en pares de superficies terminales, y el flujo total que sale de la superficie será cero. La idea está ilustrada en la figura 4-7. Tenemos el resultado completamente general de que el flujo total de $\boldsymbol{E}$ que atraviesa *cualquier* superficie S en el campo de una carga puntual es cero.

¡Pero fíjense! Nuestra demostración funciona únicamente si la superficie S *no rodea* la carga. ¿Qué ocurriría si la carga puntual estuviera *dentro* de la superficie? Todavía podríamos dividir nuestra superficie en pares de áreas apareadas por medio de líneas radiales que pasan por la carga, tal como lo muestra la figura 4-8. Los flujos a través de las dos superficies siguen siendo iguales —por las mismas razones anteriores— sólo que ahora tienen el *mismo* signo. El flujo que sale de una superficie que *rodea* una carga *no* es cero. ¿Cuánto vale entonces? Podemos hallarlo con un pequeño truco. Supongan que "sacamos" la carga del "interior" rodeándola con una pequeña superficie S' totalmente contenida en la superficie original S, como lo muestra la figura 4-9. Ahora el volumen encerrado *entre* las dos superficies S y S' no contiene ninguna carga. El flujo total que sale de este volumen (incluyendo el que atraviesa S') es cero, por el razonamiento hecho anteriormente. Ese razonamiento nos dice, en verdad, que el flujo que *entra* en el volumen a través de S' es igual al flujo que sale a través de S.

Podemos elegir la forma que queramos para S', de modo que tomemos una esfera centrada en la carga, como en la figura 4-10. Entonces podemos calcular fácilmente el flujo que la atraviesa. Si r es el radio de la pequeña esfera, el valor de $\boldsymbol{E}$ en todo punto de su superficie es:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{r^2},$$

y está dirigido según la normal a la superficie. Encontramos el flujo total a través de S' multiplicando esta componente normal de $\boldsymbol{E}$ por el área de la superficie:

$$\text{Flujo a través de la superficie } S' = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{r^2}\right)(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}, \tag{4.31}$$

¡que es un número independiente del radio de la esfera! Sabemos entonces que el flujo que sale a través de S también es q/ϵ_0 —que es un valor independiente de S mientras la carga q esté dentro—.

Podemos escribir nuestras conclusiones como sigue:

$$\int_{\substack{\text{cualquier superficie}\\ \text{cerrada } S}} E_n\,da = \begin{cases} 0; & q \text{ fuera de } S \\ \dfrac{q}{\epsilon_0}; & q \text{ dentro de } S \end{cases} \tag{4.32}$$

Volvamos a nuestra analogía de las "balas" y veamos si tiene sentido. Nuestro teorema dice que el flujo neto de balas a través de la superficie es cero si la superficie no encierra el arma que dispara las balas. Si el arma está rodeada por una superficie, cualesquiera sean su forma y su tamaño, el número de balas que atraviesa esa superficie es el mismo —está dado por la rapidez con que el arma

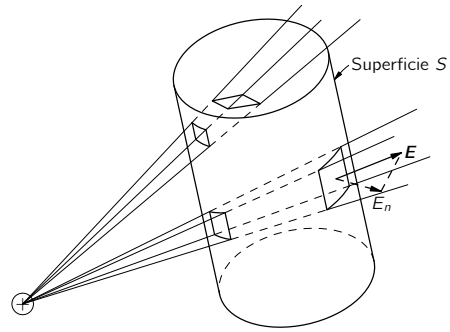


Figura 4-7. Se puede considerar cualquier volumen como construido completamente con conos infinitesimales truncados. El flujo de $\boldsymbol{E}$ por un extremo de cada segmento cónico es igual y opuesto al flujo por el otro extremo. El flujo total por la superficie S es por lo tanto cero.

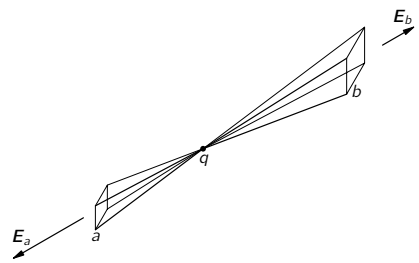


Figura 4-8. Si una carga está dentro de una superficie, el flujo saliente no es cero.

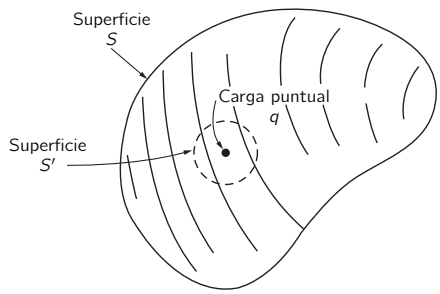


Figura 4-9. El flujo a través de S es el mismo que a través de S'.

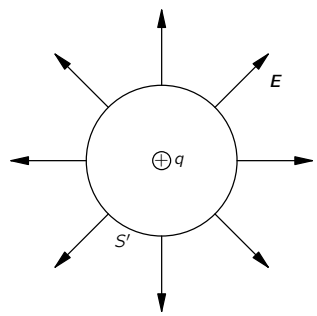


Figura 4-10. El flujo a través de una superficie esférica que contiene una carga puntual q es q/ϵ_0.

genera las balas—. Todo parece muy razonable para balas que se conservan. Pero ¿acaso nos dice el modelo algo más que lo que obtenemos escribiendo simplemente la ecuación (4.32)? Nadie ha logrado que estas "balas" hagan algo más que producir esta única ley. Después de eso no producen sino errores. Por eso hoy preferimos representar el campo electromagnético en forma puramente abstracta.

4-6 Ley de Gauss; la divergencia de $\boldsymbol{E}$

Nuestro bonito resultado, ecuación (4.32), fue demostrado para una sola carga puntual. Supongan ahora que hay dos cargas, una carga q_1 en un punto y una carga q_2 en otro. El problema parece más difícil. El campo eléctrico cuya componente normal integramos para el flujo es el campo debido a ambas cargas. Es decir, si $\boldsymbol{E}_1$ representa el campo eléctrico que habría producido q_1 sola y $\boldsymbol{E}_2$ representa el campo eléctrico producido por q_2 sola, el campo eléctrico total es $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$. El flujo a través de cualquier superficie cerrada S es:

$$\int_S (E_{1n} + E_{2n})\,da = \int_S E_{1n}\,da + \int_S E_{2n}\,da. \tag{4.33}$$

Cuando hay dos cargas el flujo es la suma del flujo debido a una sola carga más el flujo debido a la otra carga. Si ambas cargas están fuera de S, el flujo a través de S es cero. Si q_1 está dentro de S y q_2 fuera, la primera integral da q_1/ϵ_0 y la segunda da cero. Si la superficie encierra las dos cargas, cada una de ellas dará su contribución y tendremos que el flujo es $(q_1 + q_2)/\epsilon_0$. La regla general es claramente que el flujo total que sale de una superficie cerrada es igual a la carga total que hay *dentro* dividida entre ϵ_0.

Nuestro resultado es una importante ley general del campo electrostático, llamada ley de Gauss.

Ley de Gauss:

$$\int_{\substack{\text{cualquier superficie}\\ \text{cerrada } S}} E_n\,da = \frac{\text{suma de las cargas interiores}}{\epsilon_0}, \tag{4.34}$$

o

$$\int_{\substack{\text{cualquier superficie}\\ \text{cerrada } S}} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,da = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}, \tag{4.35}$$

donde

$$Q_{\text{int}} = \sum_{\text{dentro de } S} q_i. \tag{4.36}$$

Si describimos la ubicación de las cargas por medio de una densidad de carga ρ, entonces podemos considerar que cada volumen infinitesimal dV contiene una carga "puntual" $\rho\,dV$. La suma sobre todas las cargas es entonces la integral

$$Q_{\text{int}} = \int_{\substack{\text{volumen}\\ \text{dentro de } S}} \rho\,dV. \tag{4.37}$$

Por la manera como fue obtenida, ven que la ley de Gauss se deduce del hecho de que el exponente en la ley de Coulomb es exactamente dos. Un campo tipo $1/r^3$, o cualquier campo tipo $1/r^n$ con $n \neq 2$, no daría la ley de Gauss. Por lo tanto, la ley de Gauss es simplemente otra forma de expresar la ley de Coulomb para las fuerzas entre dos cargas. Por cierto, yendo hacia atrás desde la ley de Gauss pueden deducir la ley de Coulomb. Las dos son completamente equivalentes en tanto recordemos la regla de que la fuerza entre las cargas son radialales.

Nos gustaría ahora describir la ley de Gauss usando derivadas. Para ello, apliquemos la ley de Gauss a una superficie cúbica infinitesimal. Demostramos en el capítulo 3 que el flujo de $\boldsymbol{E}$ a través de ese cubo es $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}$ por el volumen

dV del mismo. La carga contenida en dV es, por definición de ρ, igual a $\rho\,dV$, de modo que la ley de Gauss da:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}\,dV=\frac{\rho\,dV}{\epsilon_0},$$

o sea

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{4.38}$$

La forma diferencial de la ley de Gauss es la primera de nuestras ecuaciones fundamentales de campo de la electrostática, ecuación (4.5). Hemos demostrado ahora que las dos ecuaciones de la electrostática, ecuaciones (4.5) y (4.6), son equivalentes a la ley de Coulomb para la fuerza. Consideremos un ejemplo del empleo de la ley de Gauss (más adelante veremos muchos ejemplos más).

4-7 El campo de una esfera cargada

Uno de los problemas difíciles que tuvimos al estudiar la teoría de las atracciones gravitacionales fue demostrar que la fuerza producida por una esfera sólida de materia era, en la superficie de la misma, igual a la que se obtendría si toda la materia estuviera concentrada en el centro. Por muchos años, Newton no dio publicidad a su teoría de la gravitación porque no estaba seguro de la validez de este teorema. Demostramos el teorema en el capítulo 13 del volumen I haciendo la integral para el potencial y luego hallando la fuerza usando el gradiente. Ahora podemos mostrar el teorema en una forma más simple. Sólo que esta vez demostraremos el teorema correspondiente a una esfera uniforme de carga eléctrica. (Como las leyes de la electrostática son las mismas que las de la gravitación, se podría hacer la misma demostración para el campo gravitacional.)

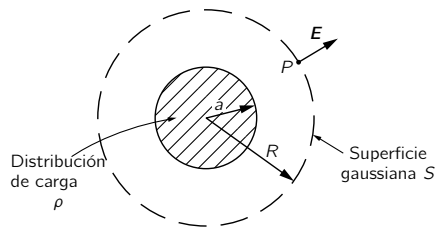


Figura 4-11. Usando la ley de Gauss para hallar el campo de una esfera uniforme de carga.

La pregunta es: ¿cuál es el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ en un punto P en cualquier parte fuera de la superficie de una esfera llena con una distribución uniforme de carga? Como no hay ninguna dirección "especial" podemos suponer que en todo punto $\boldsymbol{E}$ está dirigido alejándose del centro de la esfera. Consideremos una superficie esférica imaginaria concéntrica con la esfera de carga y que pasa por el punto P (figura 4-11). Para esta superficie, el flujo saliente es:

$$\int E_n\,da=E\cdot 4\pi R^2.$$

La ley de Gauss dice que este flujo es igual a la carga total Q de la esfera (sobre ϵ_0):

$$E\cdot 4\pi R^2=\frac{Q}{\epsilon_0},$$

o

$$E=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{Q}{R^2}, \tag{4.39}$$

que es la misma fórmula que tendríamos para una carga puntual Q. Hemos demostrado el problema de Newton mucho más fácilmente que haciendo la integral. Naturalmente, es una facilidad falsa —les ha costado cierto tiempo estar en condiciones de comprender la ley de Gauss, de modo que estarán pensando que realmente no se ha ahorrado tiempo—. Pero después que hayan usado el teorema una y otra vez, éste comenzará a dar sus frutos. Es cuestión de eficiencia.

4-8 Líneas de campo; las superficies equipotenciales

Ahora nos gustaría dar una descripción geométrica del campo electrostático. Las dos leyes de la electrostática, una que el flujo es proporcional a la carga que hay dentro y la otra que el campo eléctrico es el gradiente de un potencial, se pueden representar geométricamente. Ilustraremos esto con dos ejemplos.

Tomemos primero el campo de una carga puntual. Dibujamos líneas en la dirección del campo —líneas siempre tangentes al campo como en la figura

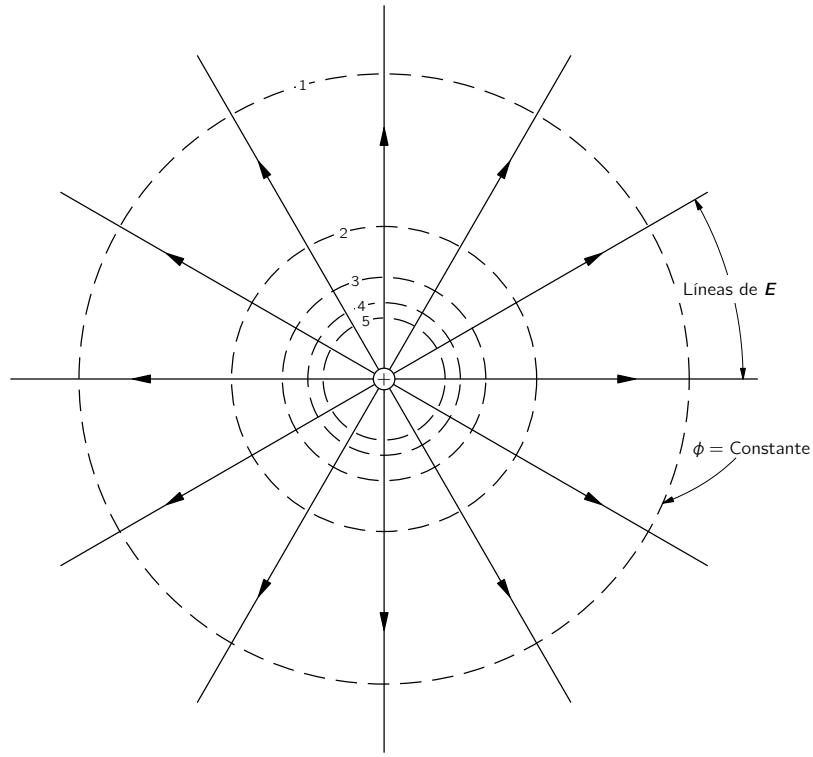


Figura 4-12. Líneas de campo y superficies equipotenciales de una carga puntual positiva.

4-12—. Se llaman *líneas de campo*. Las líneas muestran en todas partes la dirección del vector eléctrico. Pero también queremos representar el módulo del vector. Podemos adoptar la regla de que la intensidad del campo eléctrico estará representada por la "densidad" de líneas. Por densidad de líneas entendemos el número de líneas por unidad de área sobre una superficie perpendicular a las líneas. Con estas dos reglas podemos tener una imagen del campo eléctrico. Para una carga puntual, la densidad de las líneas debe decrecer como $1/r^2$. Pero el área de una superficie esférica perpendicular a las líneas a cualquier radio r *aumenta* como r^2, de modo que si mantenemos siempre el mismo *número* de líneas a *toda* distancia de la carga, la *densidad* seguirá siendo proporcional al módulo del campo. Podemos garantizar que hay el mismo número de líneas a cualquier distancia si insistimos en que las líneas sean *continuas* —que una vez que una línea comenzó en la carga, nunca se detiene—. En términos de líneas de campo, la ley de Gauss dice que las líneas deben comenzar únicamente en las cargas positivas y terminar en las negativas. El número que *sale* de una carga q debe ser igual a q/ϵ_0.

Ahora bien, podemos encontrar una imagen geométrica similar para el potencial ϕ. La manera más fácil de representar el potencial es dibujar superficies sobre las cuales ϕ es constante. Las llamamos superficies *equipotenciales* —superficies de igual potencial—. Ahora bien, ¿cuál es la relación geométrica entre superficies equipotenciales y líneas de campo? El campo eléctrico es el gradiente del potencial. El gradiente está en la dirección en que el potencial varía más rápidamente, siendo por lo tanto perpendicular a una superficie equipotencial. Si $\boldsymbol{E}$ *no* fuera perpendicular a la superficie, tendría una componente *en* la superficie. El potencial estaría variando sobre la superficie, pero entonces no sería una equipotencial. Las superficies equipotenciales deben ser entonces perpendiculares en todo punto a las líneas de campo.

Para una carga puntual sola, las superficies equipotenciales son esferas centradas en la carga. Hemos mostrado en la figura 4-12 la intersección de estas esferas con un plano que pasa por la carga.

Como segundo ejemplo, consideremos el campo cerca de dos cargas iguales, una

Una nota sobre unidades

Cantidad	*Unidad*
F	newton
Q	coulomb
L	metro
W	joule
$\rho \sim Q/L^3$	coulomb/metro^3
$1/\epsilon_0 \sim FL^2/Q^2$	newton $\cdot$ metro^2/coulomb^2
$E \sim F/Q$	newton/coulomb
$\phi \sim W/Q$	joule/coulomb = volt
$E \sim \phi/L$	volt/metro
$1/\epsilon_0 \sim EL^2/Q$	volt $\cdot$ metro/coulomb

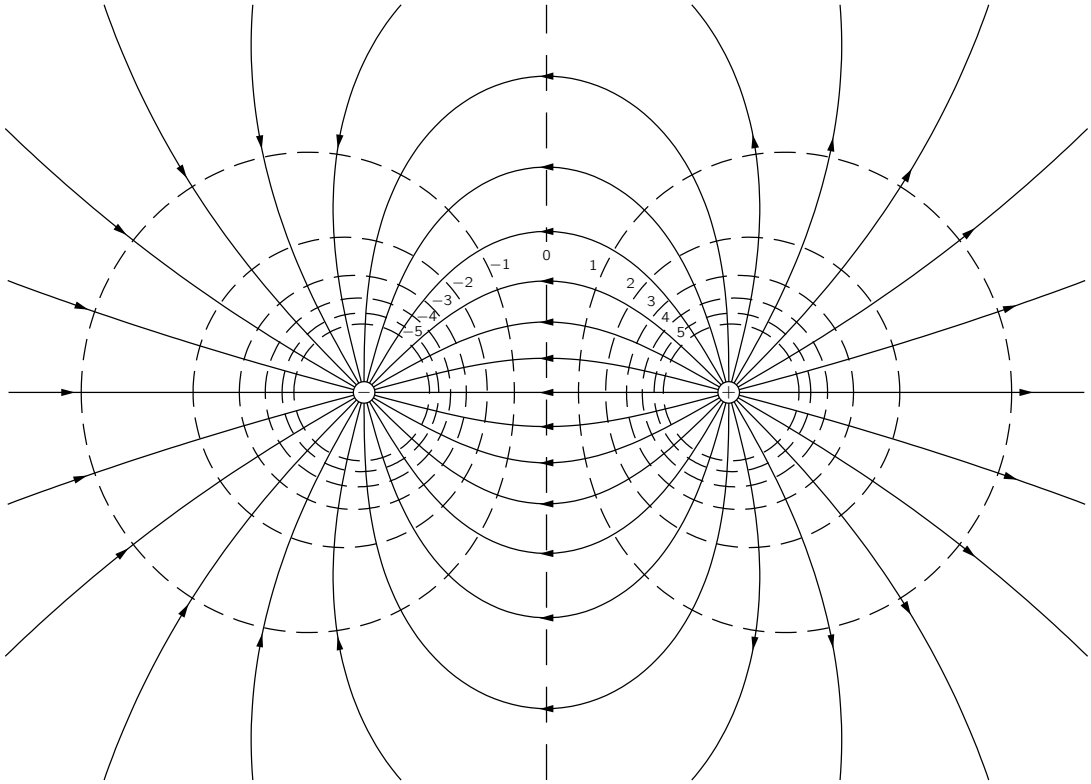


Figura 4-13. Líneas de campo y equipotenciales de dos cargas puntuales iguales y opuestas.

positiva y otra negativa. Es fácil obtener el campo. El campo es la superposición de los campos originados por cada una de las dos cargas. Así pues, podemos tomar dos figuras como la figura 4-12 y superponerlas —¡imposible!—. Tendríamos entonces líneas de campo que se cruzan entre sí, lo cual no es posible, porque $\boldsymbol{E}$ no puede tener *dos* direcciones en el mismo punto. La desventaja de la representación con líneas de campo se hace evidente ahora. Con razonamientos geométricos es imposible analizar de una manera simple por dónde van las nuevas líneas. No podemos obtener una representación combinada a partir de dos representaciones independientes. El principio de superposición, que es un principio simple y profundo sobre campos eléctricos, no tiene una representación fácil en la imagen de líneas de fuerza.

Sin embargo, la imagen de líneas de fuerza tiene sus usos, por lo que, de todas maneras, querríamos hacer el dibujo correspondiente a un par de cargas iguales (y opuestas). Si calculamos los campos con la ecuación (4.13) y los potenciales con (4.24), podemos trazar las líneas de campo y las equipotenciales. La figura 4-13 muestra el resultado. ¡Pero primero tuvimos que resolver el problema matemáticamente!

5

Aplicaciones de la ley de Gauss

5-1 La electrostática es la ley de Gauss más...

5-2 El equilibrio en un campo electrostático

5-3 El equilibrio en presencia de conductores

5-4 Estabilidad de los átomos

5-5 El campo de una línea cargada

5-6 Una hoja cargada; dos hojas

5-7 La esfera cargada; cascarón esférico

5-8 ¿Es el campo de una carga puntual exactamente $1/r^2$?

5-9 Los campos de un conductor

5-10 El campo en una cavidad de un conductor

5-1 La electrostática es la ley de Gauss más...

Hay dos leyes en la electrostática: que el flujo de un campo eléctrico saliente de un volumen es proporcional a la carga dentro de él —ley de Gauss—, y que la circulación de un campo eléctrico es nula —$\boldsymbol{E}$ es un gradiente—. Todas las predicciones de la electrostática se derivan de estas dos leyes. Pero decir estas cosas matemáticamente es una cosa, y utilizarlas con facilidad y con un cierto grado de habilidad es otra. En este capítulo efectuaremos una cierta cantidad de cálculos que pueden ser realizados directamente aplicando la ley de Gauss. Vamos a demostrar ciertos teoremas y a describir algunos fenómenos, en particular en los conductores, que se pueden comprender fácilmente a partir de la ley de Gauss. La ley de Gauss por sí sola no puede dar la solución a algunos problemas, dado que la otra ley también debe cumplirse. Así pues, cuando utilicemos la ley de Gauss para la resolución de problemas particulares, deberemos agregar algunas cosas. Deberemos presuponer, por ejemplo, algunos conceptos sobre la forma del campo —basados, por ejemplo, en argumentos de simetría—. O bien deberemos introducir específicamente la idea de que el campo es el gradiente de un potencial.

5-2 El equilibrio en un campo electrostático

Consideremos primero el siguiente problema: ¿cuándo una carga puntual puede estar en equilibrio mecánico estable en el campo eléctrico de otras cargas? Como un ejemplo imaginemos tres cargas negativas en los vértices de un triángulo equilátero en un plano horizontal. ¿Puede una carga positiva ubicada en el centro permanecer en reposo? (Para simplificar el problema no tendremos en cuenta la gravedad, aunque si la tuviésemos en cuenta no cambiaría los resultados.) La fuerza sobre la carga positiva es cero, pero ¿el equilibrio es estable? ¿Puede la carga volver a la posición de equilibrio si se la desplaza ligeramente? La respuesta es no.

No hay puntos de equilibrio estable en *ningún* campo electrostático —excepto sobre otra carga—. Utilizando la ley de Gauss, es fácil ver por qué. Primero, para que una carga esté en equilibrio en un punto particular P_0, el campo debe ser cero. En segundo lugar, para que el equilibrio sea estable, se requiere que si se mueve la carga de P_0 en *cualquier* dirección, deben existir fuerzas de restauración en sentido opuesto al desplazamiento. El campo eléctrico en *todo* punto vecino debe estar dirigido hacia dentro —hacia el punto P_0—. Sin embargo, esto es una violación de la ley de Gauss si no hay cargas en P_0, como lo podemos ver fácilmente.

Consideremos una pequeña superficie imaginaria que encierre a P_0, como se ve en la figura 5-1. Si el campo eléctrico en todo punto vecino está dirigido hacia P_0, la integral de superficie de la componente normal ciertamente no es cero. Para el caso mostrado en la figura, el flujo a través de la superficie debe ser un número negativo. Pero la ley de Gauss dice que el flujo de un campo eléctrico a través de una superficie cualquiera es proporcional a la carga total encerrada por ella. Si no hay carga en P_0, el campo que hemos imaginado violaría la ley de Gauss. Es imposible equilibrar una carga positiva en el espacio vacío —en un punto donde no haya carga negativa alguna—. Una carga positiva *puede* estar en equilibrio si se encuentra en medio de una distribución de cargas negativas. Por supuesto, ¡la distribución de cargas negativas deberá ser mantenida en su lugar por medio de otras fuerzas eléctricas!

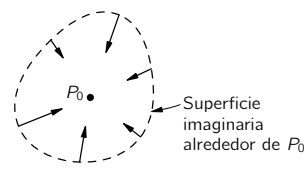


Figura 5-1. Si P_0 fuera una posición de equilibrio estable para una carga positiva, el campo eléctrico en todo lugar de la vecindad de P_0 apuntaría hacia P_0.

Nuestro resultado ha sido obtenido para una carga puntual. ¿Podemos llegar a la misma conclusión para una distribución complicada de cargas mantenidas en posición fija las unas respecto a las otras —con varillas, por ejemplo—? Consideremos el problema para dos cargas iguales mantenidas fijas por medio de una varilla. ¿Es posible que esta combinación pueda estar en equilibrio en algún campo electrostático? La respuesta es nuevamente no. La fuerza *total* sobre la varilla no puede ser una fuerza de restauración para desplazamientos en todas las direcciones.

Llamemos $\boldsymbol{F}$ a la fuerza total sobre la varilla en cualquier posición —$\boldsymbol{F}$ es entonces un campo vectorial—. Siguiendo los razonamientos utilizados anteriormente, concluimos que en una posición de equilibrio estable, la divergencia de $\boldsymbol{F}$ debe ser un número negativo. Pero la fuerza total sobre la varilla es el producto de la primera carga por el campo en esa posición, más el producto de la segunda carga por el campo en el lugar en que está ubicada:

$$\boldsymbol{F} = q_1\boldsymbol{E}_1 + q_2\boldsymbol{E}_2. \tag{5.1}$$

La divergencia de $\boldsymbol{F}$ está dada por:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F} = q_1(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}_1) + q_2(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}_2).$$

Si cada una de las dos cargas q_1 y q_2 está en el espacio libre, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}_1$ y $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}_2$ son cero, y $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{F}$ es cero —y no negativo, como sería necesario para el equilibrio—. Pueden ver que por extensión de estos razonamientos se puede demostrar que ninguna combinación rígida de un número cualquiera de cargas puede tener una posición de equilibrio estable en el campo electrostático en el espacio libre.

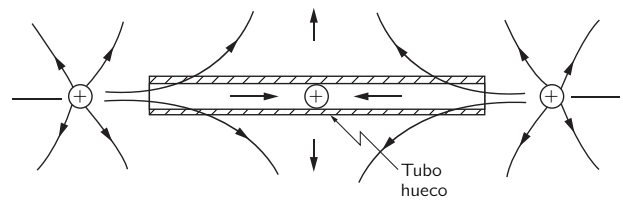


Figura 5-2. Una carga puede estar en equilibrio si hay vínculos mecánicos.

Pero no hemos demostrado que el equilibrio está prohibido si existen pivotes u otros vínculos mecánicos. Como ejemplo, consideremos un tubo en el cual una carga se puede mover hacia adelante y hacia atrás a lo largo del mismo, pero no hacia los costados. Ahora es muy fácil construir un campo eléctrico que apunte hacia dentro en ambos extremos del tubo, si se permite que el campo pueda apuntar lateralmente hacia afuera cerca del centro del tubo. Ubicamos simplemente cargas positivas en cada extremo del tubo, como en la figura 5-2. Puede haber ahora un punto de equilibrio aunque la divergencia de $\boldsymbol{E}$ sea nula. La carga, por supuesto, no estaría en equilibrio estable para los movimientos laterales, si no fuera porque existen fuerzas "no eléctricas" provenientes de las paredes del tubo.

5-3 El equilibrio en presencia de conductores

No hay una posición estable en el campo de un sistema de cargas fijas. ¿Y en el caso de un sistema de conductores cargados? ¿Puede un sistema de conductores cargados producir un campo que pueda tener un punto de equilibrio estable para una carga puntual? (Queremos decir, por supuesto, un punto que no esté sobre un conductor.) Ustedes saben que los conductores tienen la propiedad de que en ellos las cargas pueden moverse libremente. ¿Quizá cuando una carga puntual se desplace ligeramente, las otras cargas en el conductor se muevan de tal manera que den una fuerza restauradora sobre la carga puntual? La respuesta sigue siendo no —aunque la demostración que acabamos de hacer no es aplicable—. La demostración para este caso es mucho más difícil y solamente indicaremos el camino a seguir.

Primero, notemos que cuando las cargas se redistribuyen sobre el conductor, pueden hacerlo solamente si su movimiento implica una disminución de su energía potencial total. (Una parte de esta energía se pierde en forma de calor cuando se desplazan en el conductor.) Ahora bien, ya hemos demostrado que si las cargas que producen un campo son *estáticas* existe cerca de todo punto nulo P_0 en el campo, alguna dirección para la cual mover una carga puntual alejándose desde P_0 *reducirá* la energía del sistema (puesto que la fuerza hace que se *aleje* de P_0). Cualquier reajuste de las cargas en los conductores puede solamente disminuir la energía potencial aún más, de tal modo que (por el principio de los trabajos virtuales) su movimiento solamente *aumentará* la fuerza en esta dirección particular a partir de P_0 y no a la inversa.

Nuestra conclusión no significa que no es posible equilibrar una carga por medio de fuerzas eléctricas. Esto es posible si se acepta controlar la posición o el tamaño de las cargas con mecanismos convenientes. Ustedes saben que una varilla parada en una de sus puntas en un campo gravitacional es inestable, pero esto no demuestra que no pueda ser mantenida en equilibrio en la punta de un dedo. Análogamente, se puede mantener una carga en un punto por medio de campos eléctricos si éstos son *variables*. Pero no con un sistema pasivo —es decir, con un sistema *estático*—.

5-4 Estabilidad de los átomos

Si las cargas no pueden ser mantenidas en una posición estable, no es correcto imaginar la materia como construida con cargas *puntuales* estáticas (electrones y protones) y gobernadas solamente por las leyes de la electrostática. Tal configuración estática es imposible; ¡se produciría un colapso!

Se sugirió que la carga positiva de un átomo pudiera estar distribuida uniformemente en una esfera y que las cargas negativas, los electrones, pudieran estar en reposo dentro de la carga positiva, como se muestra en la figura 5-3. Éste fue el primer modelo atómico, propuesto por Thomson. Pero Rutherford dedujo del experimento de Geiger y Marsden que la carga positiva se encontraba mucho más concentrada, en lo que él llamó núcleo. El modelo estático de Thomson debió ser abandonado. Rutherford y Bohr sugirieron luego que el equilibrio debía ser dinámico, con los electrones moviéndose en órbitas, como se muestra en la figura 5-4. Se evitaría que los electrones cayeran al núcleo por su movimiento orbital. Conocemos ya una dificultad por lo menos que nos presenta este modelo. Con esa clase de movimiento los electrones estarían acelerando (puesto que el movimiento es circular) y, por lo tanto, radiarán energía. Perderían la energía cinética necesaria para mantenerse en órbita y caerán siguiendo una espiral hacia el núcleo. ¡Entonces también es inestable!

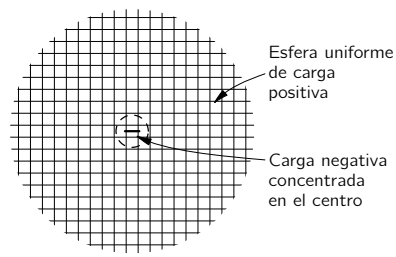


Figura 5-3. Modelo atómico de Thomson.

La estabilidad de los átomos se explica ahora en términos de la mecánica cuántica. Las fuerzas electrostáticas empujan el electrón tan cerca del núcleo como sea posible, pero el electrón es obligado a mantenerse estable en una cierta región del espacio y a una distancia del núcleo dada por el principio de incertidumbre. Si se encuentra confinado en una región muy pequeña del espacio, tendrá una gran incertidumbre en su momentum. Pero esto significa que se deberá esperar que tenga una gran energía —la cual es utilizada para escapar de la atracción eléctrica—. El resultado neto es un equilibrio eléctrico no muy diferente del imaginado por Thomson —solamente que ahora es la carga *negativa* la que se mantiene en el exterior (puesto que la masa del electrón es mucho menor que la del protón)—.

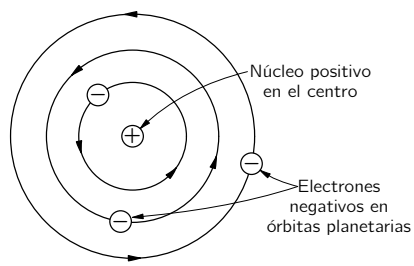


Figura 5-4. Modelo atómico de Rutherford-Bohr.

5-5 El campo de una línea cargada

Se puede utilizar la ley de Gauss para resolver cierto número de problemas de campo electrostático que tengan una simetría especial —comúnmente esférica, cilíndrica o plana—. En el curso de este capítulo aplicaremos la ley de Gauss a unos pocos problemas de este tipo. La facilidad con que se pueden resolver estos problemas da la impresión equivocada de que el método es muy poderoso, y que

podría aplicarse con igual facilidad a otros problemas. Desafortunadamente no es así. No son demasiado numerosos los problemas que se pueden resolver fácilmente con la ley de Gauss. En los capítulos siguientes desarrollaremos métodos más poderosos para investigar los campos electrostáticos.

Como primer ejemplo, consideremos un sistema con simetría cilíndrica. Supongamos que se trate de una varilla suficientemente larga y cargada uniformemente. Por esto queremos decir que la carga eléctrica está distribuida uniformemente a lo largo de una línea recta indefinida, con una carga λ por unidad de longitud. Deseamos conocer el campo eléctrico. El problema, por supuesto, puede ser resuelto integrando la contribución al campo de cada una de las partes de la línea. Pero lo haremos sin recurrir a la integración, por medio de la ley de Gauss y de algunas suposiciones. Primero supongamos que el campo eléctrico es radial y dirigido hacia fuera. Cualquier componente axial debida a las cargas de un lado estará acompañada por una componente axial igual de las cargas del otro lado. El resultado puede ser solamente un campo radial. Es entonces razonable pensar que el campo debe tener el mismo módulo en todos los puntos equidistantes de la línea. Esto es evidente (no es fácil de demostrar, pero es válido si el espacio es simétrico —como creemos que es—).

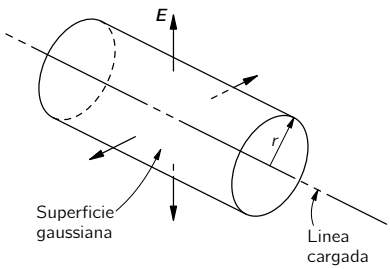


Figura 5-5. Superficie cilíndrica gaussiana coaxial con una carga lineal.

Podemos usar la ley de Gauss de la siguiente manera. Consideremos una superficie *imaginaria* con la forma de un cilindro coaxial con la línea, como se muestra en la figura 5-5. De acuerdo con la ley de Gauss, el flujo total de $\boldsymbol{E}$ a través de esta superficie es igual a la carga dentro de ella dividida entre ϵ_0. Si se supone que el campo es normal a la superficie, la componente normal es el módulo del campo. Lo llamaremos E. Además, tomaremos el radio del cilindro como r, y su longitud será considerada como la unidad para nuestra conveniencia. El flujo a través de la superficie cilíndrica es igual a E por el área de la superficie, que es igual a $2\pi r$. El flujo a través de las dos caras de los extremos es cero, puesto que el campo eléctrico es tangencial a ellas. La carga total dentro de nuestra superficie es justamente λ, puesto que la longitud de la línea que la contiene es igual a la unidad. La ley de Gauss nos da:

$$E \cdot 2\pi r = \lambda/\epsilon_0,$$

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}. \tag{5.2}$$

El campo eléctrico de una línea cargada depende de la inversa de la *primera* potencia de la distancia a la línea.

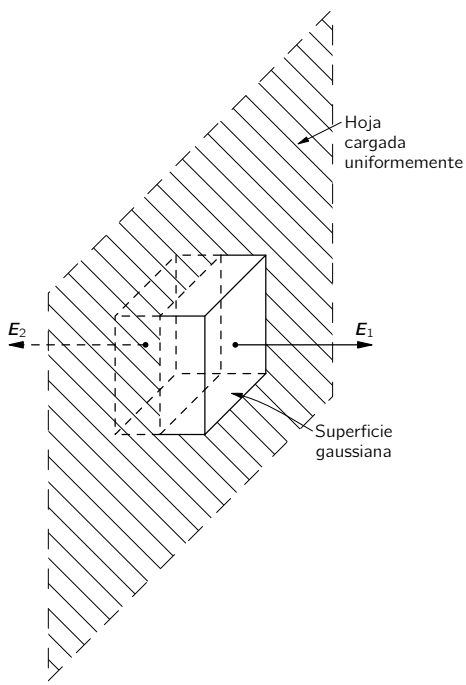


Figura 5-6. El campo eléctrico cerca de una hoja cargada uniformemente puede calcularse aplicando la ley de Gauss a una caja imaginaria.

5-6 Una hoja cargada; dos hojas

Como otro ejemplo, calcularemos el campo producido por una hoja cargada uniformemente. Supongamos que el plano es infinito y que la carga por unidad de área sea σ. Debemos hacer otra suposición. Consideraciones de simetría nos llevan a pensar que la dirección del campo es en todo lugar normal al plano y, *si no tenemos otros campos producidos por otras cargas en todo el universo*, el campo debe ser el mismo (en módulo) a cada lado. Por lo tanto, tomaremos nuestra superficie de Gauss en forma de una caja rectangular que corta el plano de la manera indicada en la figura 5-6. Las dos caras paralelas con la hoja tienen igual superficie, digamos A. El campo es normal a estas dos caras y paralelo a las otras cuatro. El flujo total es E por la superficie de la primera cara, más E por la superficie de la cara opuesta —no hay contribución debida a las otras caras—. La carga total encerrada en la caja es σA. Igualando el flujo a la carga interior, tendremos

$$EA + EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0},$$

de lo cual

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}, \tag{5.3}$$

que es un resultado simple pero importante.

Recordarán ustedes que el mismo resultado fue obtenido en un capítulo anterior por medio de una integración sobre la superficie total. La ley de Gauss nos da la respuesta en este caso mucho más rápidamente (aunque no sea generalmente aplicable como el primer método).

Insistiremos sobre el hecho de que este resultado se aplica *solamente* al campo debido a cargas en la hoja. Si hay otras cargas en las proximidades, entonces el campo total cercano a la hoja deberá ser la suma de (5.3) y del campo debido a las otras cargas. La ley de Gauss nos dirá solamente que:

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \tag{5.4}$$

donde E_1 y E_2 son los campos dirigidos hacia afuera a cada lado de la hoja.

El problema de dos hojas paralelas con densidades de carga iguales y opuestas, $+\sigma$ y $-\sigma$, es igualmente simple si suponemos nuevamente que el espacio exterior es completamente simétrico. Sea por superposición de dos soluciones para un solo plano o por construcción de una caja gaussiana que incluya ambos planos, es fácil ver que el campo es cero *fuera* de los dos planos (figura 5-7a). Considerando una caja que incluya solamente una superficie o la otra, como en (b) o en (c) de la figura, se puede ver que el campo entre los planos debe ser el doble de lo que es para un solo plano. El resultado es:

$$E\,(\text{entre las hojas}) = \sigma/\epsilon_0, \tag{5.5}$$

$$E\,(\text{externo}) \qquad\quad = 0. \tag{5.6}$$

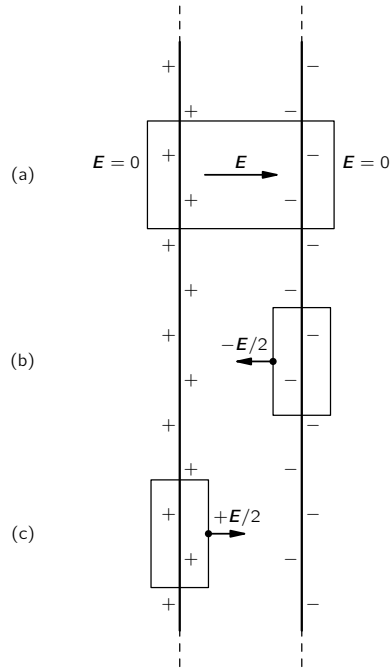


Figura 5-7. El campo entre dos hojas cargadas es σ/ϵ_0.

5-7 La esfera cargada; cascarón esférico

Anteriormente (en el capítulo 4) hemos utilizado la ley de Gauss para encontrar el campo fuera de una región esférica uniformemente cargada. El mismo método puede además proporcionarnos el valor del campo en puntos *interiores* de la esfera. Por ejemplo, se pueden utilizar cálculos para obtener una buena aproximación al valor del campo dentro del núcleo atómico. Si bien los protones del núcleo se repelen entre sí, se distribuyen en todo el volumen del núcleo de manera uniforme debido a las fuertes fuerzas nucleares.

Supongan que tenemos una esfera de radio R uniformemente llena de cargas. Sea ρ la carga por unidad de volumen. Nuevamente utilizando argumentos de simetría, suponemos que el campo debe ser radial y de igual módulo en todos los puntos que se encuentran a la misma distancia del centro. Para hallar el campo a la distancia r del centro, tomamos una superficie esférica gaussiana de radio r ($r < R$), como se muestra en la figura 5-8. El flujo saliente de esta superficie es

$$4\pi r^2 E.$$

La carga dentro de la superficie gaussiana es el producto del volumen por ρ, o sea

$$\tfrac{4}{3}\pi r^3 \rho.$$

Utilizando la ley de Gauss, se ve que el módulo del campo está dado por

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \qquad (r < R). \tag{5.7}$$

Pueden ver que esta fórmula da buen resultado para $r = R$. El campo eléctrico es *proporcional* al radio y está dirigido radialmente hacia afuera.

Los razonamientos que hemos utilizado para una esfera uniformemente cargada pueden ser aplicados también a un fino cascarón esférico cargado. Suponiendo que el campo es en todo lugar radial y esféricamente simétrico, se puede obtener en forma inmediata a través de la ley de Gauss que el campo fuera del cascarón es igual al producido por una carga puntual, mientras que en el interior es nulo (una superficie gaussiana dentro del cascarón no contendrá ninguna carga).

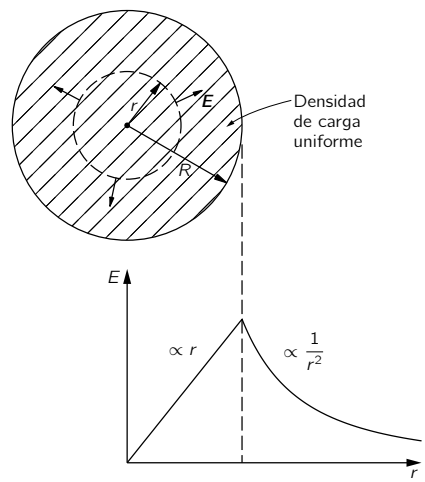


Figura 5-8. La ley de Gauss se puede utilizar para hallar el campo dentro de una esfera cargada uniformemente.

5-8 ¿Es el campo de una carga puntual exactamente $1/r^2$?

Si observamos detalladamente cómo el campo se anula dentro del cascarón, podemos ver más claramente por qué la ley de Gauss es correcta solamente debido a que la fuerza coulombiana depende exactamente del cuadrado de la distancia. Consideremos un punto cualquiera P dentro de un cascarón esférico cargado uniformemente. Imaginemos un pequeño cono de vértice en P que se extienda hasta la superficie de la esfera, la cual es cortada por el cono según la pequeña superficie Δa_1, como en la figura 5-9. Un cono exactamente simétrico que diverja hacia el lado opuesto de P cortará el cascarón según la superficie Δa_2. Si las distancias desde P hasta estos dos elementos de superficie son r_1 y r_2, las superficies están en la relación

$$\frac{\Delta a_2}{\Delta a_1} = \frac{r_2^2}{r_1^2}.$$

(Con geometría pueden demostrar esto para todo punto P dentro de la esfera).

Si la superficie de la esfera está uniformemente cargada, la carga Δq en cada elemento es proporcional a esa superficie, y entonces

$$\frac{\Delta q_2}{\Delta q_1} = \frac{\Delta a_2}{\Delta a_1}.$$

La ley de Coulomb nos indica que el módulo de los campos producidos en P por estos dos elementos de superficie están en la relación

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\Delta q_2/r_2^2}{\Delta q_1/r_1^2} = 1.$$

De esta manera, los campos se cancelan. Como todas las partes de la superficie pueden ser emparejadas de la misma forma, el campo total en P es cero. Pero se puede ver que esto no es precisamente así, si el exponente de r en la ley de Coulomb no es dos.

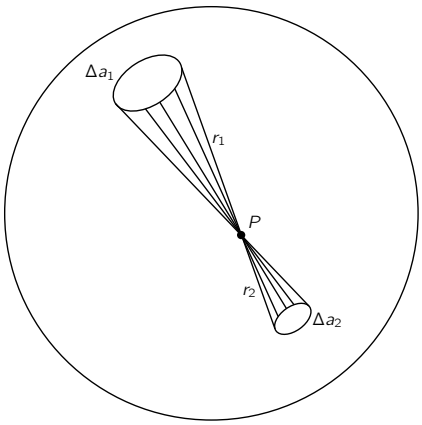


Figura 5-9. El campo es nulo para cualquier punto P en el interior de un cascarón esférico de cargas.

La validez de la ley de Gauss depende entonces de la ley de Coulomb de la inversa del cuadrado. Si la ley de fuerza no es exactamente del tipo de la inversa del cuadrado, esto no será válido, ya que el campo dentro de una esfera uniformemente cargada no será exactamente cero. Por ejemplo, si la fuerza varía más rápidamente, digamos como la inversa del cubo de r, entonces la porción de superficie cercana a un punto interior puede producir un campo que es mayor que el de una superficie lejana, y si además la superficie está cargada positivamente, entonces resultará un campo radial dirigido hacia adentro. Estas conclusiones sugieren un camino elegante para verificar si la ley de la inversa del cuadrado se cumple con exactitud. Sólo necesitamos determinar si el campo dentro de un cascarón esférico uniformemente cargado es o no cero.

Afortunadamente existe ese método. Por lo común es difícil medir una cantidad física con gran precisión —1 % de precisión no es difícil de obtener—, ¿pero cuando se pretende realizar una medición de la ley de Coulomb con una precisión, por ejemplo, de uno en 1 000 millones? Ciertamente no es posible con las mejores técnicas disponibles medir la *fuerza* entre dos objetos cargados con tal precisión. Pero por una determinación solamente de que el campo eléctrico dentro de una esfera cargada sea *menor* que un determinado valor, podemos hacer una medida muy precisa de la exactitud de la ley de Gauss y, por consiguiente, de la dependencia de la inversa del cuadrado que indica la ley de Coulomb. Lo que hemos hecho en realidad es *comparar* la ley de fuerza con una ley ideal de dependencia con la inversa del cuadrado. De tal comparación de cosas iguales, o casi iguales, surgen generalmente las bases para las más precisas mediciones físicas.

¿Cómo observaremos el campo dentro de una esfera cargada? Un camino sería tocar el interior de una esfera cargada con un conductor. Es conocido el hecho de que si tocamos un objeto cargado con una bola metálica y luego con ella tocamos un electrómetro, éste se carga y su aguja se aparta de cero (figura

5-10a). La bola toma una carga porque hay un campo eléctrico en el exterior de la esfera cargada y que permite a las cargas pasar a la bola de medición. Si realizan el mismo experimento pero tocando con la bola el *interior* de la esfera cargada, observarán que no se descubren cargas al llevarla al electrómetro. Con este experimento pueden demostrar fácilmente que el campo dentro de la esfera cargada es, al menos, sólo un pequeño porcentaje del campo en el exterior, y la ley de Gauss es al menos aproximadamente correcta.

Aparentemente fue Benjamin Franklin el primero en darse cuenta de que el campo dentro de un conductor hueco era cero. El resultado le pareció extraño. Cuando comentó su observación a Priestley, éste le sugirió que dicho fenómeno debería estar relacionado con una ley de inverso del cuadrado, puesto que se sabía que un cascarón esférico de materia no producía campo gravitatorio dentro de él. Pero Coulomb no realizó sus mediciones para la comprobación de la dependencia con la inversa del cuadrado de la distancia sino 18 años después y la ley de Gauss llegó aún más tarde.

La ley de Gauss ha sido verificada cuidadosamente colocando un electrómetro dentro de una gran esfera y observando si se produce una desviación en el electrómetro cuando se carga la esfera a tensiones altas. Los resultados han sido siempre nulos. Conociendo la geometría del aparato y la sensibilidad del medidor, es posible calcular el campo mínimo que podría ser observado con tales instrumentos. A partir de estos cálculos es posible dar un límite superior para la desviación del exponente del número 2. Si escribimos la fuerza electrostática como dependiendo de $r^{-2+\epsilon}$, podemos encontrar un límite superior para ϵ. Por medio de este método Maxwell determinó que ϵ era menor que $1/10\,000$. El experimento fue repetido y mejorado en 1936 por Plimpton y Lawton. Encontraron que el exponente en la ley de Coulomb difería de 2 en menos de un milmillonésimo.

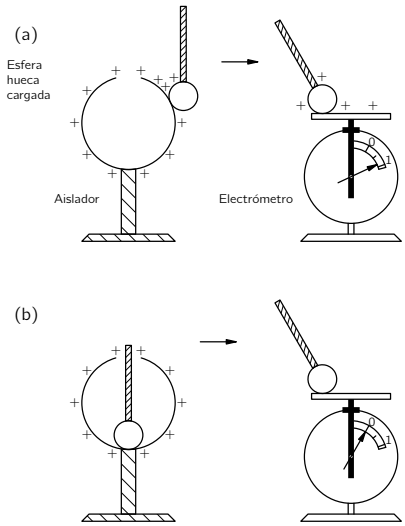


Figura 5-10. El campo eléctrico es nulo dentro de un cascarón conductor cerrado.

Esto nos lleva a una cuestión interesante: ¿Con qué precisión sabemos que vale la ley de Coulomb en diferentes circunstancias? Los experimentos que acabamos de describir para distancias del orden de unas decenas de centímetros, muestran la dependencia del campo con la distancia. Pero ¿qué sucede a distancias del orden de las existentes en el interior de un átomo —en el átomo de hidrógeno, por ejemplo—, donde creemos que el núcleo atrae al electrón según la misma ley de la inversa del cuadrado? Es correcto que la mecánica cuántica debe ser utilizada para describir el comportamiento mecánico del electrón, pero la fuerza actuante es la fuerza electrostática. En la formulación del problema, la energía potencial de un electrón debe ser conocida en función de la distancia al núcleo, y la ley de Coulomb da un potencial que varía con la inversa de la distancia a la primera potencia. ¿Con qué precisión se conoce el exponente para estas distancias pequeñas? Como resultado de mediciones muy cuidadosas sobre las posiciones relativas de los niveles de energía realizadas por Lamb y Retherford en 1947, sabemos que el exponente es válido a menos de un milmillonésimo en la escala atómica —es decir, a distancias del orden de un ángstrom (10^{-8} centímetros)—.

La exactitud de las mediciones de Lamb y Retherford fueron posibles gracias a un "accidente" físico. Dos de los estados del átomo de hidrógeno debían esperarse con energías idénticas *sólo* si el potencial variase exactamente como $1/r$. Se realizó una medición de la pequeñísima *diferencia* de energía buscando la frecuencia ω de los fotones que eran emitidos o absorbidos en la transición de un estado a otro, utilizando la fórmula $\Delta E = \hbar\omega$ para las diferencias de energía. Los cálculos mostraron que ΔE debía ser notablemente diferente de la observada si el exponente en la ley de fuerza del tipo $1/r^2$ difiere de 2 en un milmillonésimo.

¿Es correcto el mismo exponente para distancias más pequeñas? A partir de mediciones en física nuclear se encontró que hay fuerzas electrostáticas a distancias típicamente nucleares —del orden de 10^{-13} centímetros— y que varían aproximadamente como la inversa del cuadrado. Podremos ver algunas de estas evidencias en un capítulo posterior. La ley de Coulomb es entonces válida, al menos con cierta aproximación, a distancias del orden de 10^{-13} centímetros.

¿Qué sucede a 10^{-14} centímetros? Este intervalo de distancias debe ser investigado bombardeando protones con electrones de alta energía y observando cómo se dispersan. Los resultados de tales experimentos indican que la ley

no es correcta a esas distancias. La fuerza eléctrica debe ser 10 veces más débil que la observada a distancias menores que 10^{-14} centímetros. Aquí caben dos explicaciones posibles. Una es que la ley de Coulomb no es válida a tales distancias; la otra es que nuestros objetos, los electrones y los protones no son cargas puntuales. Quizá los electrones o los protones o ambos tengan cierta estructura. Muchos físicos prefieren considerar que la carga del protón está distribuida. Sabemos que los protones interactúan fuertemente con los mesones. Esto implica que un protón puede, de tiempo en tiempo, existir como neutrón con un mesón π^+ alrededor. Esa configuración actuará —en promedio— como una pequeña esfera de carga positiva. Sabemos que el campo de una esfera cargada no varía todo el tiempo como $1/r^2$ a medida que nos acercamos a su centro. Es muy probable que la carga del protón esté distribuida, pero la teoría de los piones es actualmente incompleta, de tal modo que solamente podemos decir que la ley de Coulomb no es válida a distancias muy pequeñas. La discusión sobre este punto sigue abierta.

Una consideración más: la ley de la inversa del cuadrado es válida a distancias del orden de un metro y también a distancias del orden de 10^{-10} metros; pero ¿el coeficiente $1/4\pi\epsilon_0$ es el mismo? La respuesta es que sí; al menos con una precisión de 15 partes por millón.

Regresemos a un punto importante que habíamos mencionado al hablar de la verificación experimental de la ley de Gauss. Se habrán preguntado tal vez cómo es posible que los experimentos realizados por Maxwell o por Plimpton y Lawton hayan permitido tal precisión cuando los conductores esféricos que utilizaron no eran precisamente esferas perfectas. Una precisión de uno en 1 000 millones es realmente difícil de conseguir y cabría la pregunta de si es posible construir una esfera con tal precisión. Existen evidentemente pequeñas irregularidades en toda esfera real y, por lo tanto, si existen estas irregularidades ¿no podrán ellas producir campos en el interior de la esfera? Deseamos demostrar ahora que no es necesario tener una esfera perfecta. Es posible, en efecto, mostrar que no hay campo dentro de una superficie conductora cerrada de forma *cualquiera*. En otras palabras, los experimentos dependían de $1/r^2$, pero no tenían nada que ver con que la superficie fuese esférica (excepto que en una esfera es fácil calcular cómo *serían* los campos si Coulomb se hubiera equivocado), trataremos ahora este tema. Para demostrarlo es necesario conocer algunas de las propiedades de los conductores de electricidad.

5-9 Los campos de un conductor

Un conductor eléctrico es un sólido que contiene muchos electrones "libres". Los electrones pueden desplazarse libremente *en* el material, pero no pueden dejar la superficie. En un metal existen muchos electrones libres de manera que un campo eléctrico puede poner en movimiento gran cantidad de ellos. La corriente de electrones establecida de esta manera necesita para mantenerse una fuente externa de energía; en caso contrario el movimiento de los electrones cesará cuando se haya descargado la fuente que produjo el campo inicial. En situaciones "electrostáticas" no necesitamos considerar una fuente continua de corriente (lo consideraremos más adelante cuando estudiemos la magnetoestática), y entonces los electrones se desplazarán solamente hasta que produzcan un campo nulo en todo punto interior del conductor. (Esto sucede generalmente en una pequeña fracción de segundo.) Si existiera un campo remanente, éste forzaría el movimiento de nuevos electrones; la única solución electrostática posible es que el campo sea cero para todo punto interior del conductor.

Consideremos ahora el *interior* de un objeto conductor cargado (por "interior" queremos decir el *metal* mismo). Además, como el metal es un conductor, el campo interior debe ser cero y, por lo tanto, el gradiente del potencial ϕ es cero. Esto significa que ϕ no varía de un punto a otro. Todo conductor es una *región* equipotencial y su superficie es una superficie equipotencial. Como en un material conductor el campo eléctrico es cero en todo punto, la divergencia de $\boldsymbol{E}$ es cero y

por la ley de Gauss la densidad de carga en el *interior* del conductor debe ser cero.

Si no puede haber cargas en el interior de un conductor ¿cómo puede cargarse? ¿Qué queremos indicar cuando decimos que un conductor está "cargado"? ¿Dónde están las cargas? La respuesta es que se encuentran en la superficie del conductor, donde existen fuertes fuerzas que les impiden abandonarla —ellas no son completamente "libres"—. Cuando estudiemos la física del estado sólido, encontraremos que el exceso de cargas de cualquier conductor se encuentra en promedio hasta una distancia de la superficie del orden de una o dos veces el diámetro atómico. Para lo que nos interesa aquí es suficientemente preciso decir que si se coloca cualquier carga sobre o *dentro* de un conductor, se acumulará en la superficie del mismo; no puede haber cargas en el interior de un conductor.

Observamos también que el campo eléctrico *inmediatamente fuera* de la superficie de un conductor debe ser normal a la superficie. No puede haber componentes tangenciales. Si hubiese una componente tangencial, los electrones se podrían mover *a lo largo* de la superficie, puesto que no habría ninguna fuerza que lo impidiera. Diciendo esto de otra manera: sabemos que las líneas del campo eléctrico deben estar siempre formando un ángulo recto con una superficie equipotencial.

Podemos también, utilizando la ley de Gauss, relacionar la intensidad de campo inmediatamente fuera de un conductor con la densidad local de carga en la superficie. Tomemos, como superficie gaussiana, una pequeña caja cilíndrica que se encuentre mitad fuera y mitad dentro de la superficie, como lo muestra la figura 5-11. Existe una contribución al flujo total de $\boldsymbol{E}$ únicamente del lado de la caja que se encuentra fuera del conductor. Además, el campo inmediatamente fuera de la superficie del conductor es entonces

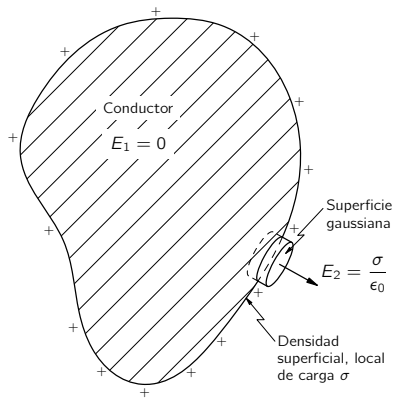


Figura 5-11. El campo eléctrico inmediatamente fuera de la superficie de un conductor es proporcional a la densidad superficial local de carga.

En el exterior de un conductor:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \tag{5.8}$$

donde σ es la densidad de carga superficial *local*.

¿Por qué una hoja de cargas sobre la superficie de un conductor produce un campo diferente que el producido por una *sola* hoja cargada? En otras palabras ¿por qué la ecuación (5.8) es el doble de la ecuación (5.3)? La razón es, por supuesto, que *no* hemos dicho para el conductor que no hay "otras" cargas cerca. Debe haber, en efecto, para hacer $\boldsymbol{E} = 0$ en el conductor. Las cargas en la vecindad inmediata de un punto P sobre la superficie crean, en efecto, un campo $E_{\text{local}} = \sigma_{\text{local}}/2\epsilon_0$ en el interior y en el exterior de la superficie. Pero todas las cargas restantes del conductor "conspiran" para producir un campo adicional en el punto P de igual magnitud que E_{local}. El campo total en el interior será entonces cero y en el exterior $2E_{\text{local}} = \sigma/\epsilon_0$.

5-10 El campo en una cavidad de un conductor

Retornemos ahora al problema del recipiente hueco —un conductor con una cavidad—. No hay campo en el *metal*, pero ¿qué sucede en la *cavidad*? Demostraremos que si la cavidad está *vacía* no hay campo en su interior, *cualquiera que sea la forma* del conductor o de la cavidad —digamos el de la figura 5-12—. Consideremos una superficie gaussiana, como S en la figura 5-12, que encierre la cavidad pero que se encuentre en todo punto dentro del material conductor. En todo punto de S el campo es cero y, por lo tanto, no hay flujo a través de S y la carga *total* dentro de S es cero. Para un cascarón esférico, se podrá argumentar que por simetría *no* debe haber cargas dentro de la superficie. Pero, en general, podemos decir solamente que existe igual cantidad de cargas negativas y positivas en el interior de la superficie del conductor. *Podría* haber una carga superficial positiva en alguna parte y una negativa en otra, como se indica en la figura 5-12. Tal situación no puede ser excluida por medio de la ley de Gauss.

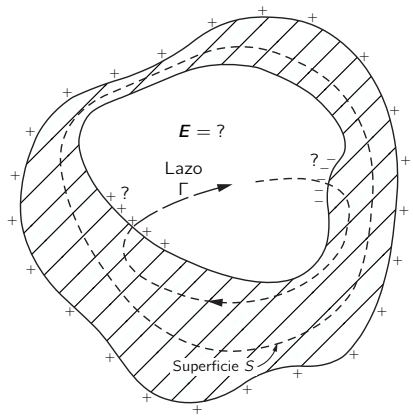


Figura 5-12. ¿Cuál es el campo en el interior de una cavidad vacía en un conductor de forma cualquiera?

Lo que sucede realmente, por supuesto, es que dos cargas iguales y de signo contrario en la superficie interior se desplazarán hasta encontrarse y compensarse

por completo. Podemos mostrar que se cancelan completamente utilizando la ley de que la circulación de $\boldsymbol{E}$ es siempre cero (electrostática). Supongan que hubiera cargas en alguna parte de la superficie interna. Sabemos que debe haber un número igual de cargas opuestas en algún otro lugar. Entonces toda línea de $\boldsymbol{E}$ debe partir de una carga positiva y terminar en una negativa (puesto que estamos considerando solamente el caso en que no hay cargas libres en la cavidad). Imaginemos un lazo Γ que cruce la cavidad a lo largo de una línea de fuerza desde una carga positiva hasta una negativa y que retorne al punto de partida a través del conductor (como en la figura 5-12). La integral a lo largo de tal línea de fuerza desde la carga positiva hasta la negativa no será nula. La integral a través del metal es cero, puesto que $\boldsymbol{E} = 0$. Entonces tendríamos

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} \neq 0???$$

Pero la integral de línea de $\boldsymbol{E}$ a través de cualquier curva cerrada en un campo electrostático es siempre cero. Entonces no puede haber campos dentro de una cavidad vacía, ni cargas en la superficie interna.

Observen cuidadosamente una importante distinción que hemos hecho. Hemos dicho siempre "dentro de una cavidad *vacía*". Si se *colocan* algunas cargas en cierto lugar fijo en la cavidad —como sobre un aislador o sobre un pequeño conductor aislado del conductor principal— *podrá* haber campos en la cavidad. Pero entonces no será una cavidad "vacía".

Hemos demostrado que si una cavidad está completamente encerrada por un conductor, ninguna distribución estática de cargas en el *exterior* puede producir campos en el interior. Esto explica el principio de "blindaje" de un equipo eléctrico que se consigue ubicándolo dentro de una caja metálica. Los mismos razonamientos pueden ser utilizados para demostrar que ninguna distribución estática de cargas en el *interior* de un conductor conectado a tierra cerrado puede producir campos en el *exterior*. ¡El blindaje funciona en los dos sentidos! En electrostática —pero no en campos variables— los campos a los dos lados de una celda conductora cerrada conectada a tierra son completamente independientes.

Ahora pueden ver por qué es posible verificar la ley de Coulomb con tal precisión. La forma de la celda utilizada no interesa. No es necesario que sea esférica: ¡puede ser cuadrada! Si la ley de Gauss es exacta, el campo dentro de ella es siempre nulo. Ahora comprenden la razón de la seguridad de sentarse dentro del terminal de alta tensión de un generador de Van de Graaff de un millón de volts, sin peligro de recibir una descarga —todo gracias a la ley de Gauss—.

6

El campo eléctrico en diversas situaciones

6-1 Ecuaciones del potencial electrostático

6-2 El dipolo eléctrico

6-3 Comentarios sobre ecuaciones vectoriales

6-4 El potencial de un dipolo como gradiente

6-5 La aproximación dipolar para una distribución arbitraria

6-6 Campos de conductores cargados

6-7 El método de las imágenes

6-8 La carga puntual cerca de un plano conductor

6-9 La carga puntual cerca de una esfera conductora

6-10 Condensadores; el condensador de placas paralelas

6-11 Descarga de alto voltaje

6-12 El microscopio de emisión por campo

6-1 Ecuaciones del potencial electrostático

Este capítulo estudiará el comportamiento del campo eléctrico en muchas circunstancias diferentes. Nos dará cierta experiencia en cómo se comporta el campo eléctrico, y describirá algunos métodos matemáticos que se emplean para hallar este campo.

Comencemos señalando que todo el problema matemático es la resolución de dos ecuaciones, las ecuaciones de Maxwell para la electrostática:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{6.1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0. \tag{6.2}$$

De hecho, se puede combinar las dos en una sola ecuación. Por la segunda ecuación sabemos inmediatamente que podemos describir el campo como gradiente de un escalar (véase la sección 3-7):

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi. \tag{6.3}$$

Si queremos, podemos describir completamente cualquier campo eléctrico en términos de su potencial ϕ. Obtenemos la ecuación diferencial que debe satisfacer ϕ al sustituir la ecuación (6.3) en (6.1), lo cual da:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{6.4}$$

La divergencia del gradiente de ϕ es lo mismo que ∇^2 operando sobre ϕ:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi = \nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}, \tag{6.5}$$

por lo que escribimos la ecuación (6.4) en la forma:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{6.6}$$

El operador ∇^2 se llama laplaciano y la ecuación (6.6) se llama ecuación de Poisson. Desde un punto de vista matemático, toda la electrostática es simplemente un estudio de las soluciones de esa única ecuación (6.6). Una vez obtenido ϕ resolviendo la ecuación (6.6) podemos hallar $\boldsymbol{E}$ inmediatamente, usando la ecuación (6.3).

Tomemos primero el caso especial en que ρ está dada como función de x, y, z. En este caso el problema es casi trivial, puesto que ya sabemos la solución de la ecuación (6.6) en el caso general. Hemos demostrado que si se conoce ρ en todo punto, el potencial en un punto (1) es:

$$\phi(1) = \int \frac{\rho(2)\, dV_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}, \tag{6.7}$$

donde $\rho(2)$ es la densidad de carga, dV_2 es el elemento de volumen en el punto (2) y r_{12} es la distancia entre los puntos (1) y (2). La solución de la ecuación *diferencial* (6.6) se reduce a una *integración* en el espacio. Hay que tener muy especialmente en cuenta la solución (6.7) porque hay muchas situaciones en la física que dan lugar a ecuaciones como:

$$\nabla^2(\text{algo}) = (\text{algo más}),$$

y la ecuación (6.7) es un prototipo de solución para cualquiera de estos problemas.

La resolución de los problemas de campo electrostático es, por lo tanto, completamente directa cuando se conoce la posición de todas las cargas. Veamos también cómo funciona en unos pocos ejemplos.

Revisar
Volumen I, capítulo 23, *Resonancia*

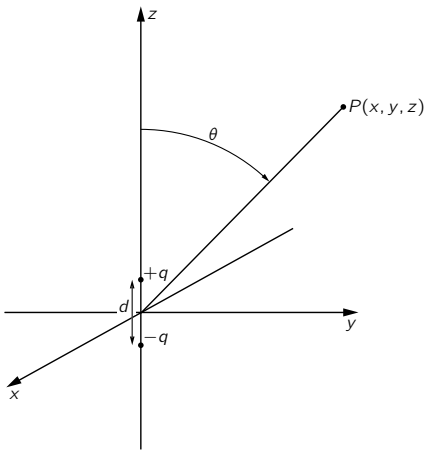


Figura 6-1. Un dipolo: dos cargas, $+q$ y $-q$, a una distancia d.

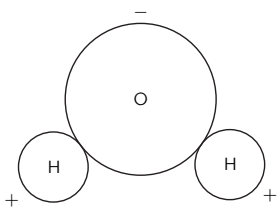


Figura 6-2. La molécula de agua, H_2O. Los átomos de hidrógeno tienen un poco menos de lo que les corresponde de la nube electrónica; el oxígeno tienen un poco más.

6-2 El dipolo eléctrico

Tomemos primero dos cargas puntuales, $+q$ y $-q$, a una distancia d. Tomemos el eje z pasando por las cargas con el origen a mitad de camino entre ambas, como muestra la figura 6-1. Luego, usando la ecuación (4.24), el potencial de las dos cargas está dado por:

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{[z-(d/2)]^2+x^2+y^2}} + \frac{-q}{\sqrt{[z+(d/2)]^2+x^2+y^2}}\right]. \quad (6.8)$$

No vamos a escribir las fórmulas para el campo eléctrico, pero siempre podremos calcularlo una vez que tengamos el potencial. Así pues, hemos resuelto el problema de dos cargas.

Hay un caso especial importante cuando las dos cargas están muy cerca una de otra —o sea que estamos interesados únicamente en los campos a distancias de las cargas que son grandes frente a su separación—. Llamamos *dipolo* a ese par de cargas muy juntas. Los dipolos son muy comunes.

A menudo se puede aproximar una antena "dipolar" por medio de dos cargas a corta distancia —si no nos interesa el campo muy cerca de la antena—. (Por lo común estamos interesados en antenas con cargas en *movimiento*; en realidad entonces no sirven las ecuaciones de la electrostática, pero para ciertos fines constituyen una aproximación adecuada.)

Los dipolos atómicos son quizá más importantes. Si hay un campo eléctrico en cualquier material, los electrones y los protones experimentan fuerzas opuestas y se desplazan unos respecto a otros. Como recordarán, en un conductor algunos electrones se mueven hasta la superficie de modo que el campo es cero en el interior. En un aislador los electrones no se pueden alejar mucho; están retenidos por la atracción del núcleo. Sin embargo, se corren un poquito. Así pues, aunque un átomo, o una molécula, siga siendo neutro en un campo eléctrico externo, hay una pequeñísima separación entre las cargas positivas y negativas, por lo que se convierte en un dipolo microscópico. Si estamos interesados en los campos de estos dipolos atómicos en las cercanías de objetos de tamaño ordinario, estamos considerando distancias grandes frente a la separación de los dos pares de cargas.

En algunas moléculas las cargas están un poco separadas aun en ausencia de campos externos debido a la forma de la molécula. En una molécula de agua, por ejemplo, hay una carga negativa neta sobre el átomo de oxígeno y una carga positiva neta sobre cada uno de los dos átomos de hidrógeno, los cuales no están colocados simétricamente sino como en la figura 6-2. Aunque la carga total de la molécula sea cero, hay una distribución de carga con un poco más de carga negativa de un lado y un poco más de carga positiva del otro. La disposición no es ciertamente tan simple como dos cargas puntuales, pero visto desde muy lejos el sistema se comporta como un dipolo. Como veremos un poco más adelante, el campo a grandes distancias no es sensible a los detalles finos.

Examinemos entonces el campo de dos cargas opuestas con una pequeña separación d. Si d se hace cero, las dos cargas están una encima de la otra, los dos potenciales se compensan y no hay campo. Pero si no están exactamente una encima de otra, podemos obtener una buena aproximación del potencial desarrollando los términos de (6.8) en serie de potencias de la pequeña cantidad d (usando el desarrollo binomial). Conservando únicamente los términos hasta el primer orden en d, podemos escribir:

$$\left(z-\frac{d}{2}\right)^2 \approx z^2 - zd.$$

Es conveniente escribir

$$x^2+y^2+z^2 = r^2.$$

Entonces

$$\left(z-\frac{d}{2}\right)^2+x^2+y^2 \approx r^2-zd = r^2\left(1-\frac{zd}{r^2}\right),$$

y

$$\frac{1}{\sqrt{[z-(d/2)]^2+x^2+y^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{r^2[1-(zd/r^2)]}} = \frac{1}{r}\left(1-\frac{zd}{r^2}\right)^{-1/2}.$$

Usando de nuevo el desarrollo binomial para $[1-(zd/r^2)]^{-1/2}$ —y despreciando términos mayores que el cuadrado o potencias mayores de d— obtenemos:

$$\frac{1}{r}\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{zd}{r^2}\right).$$

Análogamente,

$$\frac{1}{\sqrt{[z+(d/2)]^2+x^2+y^2}} \approx \frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{zd}{r^2}\right).$$

La diferencia de estos dos términos para el potencial da:

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{z}{r^3}\,qd. \tag{6.9}$$

El potencial y, por tanto, el campo que es su derivada, es proporcional a qd, el producto de la carga por la separación. Se define este producto como *momento dipolar* de las dos cargas y usamos para él el símbolo p (¡*no* confundir con momentum!):

$$p = qd. \tag{6.10}$$

La ecuación (6.9) también se puede escribir en la forma:

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{p\cos\theta}{r^2}, \tag{6.11}$$

ya que $z/r = \cos\theta$, donde θ es el ángulo entre el eje del dipolo y el radio vector al punto (x,y,z) (véase la figura 6-1). El *potencial* de un dipolo decrece como $1/r^2$ para una dirección dada respecto al eje (mientras que para una carga puntual varía como $1/r$). El campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ del dipolo decrecerá entonces como $1/r^3$.

Podemos escribir nuestra fórmula en forma vectorial si definimos $\boldsymbol{p}$ como un vector cuyo módulo es p y cuya dirección es según el eje del dipolo, apuntando de $-q$ a $+q$. Luego,

$$p\cos\theta = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r, \tag{6.12}$$

donde $\boldsymbol{e}_r$ es el vector unitario radial (véase figura 6-3). También podemos representar el punto (x,y,z) por $\boldsymbol{r}$. Luego,

Potencial de un dipolo:

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{6.13}$$

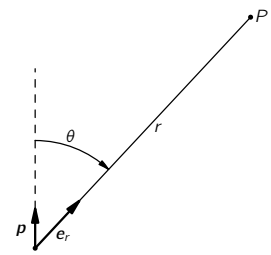


Fig. 6-3. Notación vectorial para un dipolo.

Esta fórmula es válida para un dipolo con orientación y posición cualesquiera si $\boldsymbol{r}$ representa el vector desde el dipolo al punto de interés.

Si queremos el campo eléctrico del dipolo, podemos obtenerlo tomando el gradiente de ϕ. Por ejemplo, la componente z del campo es $-\partial\phi/\partial z$. Para un dipolo orientado según el eje z podemos usar (6.9):

$$-\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^3}-\frac{3z^2}{r^5}\right),$$

o sea

$$E_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{3\cos^2\theta-1}{r^3}. \tag{6.14}$$

Las componentes x y y son:

$$E_x = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{3zx}{r^5}, \qquad E_y = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{3zy}{r^5}.$$

Se pueden combinar estas dos componentes para dar una componente *perpendicular* al eje z, a la cual llamaremos componente transversal $E_\perp$:

$$E_\perp = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{3z}{r^5}\sqrt{x^2+y^2}$$

o

$$E_\perp = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{3\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{r^3}. \tag{6.15}$$

La componente transversal $E_\perp$ está en el plano xy y está orientada alejándose del *eje* del dipolo. El campo total es, naturalmente,

$$E = \sqrt{E_z^2 + E_\perp^2}.$$

El campo de un dipolo varía con la inversa del cubo de la distancia al dipolo. Sobre el eje, para $\theta = 0$, es el doble de intenso que para $\theta = 90°$. Para estos ángulos especiales el campo eléctrico sólo tiene componente z, pero de signos opuestos en ambos lugares (véase figura 6-4).

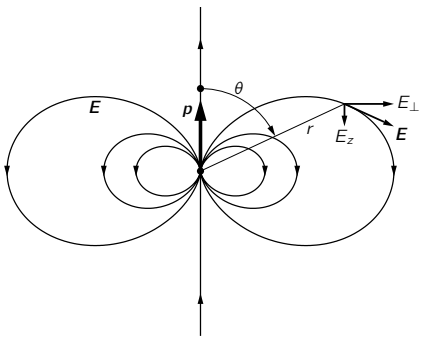


Figura 6-4. El campo eléctrico de un dipolo.

6-3 Comentarios sobre ecuaciones vectoriales

Éste es un buen lugar para hacer un comentario general sobre el análisis vectorial. Las demostraciones fundamentales se expresan con ecuaciones elegantes en forma general, pero al hacer varios cálculos y análisis siempre es bueno elegir los ejes de manera conveniente. Observen que cuando estábamos encontrando el potencial de un dipolo elegimos el eje z en la dirección del dipolo, en vez de hacerlo a un ángulo arbitrario. Esto hizo que el trabajo fuera mucho más fácil. Pero luego escribimos las ecuaciones en forma vectorial, de modo que ya no dependieran de un sistema particular de coordenadas. Después de lo anterior podemos elegir el sistema de coordenadas que queramos, sabiendo que la relación es válida en general. Es claro que no tiene sentido complicarse con un sistema arbitrario de coordenadas en un ángulo cualquiera, cuando pueden elegir un sistema claramente apropiado para el problema particular —siempre que el resultado se exprese finalmente como ecuación vectorial—. Así pues, traten por todos los medios de aprovecharse de que las ecuaciones vectoriales son independientes de cualquier sistema de coordenadas.

Por otra parte, si están tratando de calcular la divergencia de un vector, en vez de examinar simplemente $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}$ y preguntarse qué es, no olviden que siempre se puede desarrollar en la forma:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}.$$

Si pueden calcular las componentes x, y y z del campo eléctrico y las derivan, tendrán la divergencia. A veces parece que se tiene la impresión de que hay algo inelegante —una especie de fracaso— al escribir explícitamente las componentes; de algún modo siempre habría una manera de hacerlo todo con los operadores vectoriales. Muchas veces no se gana nada con eso. La primera vez que encontramos una clase particular de problemas, por lo común es conveniente escribir explícitamente las componentes para asegurarnos de que comprendemos lo que pasa. No es nada inelegante poner números en las ecuaciones, no es nada inelegante sustituir símbolos ingeniosos por derivadas. Por el contrario, muchas veces el hacerlo revela inteligencia. Por supuesto que cuando publiquen un trabajo en una revista profesional tendrá mejor aspecto —y se comprenderá más fácilmente— si escriben todo en forma vectorial. Además se ahorra impresión.

6-4 El potencial de un dipolo como gradiente

Nos gustaría señalar algo bastante divertido acerca de la fórmula del dipolo, ecuación (6.13). También se puede escribir el potencial en la forma:

$$\phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right). \tag{6.16}$$

Si calculan el gradiente de $1/r$, obtienen:

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2},$$

y la ecuación (6.16) es igual a la ecuación (6.13).

¿Cómo se nos ocurrió esto? Simplemente, recordamos que $\boldsymbol{e}_r/r^2$ aparecía en la fórmula para el *campo* de una carga puntual y que el campo era el gradiente de un *potencial* que dependía de $1/r$.

Hay una razón *física* para poder escribir el potencial de un dipolo en la forma de la ecuación (6.16). Supongan que tenemos una carga puntual q en el origen. El potencial en el punto P en (x, y, z) es:

$$\phi_0 = \frac{q}{r}.$$

(Dejemos de lado el $1/4\pi\epsilon_0$ mientras hacemos estos razonamientos; podemos agregarlo al final.) Ahora bien, si movemos la carga $+q$ una distancia Δz, el potencial en P cambiará un poco, en $\Delta\phi_+$ digamos. ¿Cuánto vale $\Delta\phi_+$? Bueno, es justamente lo que *variaría* el potencial si *dejáramos* la carga en el origen y moviéramos P *hacia abajo* la misma distancia Δz (véase la figura 6-5). Es decir,

$$\Delta\phi_+ = -\frac{\partial\phi_0}{\partial z}\Delta z,$$

donde por Δz entendemos lo mismo que $d/2$. Por lo tanto, usando $\phi_0 = q/r$, tenemos que el potencial de la carga positiva es:

$$\phi_+ = \frac{q}{r} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{q}{r}\right)\frac{d}{2}. \tag{6.17}$$

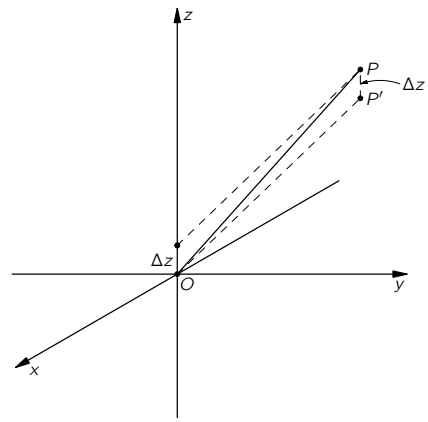


Figura 6-5. El potencial en P debido a una carga puntual a Δz por encima del origen es igual al potencial en P' (a Δz debajo de P) debido a la misma carga en el origen.

Con el mismo razonamiento al potencial de la carga negativa, podemos escribir:

$$\phi_- = \frac{-q}{r} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{-q}{r}\right)\frac{d}{2}. \tag{6.18}$$

El potencial total es la suma de (6.17) y (6.18):

$$\begin{aligned}\phi = \phi_+ + \phi_- &= -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{q}{r}\right)d \\ &= -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)qd.\end{aligned} \tag{6.19}$$

Para otras orientaciones del dipolo, podríamos representar el desplazamiento de la carga positiva con el vector $\Delta\boldsymbol{r}_+$. A continuación debemos escribir la ecuación anterior (6.17) en la forma:

$$\Delta\phi_+ = -\boldsymbol{\nabla}\phi_0\cdot\Delta\boldsymbol{r}_+,$$

donde luego se remplazará $\Delta\boldsymbol{r}_+$ por $\boldsymbol{d}/2$. Completando la deducción como antes, la ecuación (6.19) se convertiría entonces en:

$$\phi = -\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot q\boldsymbol{d}.$$

Esta ecuación es igual a la (6.16) si ponemos $q\boldsymbol{d} = \boldsymbol{p}$ e introducimos de nuevo el $1/4\pi\epsilon_0$. Mirándolo de otra manera, vemos que el potencial de un dipolo, ecuación (6.13), se puede interpretar como:

$$\phi = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{\nabla}\Phi_0, \tag{6.20}$$

donde $\Phi_0 = 1/4\pi\epsilon_0 r$ es el potencial de una carga puntual *unitaria*.

Aunque siempre podemos hallar por integración el potencial de una distribución de carga conocida, a veces es posible ahorrar tiempo obteniendo la respuesta con un truco ingenioso. Por ejemplo, muchas veces se puede recurrir al principio de superposición. Si se nos da una distribución de carga que se puede construir a partir de la suma de dos distribuciones para las cuales ya se conoce el potencial, es fácil encontrar el potencial deseado sumando simplemente los dos conocidos. Un ejemplo de esto es nuestra deducción de (6.20), otro es el siguiente.

Supongan que tenemos una superficie esférica con una distribución de carga superficial que varía como el coseno del ángulo polar. Para esta distribución, la integración es bastante complicada. Pero aunque parezca sorprendente, se puede analizar esta distribución mediante superposición. Porque imaginen una esfera con una densidad uniforme de carga positiva en su *volumen* y otra esfera con la misma densidad uniforme, pero de carga negativa en su volumen, inicialmente superpuestas constituyendo una esfera neutra —es decir, no cargada—. Si entonces se desplaza ligeramente la esfera positiva respecto a la negativa, el grueso de la esfera no cargada seguirá siendo neutro, pero aparecerá un poco de carga positiva de un lado y un poco de carga negativa del lado opuesto, como lo muestra la figura 6-6. Si el desplazamiento relativo de las dos esferas es pequeño, la carga neta es equivalente a una carga superficial (sobre una superficie esférica) y la densidad superficial de carga será proporcional al coseno del ángulo polar.

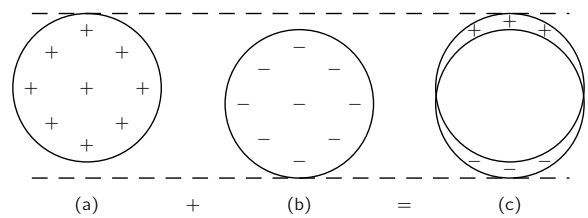


Figura 6-6. Dos esferas uniformemente cargadas superpuestas con un ligero desplazamiento, son equivalentes a una distribución no uniforme de carga superficial.

Ahora bien, si queremos obtener el potencial de esta distribución no necesitamos hacer una integral. Sabemos que el potencial de cada una de las esferas de carga es —para puntos exteriores a la esfera— el mismo que el de una carga puntual. Las dos esferas desplazadas son como dos cargas puntuales, el potencial es justamente el de un dipolo.

De esta manera pueden demostrar que una distribución de carga sobre una esfera de radio a con una densidad superficial de carga

$$\sigma = \sigma_0 \cos\theta$$

produce un campo fuera de la esfera que es precisamente el de un dipolo cuyo momento es:

$$p = \frac{4\pi\sigma_0 a^3}{3}.$$

También se puede demostrar que dentro de la esfera el campo es constante y con un valor

$$E = \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}.$$

Si θ es el ángulo a partir del eje z, el campo eléctrico dentro de la esfera está en la dirección z *negativa*. El ejemplo que acabamos de considerar no es tan artificial como parecería; lo volveremos a encontrar en la teoría de dieléctricos.

6-5 La aproximación dipolar para una distribución arbitraria

El campo de un dipolo aparece en otra circunstancia que es a la vez interesante e importante. Supongan que tenemos un objeto que tiene una distribución complicada de carga —tal como la molécula de agua (véase figura 6-2)— y estamos interesados únicamente en los campos muy lejos del mismo. Demostraremos que es posible hallar una expresión relativamente simple para los campos, la cual es apropiada para distancias grandes frente al tamaño del objeto.

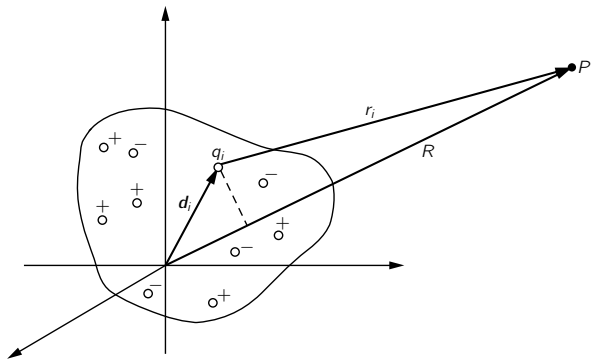


Figura 6-7. Cálculo del potencial en el punto P a una gran distancia de un conjunto de cargas.

Podemos considerar nuestro objeto como un conglomerado de cargas puntuales q_i dentro de cierta región limitada, como muestra la figura 6-7. (Más adelante podemos remplazar q_i por $\rho\,dV$ si lo deseamos.) Consideremos que cada carga q_i esté ubicada en $\boldsymbol{d}_i$ de un origen elegido en algún punto en medio del grupo de cargas. ¿Cuál es el potencial en el punto P ubicado en $\boldsymbol{R}$, donde $\boldsymbol{R}$ es mucho mayor que el $\boldsymbol{d}_i$ máximo? El potencial de todo el conjunto está dado por:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}, \tag{6.21}$$

donde r_i es la distancia entre P y la carga q_i (la longitud del vector $\boldsymbol{R} - \boldsymbol{d}_i$). Ahora bien, si la distancia entre las cargas y P, el punto de observación, es enorme, cada r_i se puede aproximar con R. Cada término se convierte en q_i/R, y podemos sacar $1/R$ como factor común de la suma. Esto da el resultado simple

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{R}\sum_i q_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}, \tag{6.22}$$

donde Q es simplemente la carga total del objeto. Por lo tanto, encontramos que para puntos que están suficientemente lejos del conjunto de cargas, dicho conjunto aparece como una carga puntual. El resultado no es demasiado sorprendente.

¿Y qué pasa si hay igual número de cargas positivas y negativas? Entonces la carga total Q del objeto es cero. Éste no es un caso poco común; en verdad, los objetos son generalmente neutros, como sabemos. La molécula de agua es neutra, pero las cargas no están todas en un punto, de modo que si estamos lo suficientemente cerca deberíamos poder ver algunos efectos de las cargas separadas. Necesitamos una aproximación mejor que (6.22) para el potencial de una distribución arbitraria de carga en un objeto neutro. La ecuación (6.21) sigue siendo exacta, pero ya no podemos poner simplemente $r_i = R$. Necesitamos una expresión más precisa para r_i. Si el punto P está a una gran distancia, r_i diferirá de R con excelente aproximación, en la proyección de $\boldsymbol{d}$ sobre $\boldsymbol{R}$, como se puede ver en la figura 6-7 (tienen que imaginar que P está realmente más distante que lo indicado por la figura). En otras palabras, si $\boldsymbol{e}_R$ es el vector unitario en la dirección de $\boldsymbol{R}$, nuestra siguiente aproximación para r_i es

$$r_i \approx R - \boldsymbol{d}_i \cdot \boldsymbol{e}_R. \tag{6.23}$$

Lo que realmente queremos es $1/r_i$, que, como $d_i \ll R$, se puede escribir en nuestra aproximación en la forma:

$$\frac{1}{r_i} \approx \frac{1}{R}\left(1 + \frac{\boldsymbol{d}_i \cdot \boldsymbol{e}_R}{R}\right). \tag{6.24}$$

Sustituyendo esta expresión en (6.21), obtenemos que el potencial es

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{Q}{R} + \sum_i q_i \frac{\boldsymbol{d}_i \cdot \boldsymbol{e}_R}{R^2} + \cdots\right). \tag{6.25}$$

Los tres puntos suspensivos indican los términos de orden superior en d_i/R que hemos despreciado. Estos términos, así como los que ya hemos obtenido, son términos sucesivos de una expansión de Taylor de $1/r_i$ alrededor de $1/R$ en potencias de d_i/R.

El primer término de (6.25) es lo que obtuvimos antes; desaparece si el objeto es neutro. El segundo término depende de $1/R^2$, justamente como para un dipolo. De hecho, si *definimos*:

$$\boldsymbol{p} = \sum_i q_i \boldsymbol{d}_i \tag{6.26}$$

como una propiedad de la distribución de carga, el segundo término del potencial (6.25) es:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{e}_R}{R^2}, \tag{6.27}$$

exactamente un potencial dipolar. La cantidad $\boldsymbol{p}$ se llama momento dipolar de la distribución. Es una generalización de nuestra definición anterior, y se reduce a ella en el caso especial de dos cargas puntuales.

Nuestro resultado es que, suficientemente lejos de *cualquier* complicación de cargas que es neutra en conjunto, el potencial es un potencial de dipolo. Decrece como $1/R^2$ y varía como $\cos\theta$ —y su intensidad depende del momento dipolar de la distribución de carga—. Es por esta razón que los campos dipolares son importantes, puesto que el caso simple de un par de cargas puntuales es completamente raro.

Además, la molécula de agua tiene un momento dipolar muy grande. Los campos eléctricos que resultan de este momento son responsables de algunas de las propiedades importantes del agua. Para muchas moléculas, por ejemplo, la de CO_2, el momento dipolar se anula debido a la simetría de la molécula. Para ellas deberíamos seguir aún más el desarrollo en serie, obteniendo otro término en el potencial que decrezca como $1/R^3$, el cual se llama potencial cuadrupolar. Más adelante estudiaremos esos casos.

6-6 Campos de conductores cargados

Hemos terminado los ejemplos con los que queríamos cubrir las situaciones en que la distribución de carga se conoce desde un principio. Han sido problemas sin complicaciones serias, en los que a lo sumo intervenía alguna integración. Veamos ahora un tipo enteramente nuevo de problemas, la determinación de los campos cerca de conductores cargados.

Supongan que tenemos una situación en la que se coloca una carga total Q sobre un conductor arbitrario. Queremos poder decir exactamente dónde están las cargas. Se diseminarán de alguna manera sobre la superficie. ¿De qué manera podríamos saber cómo se han distribuido las cargas sobre la superficie? Se deberán distribuir de modo que el potencial de la superficie sea constante. Si la superficie no fuera una equipotencial, habría un campo eléctrico dentro del conductor y las cargas se moverían hasta obtener cero. El problema general de este tipo se puede resolver de la siguiente manera. Hacemos una conjetura sobre la distribución y calculamos el potencial. Si el potencial es constante en todos los puntos de la superficie, el problema está terminado. Si la superficie no es una equipotencial, hemos usado una distribución de carga que no servía y

tenemos que hacer otra conjetura —¡con la esperanza de que sea mejor!—. Esto puede seguir indefinidamente, a no ser que seamos perspicaces en las conjeturas sucesivas.

La cuestión de cómo estimar la distribución es matemáticamente difícil. Por supuesto que la naturaleza tiene tiempo de hacerlo; las cargas interaccionan hasta que se equilibran. Sin embargo, cuando tratamos de resolver el problema, nos lleva tanto tiempo hacer cada prueba que el método es muy tedioso. Con un grupo arbitrario de conductores y cargas el problema puede ser muy complicado y, en general, no se puede resolver sin métodos numéricos bastante elaborados. En nuestros días, esos cálculos numéricos se preparan para una computadora que hace el trabajo por nosotros una vez que le indiquemos cómo proceder.

Por otra parte, hay montones de pequeños casos prácticos donde sería bueno poder encontrar la respuesta con un método más directo —sin tener que escribir un programa para una computadora—. Afortunadamente hay una cantidad de casos donde se puede obtener la respuesta exprimiéndola de la naturaleza por medio de algún ardid. El primer truco que describiremos implica hacer uso de soluciones que ya hemos obtenido para situaciones en que las cargas tienen posiciones especificadas.

6-7 El método de las imágenes

Hemos resuelto, por ejemplo, el campo de dos cargas puntuales. La figura 6-8 muestra algunas de las líneas de campo y superficies equipotenciales que obtuvimos con los cálculos del capítulo 4. Consideren ahora la superficie equipotencial marcada con A. Supongan que tomáramos una hoja fina de metal y le diéramos la forma de esta superficie. Si la colocamos exactamente sobre la superficie y ajustamos su potencial al valor apropiado, nadie se daría cuenta nunca de que está allí, porque nada cambiaría.

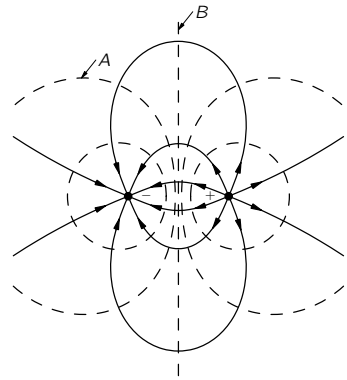


Figura 6-8. Líneas de campo y equipotenciales de dos cargas puntuales.

¡Pero observen! Realmente hemos resuelto un problema *nuevo*. Tenemos una situación en la que la superficie de un conductor curvado y a un potencial determinado se coloca cerca de una carga puntual. Si la hoja de metal que colocamos en la superficie equipotencial llega a cerrarse sobre sí misma (o en la práctica, si se aleja lo suficiente) tendremos el tipo de situación que consideramos en la sección 5-10, en la que nuestro espacio está dividido en dos regiones, una dentro y otra fuera de un cascarón conductor cerrado. Encontramos allí que los campos en las dos regiones son completamente independientes uno de otro. Así pues, tendríamos los mismos campos fuera de nuestro conductor curvo, haya lo que haya dentro. Hasta podríamos rellenarlo con material conductor. En consecuencia hemos encontrado los campos para la disposición de la figura 6-9. En el espacio exterior al conductor el campo es exactamente como el de dos cargas puntuales, como se muestra en la figura 6-8. Dentro del conductor es cero. Además —como debe ser—, el campo eléctrico inmediatamente fuera del conductor es normal a la superficie.

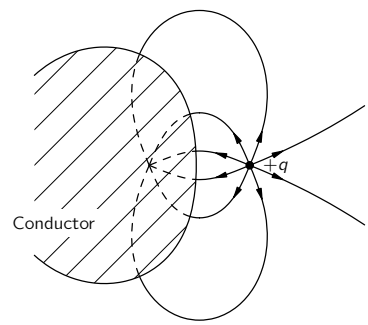


Figura 6-9. El campo fuera de un conductor con la forma de la equipotencial A de la figura 6-8.

Por lo tanto, podemos calcular los campos de la figura 6-9 calculando el campo debido a q y a una carga puntual imaginaria $-q$ en un punto apropiado. Así, la carga puntual que "imaginamos" que existe detrás de la superficie conductora se llama *carga cargas*.

En los libros pueden encontrar largas listas de soluciones para conductores de forma hiperbólica y otras de apariencia complicada y se preguntarán cómo resolvió alguien alguna vez estas formas terribles. ¡Fueron resueltas trabajando al revés! Alguien resolvió un problema simple con cargas dadas. Luego vio que una superficie equipotencial aparecía con una forma nueva y escribió un trabajo en el que señalaba que el campo de esa forma particular se podía describir de cierta manera.

6-8 La carga puntual cerca de un plano conductor

La aplicación más simple de este método es hacer uso de la superficie equipotencial plana B de la figura 6-8. Con ella podemos resolver el problema de una

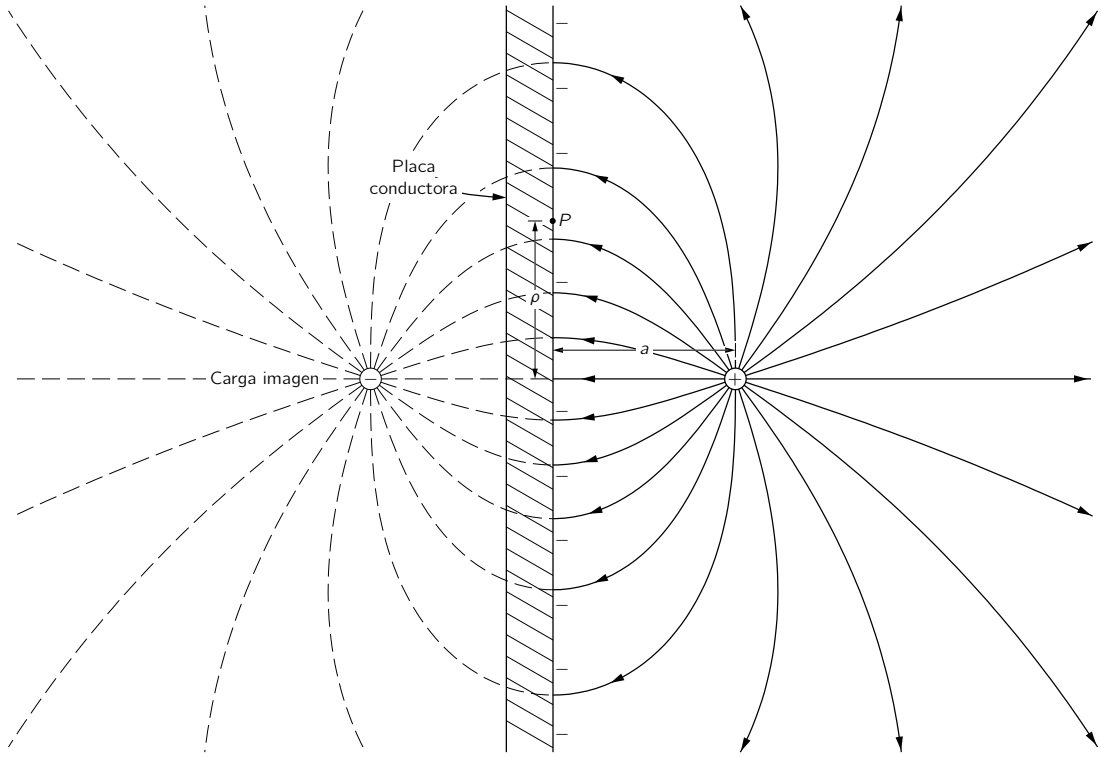


Figura 6-10. El campo de una carga cerca de una superficie plana conductora hallado por medio del método de las imágenes.

carga frente a una hoja conductora. Simplemente suprimimos la mitad izquierda de la figura. La figura 6-10 muestra las líneas de campo de nuestra solución. Observen que el plano, como está a la mitad de camino entre las dos cargas, tiene potencial cero. Hemos resuelto el problema de una carga positiva cerca de una hoja conductora a tierra.

Hemos encontrado el campo total, pero ¿y cuáles son las cargas *reales* que lo originan? Hay, además de nuestra carga puntual positiva, cargas negativas inducidas sobre la hoja conductora, las cuales han sido atraídas por la carga positiva (desde muy lejos). Supongan ahora que por alguna razón técnica —o por curiosidad— querrían saber cómo están distribuidas las cargas negativas sobre la superficie. Pueden hallar la densidad superficial de carga usando el resultado que obtuvimos en la sección 5-9 con la ley de Gauss. La componente normal del campo eléctrico inmediatamente fuera de un conductor es igual a la densidad de carga superficial σ dividida entre ϵ_0. Podemos hallar la densidad de carga en cualquier punto de la superficie trabajando hacia atrás a partir de la componente normal del campo eléctrico en la superficie. Lo sabemos porque conocemos el campo en todo punto.

Consideren un punto de la superficie a una distancia ρ del punto directamente enfrente de la carga positiva (véase figura 6-10). En este punto el campo eléctrico es normal a la superficie y se dirige hacia ella. La componente del campo de la carga puntual *positiva* normal a la superficie es:

$$E_{n+} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{aq}{(a^2+\rho^2)^{3/2}}. \tag{6.28}$$

A ésta debemos agregar el campo eléctrico producido por la carga cargas negativa. Eso duplica simplemente la componente normal (y cancela todas las otras) de modo que la densidad de carga σ en cualquier punto de la superficie es:

$$\sigma(\rho) = \epsilon_0 E(\rho) = -\frac{2aq}{4\pi(a^2+\rho^2)^{3/2}}. \tag{6.29}$$

Una verificación interesante de nuestro resultado es integrar σ sobre toda la superficie. Encontramos que la carga total inducida es $-q$, como tiene que ser.

Otra pregunta más: ¿hay alguna fuerza sobre la carga puntual? Sí, porque hay una atracción de la carga superficial negativa inducida sobre la placa. Ahora que sabemos cuáles son las cargas superficiales [por la ecuación (6.29)], podríamos calcular la fuerza sobre nuestra carga puntual positiva por medio de una integral. Pero también sabemos que la fuerza que actúa sobre la carga positiva es exactamente igual a la que *se tendría* con la carga cargas negativa en vez de la placa, porque los campos a su alrededor son iguales en ambos casos. La carga puntual experimenta una fuerza hacia la placa cuyo módulo es:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q^2}{(2a)^2}. \tag{6.30}$$

Hemos encontrado la fuerza mucho más fácilmente que integrando sobre todas las cargas negativas.

6-9 La carga puntual cerca de una esfera conductora

¿Qué otras superficies además del plano tienen una solución simple? La que sigue en dificultad es una esfera. Hallemos los campos alrededor de una esfera metálica conectada a tierra cerca de la cual hay una carga puntual q como muestra la figura 6-11. Ahora bien, busquemos una situación física simple que dé una esfera como superficie equipotencial. Si buscamos entre los problemas que ya han sido resueltos, encontramos que alguien notó que el campo de dos cargas puntuales *desiguales* tiene una equipotencial que es una esfera. ¡Ajá! Si elegimos la ubicación de una carga imagen —y tomamos la cantidad justa de carga— puede que logremos hacer que la superficie equipotencial se ajuste a nuestra esfera. Por cierto que se puede hacer con la siguiente prescripción.

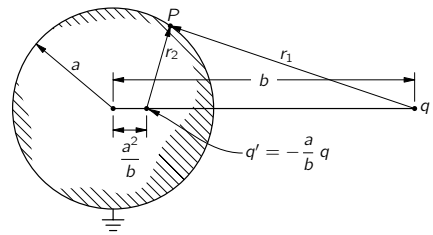


Figura 6-11. La carga puntual q induce cargas sobre una esfera conductora a tierra cuyos campos son los de una carga imagen q' ubicada en el punto que se muestra.

Supongan que quieren que la superficie equipotencial sea una esfera de radio a con su centro a una distancia b de la carga q. Pongan una carga imagen de valor $q' = -q(a/b)$ en la línea de la carga al centro de la esfera y a una distancia a^2/b del centro. La esfera estará a potencial cero.

La razón matemática proviene de que una esfera es el lugar geométrico de todos los puntos cuyas distancias a dos puntos tienen una razón constante. Refiriéndonos a la figura 6-11, el potencial en P debido a q y q' es proporcional a

$$\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2}.$$

Por lo tanto, el potencial será cero en todos los puntos para los cuales:

$$\frac{q'}{r_2} = -\frac{q}{r_1} \qquad \text{o} \qquad \frac{r_2}{r_1} = -\frac{q'}{q}.$$

Si colocamos q' a una distancia a^2/b del centro, el cociente r_2/r_1 tiene el valor constante a/b. Luego, si

$$\frac{q'}{q} = -\frac{a}{b} \tag{6.31}$$

la esfera es una equipotencial. Su potencial es, de hecho, cero.

¿Qué ocurre si estamos interesados en una esfera que no esté a potencial cero? Sería así únicamente si sucediera que su carga total fuera accidentalmente q'. Por supuesto que si está a tierra, las cargas inducidas en ella tendrían que tener exactamente ese valor. Pero ¿y si está aislada y no le hemos puesto ninguna carga? ¿O si sabemos que se le ha puesto una carga total Q? ¿O simplemente si se le ha dado un potencial *distinto* de cero? Todas estas preguntas se contestan fácilmente. Siempre podemos agregar una carga puntual q'' en el centro de la esfera. Ésta sigue siendo una equipotencial por superposición; sólo cambia el valor del potencial.

Por ejemplo, si tenemos una esfera conductora inicialmente descargada y aislada de cualquier otra cosa, y le acercamos la carga puntual positiva q, la

carga total de la esfera seguirá siendo cero. Por lo ello, la solución se encuentra usando una carga imagen q' como antes, pero agregando además una carga q'' en el centro de la esfera, eligiendo

$$q'' = -q' = \frac{a}{b}\, q. \tag{6.32}$$

En todo punto exterior a la esfera los campos están dados por la superposición de los campos de q, q' y q''. El problema está resuelto.

Podemos ver ahora que habrá una fuerza de atracción entre la esfera y la carga puntual q. No es cero aunque no haya carga sobre la esfera neutra. ¿De dónde proviene la atracción? Cuando acercan una carga positiva a una esfera conductora, la carga positiva atrae cargas negativas hacia el lado más cercano a ella y deja cargas positivas sobre la superficie más alejada. La atracción de las cargas negativas excede la repulsión de las cargas positivas; hay una atracción resultante. Podemos hallar cuánto vale la atracción calculando la fuerza que se ejerce sobre q en el campo producido por q' y q''. La fuerza total es la suma de la fuerza de atracción entre q y una carga $q' = -(a/b)q$ a una distancia $b - (a^2/b)$, y la fuerza de repulsión entre q y una carga $q'' = +(a/b)q$ a una distancia b.

Los que cuando eran niños se entretenían con la lata de polvo de hornear que tiene en su etiqueta la figura de una lata de polvo de hornear que tiene en su etiqueta la figura de una lata de polvo de hornear que tiene... puede que se interesen en el siguiente problema. Dos esferas iguales, una con una carga total $+Q$ y la otra con una carga total $-Q$, se colocan a cierta distancia una de otra. ¿Cuál es la fuerza entre ambas? El problema se puede resolver con un número infinito de imágenes. Primero cada esfera con una carga en su centro. Estas cargas tendrán cargas imagen en la otra esfera. Las cargas imagen tendrán imágenes, etc., etc., etc. La solución es como la figura de la lata de polvo de hornear —y converge rápidamente—.

6-10 Condensadores; el condensador de placas paralelas

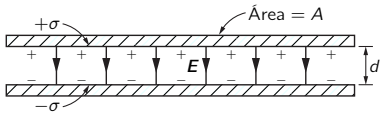


Figura 6-12. Un condensador de placas paralelas.

Tomamos ahora otro tipo de problemas con conductores. Consideren dos grandes placas metálicas paralelas y separadas por una pequeña distancia en comparación a su ancho. Supongamos que en las placas se han puesto cargas iguales y opuestas. Las cargas de cada placa atraerán a las cargas de la otra placa y se distribuirán uniformemente en las superficies internas de las placas. Las placas tendrán densidades superficiales de carga $+\sigma$ y $-\sigma$, respectivamente, como en la figura 6-12. Por lo dicho en el capítulo 5 sabemos que el campo entre las placas es σ/ϵ_0 y que el campo fuera de las placas es cero. Las placas tendrán potenciales diferentes ϕ_1 y ϕ_2. Por conveniencia llamaremos V a la diferencia; a menudo se la llama "voltaje":*

$$\phi_1 - \phi_2 = V.$$

(Encontrarán que la gente suele usar V para el potencial, pero nosotros hemos preferido usar ϕ.)

La diferencia de potencial V es el trabajo por unidad de carga que se necesita para llevar una pequeña carga desde una placa a la otra, por lo que

$$V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\, d = \frac{d}{\epsilon_0 A}\, Q, \tag{6.33}$$

donde $\pm Q$ es la carga total de cada placa, A es el área de las placas y d es la separación que hay.

Hemos encontrado que el voltaje es proporcional a la carga. Esa proporcionalidad entre V y Q se encuentra para dos conductores cualesquiera en el espacio si hay una carga positiva en uno y una carga negativa igual en el otro. La diferencia de potencial entre ellos —o sea el voltaje— será proporcional a la carga. (Estamos suponiendo que no hay otras cargas alrededor.)

* N. del T.: también "tensión", en español.

¿Por qué esta proporcionalidad? Simplemente por el principio de superposición. Supongan que conocemos la solución para un conjunto de cargas y luego superpondremos dos de esas soluciones. Las cargas se duplican, los campos se duplican y el trabajo realizado al llevar una carga unidad de un punto a otro también se duplica. En consecuencia la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera es proporcional a las cargas. En particular, la diferencia de potencial entre los dos conductores es proporcional a las cargas que tiene. Alguien escribió originariamente la ecuación de proporcionalidad de otra manera. Esto es, escribió:

$$Q = CV,$$

donde C es una constante. Este coeficiente de proporcionalidad se llama *capacidad* y ese sistema de dos conductores se llama *condensador*.* Para nuestro condensador de placas paralelas

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad \text{(placas paralelas)}. \tag{6.34}$$

Esta fórmula no es exacta porque el campo no es realmente uniforme en todo punto entre las placas, como hemos supuesto. El campo no desaparece repentinamente en los bordes, sino que realmente es más bien como muestra la figura 6-13. La carga total no es σA como hemos supuesto —hay una pequeña corrección por los efectos en los bordes—. Para hallar la corrección tendremos que calcular el campo más exactamente y ver qué pasa en los bordes. Esto es un problema matemático complicado que, sin embargo, se puede resolver con técnicas que no describiremos ahora. El resultado de esos cálculos es que la densidad de carga aumenta ligeramente cerca del borde de las placas. Esto significa que la capacidad de las placas es un poco mayor de lo que hemos calculado.

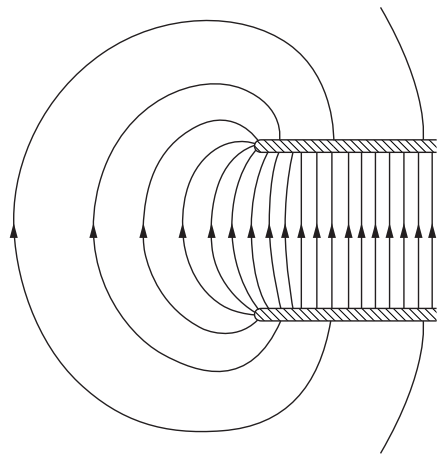


Figura 6-13. El campo eléctrico cerca del borde de dos placas paralelas.

Sólo hablamos de la capacidad de dos conductores. A veces la gente habla de la capacidad de un solo objeto. Dicen, por ejemplo, que la capacidad de una esfera de radio a es $4\pi\epsilon_0 a$. Lo que imaginan es que el otro terminal es una esfera de radio infinito —que cuando hay una carga $+Q$ sobre la esfera, la carga opuesta, $-Q$, está sobre una esfera infinita—. También se puede hablar de capacidades cuando hay tres o más conductores, cosa que, sin embargo, pospondremos.

Supongan que queremos tener un condensador de capacidad muy grande. Podríamos obtener una capacidad grande tomando un área enorme y una separación muy pequeña. Podríamos poner papel encerado entre hojas de aluminio y enrollar todo. (Si lo sellamos con plástico, tenemos un típico condensador de radio.) ¿Qué utilidad tiene? Sirve para almacenar la carga. Si tratamos de almacenar cargas en una esfera, por ejemplo, su potencial se eleva rápidamente a medida que la cargamos. Puede llegar a ser tan alto que la carga comience a escaparse en forma de chispas. Sin embargo, si ponemos la misma carga en un condensador cuya capacidad es muy grande, la diferencia de potencial desarrollada en el condensador será pequeña.

En muchas aplicaciones en circuitos electrónicos es útil tener algo que pueda absorber o entregar grandes cantidades de carga sin variar mucho el potencial. Un condensador (o "capacitor") hace justamente eso. Hay también muchas aplicaciones en instrumentos electrónicos y en computadoras donde se usa un condensador para obtener una variación determinada de voltaje en respuesta a una variación determinada de carga. Vimos una aplicación similar en el capítulo 23, volumen I, donde describimos las propiedades de los circuitos resonantes.

Conforme a la definición de C, vemos que su unidad es un coulomb/voltio. Esta unidad también se llama *faradio*. Examinando la ecuación (6.34) vemos que es posible expresar las unidades de ϵ_0 como faradio/metro, que es la unidad que más se usa. Los tamaños típicos de condensadores van desde un micromicrofaradio

$$\boldsymbol{\epsilon_0 \approx \frac{1}{36\pi \times 10^9}\ \text{faradio/metro}}$$

* Algunos opinan que se debería usar "capacitancia" y "capacitor" en vez de "capacidad" y "condensador". Hemos decidido usar la terminología antigua porque es aún la que se oye más comúnmente en el laboratorio de física —¡aunque no lo sea en los textos!—.
N. del T.: recomendamos, sin embargo, el uso de la nueva terminología internacionalmente aceptada, porque en la mayoría de los países de habla hispana los laboratorios que emplean la terminología antigua (en total muy pocos, por otra parte) son menos que los textos que utilizan la nueva terminología.

(= 1 picofaradio) a los milifaradios. Los condensadores pequeños de unos pocos microfaradios se usan en los circuitos sintonizados de alta frecuencia y en los filtros de fuentes de potencia se encuentran capacidades de hasta cientos o miles de microfaradios. Un par de placas de un centímetro cuadrado de superficie a una distancia de un milímetro tienen una capacidad de aproximadamente un microfaradio.

6-11 Descarga de alto voltaje

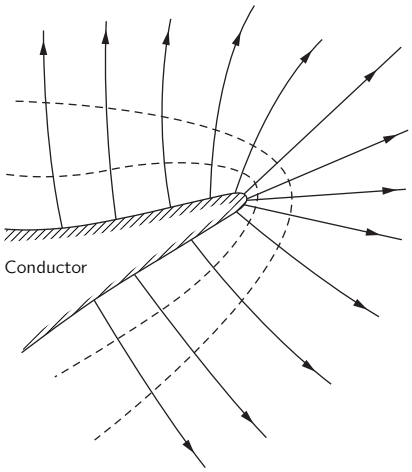


Figura 6-14. El campo eléctrico es muy alto cerca de una punta aguda en un conductor.

Nos gustaría estudiar cualitativamente algunas características de los campos alrededor de los conductores. Si cargamos un conductor no esférico sino que tiene una punta o un extremo muy agudo, como por ejemplo el objeto dibujado en la figura 6-14, el campo alrededor de la punta es mucho más alto que en otras regiones. Cualitativamente, la razón es que las cargas tratan de extenderse al máximo sobre la superficie de un conductor y el extremo de una punta aguda está lo más lejos posible de la mayor parte de la superficie. Algunas cargas de la placa son obligadas a irse hacia la punta. Una cantidad relativamente *pequeña* de carga en el extremo de la punta puede dar lugar a una *densidad* superficial grande; una alta densidad de carga significa un campo alto justo afuera.

Una manera de ver que el campo es máximo en los puntos del conductor donde el radio de curvatura es mínimo, es considerar la combinación de dos esferas, una grande y otra pequeña, conectadas por un alambre, como lo muestra la figura 6-15. Es una versión algo idealizada del conductor de la figura 6-14. El alambre tendrá poca influencia sobre los campos externos; está allí para mantener las esferas al mismo potencial. Ahora bien, ¿cuál de las dos esferas tiene el campo más alto en su superficie? Si la esfera de la izquierda tiene radio a y una carga Q, su potencial es más o menos:

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{a}.$$

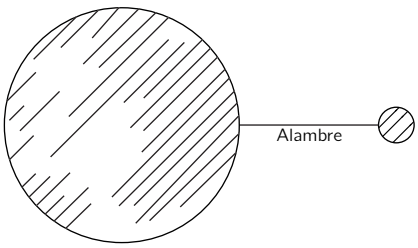


Figura 6-15. Se puede aproximar el campo de un objeto puntiagudo por medio de dos esferas con el mismo potencial.

(Por supuesto que la presencia de una esfera altera la distribución de carga sobre la otra, de modo que las cargas no son en realidad esféricamente simétricas en ninguna de las dos. Pero si estamos interesados únicamente en una estimación de los campos, podemos usar el potencial de una carga esférica.) Si la esfera menor, de radio b, tiene una carga q, su potencial es aproximadamente:

$$\phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{b}.$$

Pero $\phi_1 = \phi_2$, así que

$$\frac{Q}{a} = \frac{q}{b}.$$

Por otra parte, el campo en la superficie es proporcional [véase la ecuación (5.8)] a la densidad superficial de carga, que es del orden de la carga total sobre el cuadrado del radio. Obtenemos:

$$\frac{E_a}{E_b} = \frac{Q/a^2}{q/b^2} = \frac{b}{a}. \tag{6.35}$$

En consecuencia el campo es más alto en la superficie de la esfera pequeña. Los campos son inversamente proporcionales a los radios.

Este resultado es muy importante desde el punto de vista técnico, porque habrá una descarga en el aire si el campo es demasiado grande. Lo que ocurre es que una carga suelta (un electrón o un ion) en el aire es acelerada por el campo y si éste es muy grande, la carga puede adquirir velocidad suficiente antes de golpear otro átomo y expulsar un electrón de ese átomo. Como resultado se producen más y más iones. Su movimiento constituye una descarga o chispa. Si quieren cargar un objeto a un potencial alto y no quieren que se descargue por medio de chispas al aire, deben asegurarse de que la superficie sea lisa, de modo que no haya ningún lugar donde el campo sea anormalmente alto.

6-12 El microscopio de emisión por campo

Hay una aplicación interesante del campo eléctrico extremadamente alto que rodea cualquier protuberancia aguda en un conductor cargado. El *microscopio de emisión por campo* depende para su funcionamiento de los campos intensos producidos en una punta metálica aguda.* Se lo construye de la siguiente manera. Se coloca una aguja fina, con una punta de unos 1 000 ángstroms de diámetro, en el centro de una esfera de vidrio al vacío (véase figura 6-16). La superficie interna de la esfera está recubierta de una capa delgada de material fluorescente y se aplica una diferencia de potencial muy alta entre el recubrimiento fluorescente y la aguja.

Consideremos primero lo que ocurre cuando la aguja es negativa respecto al recubrimiento fluorescente. Las líneas de campo están altamente concentradas en la punta aguda. El campo eléctrico puede llegar a 40 millones de volts por centímetro. Esos campos intensos extraen electrones de la superficie de la aguja, los cuales se aceleran en la diferencia de potencial entre la aguja y la capa fluorescente. Cuando llegan allí originan emisión de luz, como en la pantalla de un tubo de televisión.

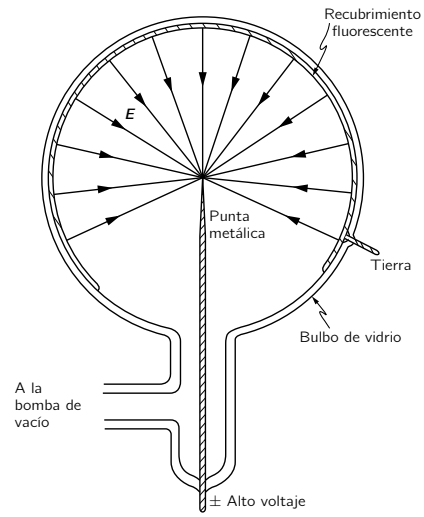


Figura 6-16. Microscopio de emisión por campo.

Los electrones que llegan a un punto determinado de la superficie fluorescente son, con una aproximación excelente, los que dejan el otro extremo de la línea radial de campo, porque los electrones viajarán a lo largo de la línea de campo que va desde el punto a la superficie. Vemos así en la superficie una especie de imagen de la punta de la aguja. Más precisamente, vemos un cuadro de la *emisividad* de la superficie de la aguja —es decir, de la facilidad con que los electrones pueden dejar la superficie de la punta metálica—. Si la resolución fuera suficientemente alta, se podría esperar resolver las posiciones de los átomos individuales de la punta de la aguja. Con electrones no es posible esta resolución por las razones siguientes. Primero, hay una difracción cuántica de las ondas electrónicas que borronea la imagen. Segundo, debido a los movimientos internos de los electrones en el metal, éstos tienen una pequeña velocidad inicial lateral al dejar la aguja y esta componente transversal y casual de la velocidad hace menos nítida la imagen. La combinación de estos dos efectos limita la resolución a 25 Å más o menos.

Sin embargo, si invertimos la polaridad e introducimos una pequeña cantidad de helio en el bulbo, es posible llegar a resoluciones mucho más altas. Cuando un átomo de helio choca con la punta de la aguja, el campo intenso que hay allí arranca un electrón del átomo de helio y lo deja con una carga positiva. El ion de helio se acelera entonces hacia la pantalla fluorescente a lo largo de una línea de campo. Como el ion de helio es mucho más pesado que el electrón, las longitudes de onda cuánticas son mucho menores. Si la temperatura no es muy alta, el efecto de las velocidades térmicas también es menor que en el caso del electrón. Como la imagen se borronea menos, se obtiene un cuadro mucho más nítido de la punta. Ha sido posible obtener aumentos de hasta 2 000 000 con el microscopio de emisión por campo a iones positivos —aumento que es 10 veces mejor que el obtenido con el mejor microscopio electrónico—.

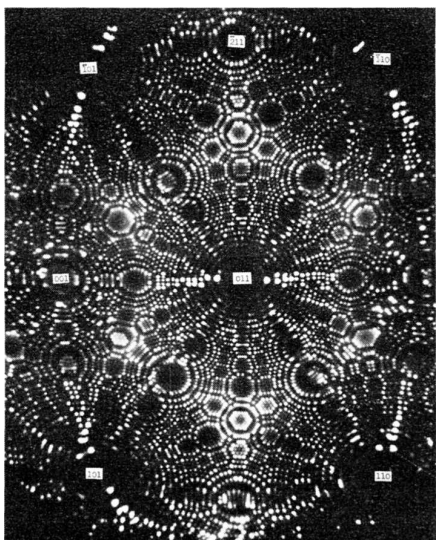


Figura 6-17. Imagen producida por un microscopio de emisión por campo. (Cortesía de Erwin W. Müller, profesor de Investigación en Física, Universidad Estatal de Pensilvania.)

La figura 6-17 es un ejemplo de los resultados obtenidos con un microscopio de emisión por campo usando una aguja de tungsteno. La parte central de un átomo de tungsteno ioniza un átomo de helio en forma ligeramente diferente que los espacios entre átomos de tungsteno. El diagrama de manchas sobre la pantalla fluorescente muestra la disposición de los *átomos individuales* en la punta de tungsteno. La razón de que las manchas aparezcan en anillos se puede comprender imaginando los átomos del metal como representados por una gran caja de bolillas apiladas en un arreglo rectangular. Si cortan una sección aproximadamente esférica de esta caja, verán el diagrama de anillos característico de la estructura atómica. El microscopio de emisión por campo proveyó a los seres humanos de un medio para ver átomos por primera vez. Es un logro notable, teniendo en cuenta la simplicidad del instrumento.

* Véase E. W. Müller: "The field-ion microscope", *Advances in Electronics and Electron Physics*, **13**, 83-179 (1960). Academic Press, Nueva York.

7

El campo eléctrico en diversas situaciones (continuación)

7-1 Métodos para calcular el campo electrostático

7-2 Los campos en dos dimensiones; funciones de la variable compleja

7-3 Oscilaciones de plasma

7-4 Las partículas coloidales en un electrolito

7-5 El campo electrostático de una rejilla

7-1 Métodos para calcular el campo electrostático

Este capítulo es una continuación de nuestras consideraciones sobre las características de los campos eléctricos en varias situaciones particulares. Describiremos algunos de los métodos más elaborados para resolver problemas con conductores. No es de esperar que podamos dominar ahora esos métodos más avanzados. Mientras tanto puede ser interesante tratar de tener una idea sobre el tipo de problemas que pueden ser resueltos utilizando métodos que podrán ser aprendidos en cursos más avanzados. Consideraremos para tal fin dos ejemplos en los cuales la distribución de carga no es fija ni transportada por un conductor, sino que está determinada por alguna otra ley de la física.

Como acabamos de verlo en el capítulo 6, el problema del campo electrostático es fundamentalmente simple cuando la distribución de cargas está determinada; en este caso se requiere solamente el cálculo de una integral. Cuando hay conductores presentes, sin embargo, surgen complicaciones debido a que la distribución de cargas en los conductores no se conoce inicialmente; la carga debe distribuirse sobre la superficie del conductor de modo que el mismo sea una superficie equipotencial. Así, la solución de tal tipo de problemas no es directa ni simple.

Hemos visto un método indirecto de resolución de tales problemas por el cual calculamos las equipotenciales para una cierta distribución dada de cargas y luego remplazamos alguna de ellas por una superficie conductora. De esta manera podemos construir un catálogo de soluciones particulares para conductores en forma de esferas, planos, etc. La utilización de imágenes, descrita en el capítulo 6, es un ejemplo de método indirecto. Describiremos otro en este capítulo.

Si el problema a resolver no pertenece a la clase de problemas para los cuales podemos construir soluciones por medio del método indirecto, nos vemos obligados a resolver el problema por un método más directo. El problema matemático del método directo es la resolución de la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2\phi = 0, \tag{7.1}$$

con la condición de que ϕ debe tomar un valor constante sobre ciertas fronteras —la superficie de los conductores—. Los problemas que requieren la solución de la ecuación diferencial del campo y sujetos a ciertas *condiciones de frontera* son llamados problemas con *valor de frontera*. Éstos han sido objeto de un considerable estudio matemático. En el caso de conductores de forma complicada, no existen métodos analíticos generales. Igualmente, un problema simple como el de un cilindro de metal cargado, cerrado en los extremos —una lata de cerveza— presenta dificultades matemáticas formidables. Puede ser resuelto sólo aproximadamente utilizando métodos numéricos. El *único* método general de resolución es el método numérico.

Existen unos pocos problemas para los cuales la ecuación (7.1) puede ser resuelta en forma directa. Por ejemplo, el problema de un conductor cargado con forma de elipsoide de revolución puede ser resuelto exactamente en términos de una función especial conocida. La solución para un disco delgado se puede obtener considerando el elipsoide como infinitamente achatado. De un modo similar, la solución para una aguja se puede obtener haciendo el elipsoide infinitamente alargado. No obstante, es importante insistir sobre el hecho de que los únicos métodos generales de aplicación directa son los métodos numéricos.

Los problemas con condiciones en la frontera también pueden ser resueltos por medio de mediciones sobre analogías físicas reales. La ecuación de Laplace da lugar a muchas situaciones físicas diferentes: la propagación del calor en régimen permanente, el flujo irrotacional de un fluido, el flujo de corriente en un medio extenso y la deformación de una membrana elástica. Frecuentemente es posible construir un modelo físico que sea análogo al problema eléctrico que se desea resolver. Mediante la medición de una cantidad análoga conveniente sobre el modelo puede determinarse la solución del problema que nos interesa. Un ejemplo de la técnica por analogía es la utilización de un tanque electrolítico para la resolución de problemas de dos dimensiones en electrostática. Esto es correcto debido a que la ecuación diferencial para el potencial en un medio conductor uniforme es la misma que para el vacío.

Existen muchas situaciones físicas en las cuales las variaciones de los campos físicos en una dirección son nulas, y pueden despreciarse en comparación con las variaciones en las otras dos direcciones. Tal tipo de problemas se llaman de dos dimensiones; el campo depende de dos coordenadas solamente. Por ejemplo, si colocamos un largo alambre cargado a lo largo del eje z, entonces, para puntos no muy lejanos del alambre el campo eléctrico depende de x y y, pero no de z; el problema es de dos dimensiones. Puesto que en un problema de dos dimensiones $\partial\phi/\partial z = 0$, la ecuación para ϕ en el espacio libre es:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0. \tag{7.2}$$

Debido a que la ecuación en dos dimensiones es relativamente simple, existe una amplia gama de condiciones bajo las cuales se la puede resolver analíticamente. Hay, en efecto, una técnica matemática indirecta muy poderosa que depende de un teorema relativo a las funciones matemáticas de variable compleja, que describiremos a continuación.

7-2 Los campos en dos dimensiones; funciones de la variable compleja

La variable compleja $\mathfrak{z}$ se define como:

$$\mathfrak{z} = x + iy.$$

(No debemos confundir $\mathfrak{z}$ con la coordenada z a la cual no tendremos en cuenta en las discusiones siguientes puesto que suponemos que los campos son independientes de z.) Todo punto con coordenadas en x y y le corresponde ahora un número complejo $\mathfrak{z}$. Podemos considerar a $\mathfrak{z}$ como única variable (compleja) y con ella escribir en la forma usual las funciones matemáticas $F(\mathfrak{z})$. Por ejemplo,

$$F(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z}^2,$$

o

$$F(\mathfrak{z}) = 1/\mathfrak{z}^3,$$

o

$$F(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z}\ln\mathfrak{z},$$

y así sucesivamente.

Dando una función particular $F(\mathfrak{z})$ podemos sustituir $\mathfrak{z} = x + iy$ y obtenemos una función de x y y —con una parte real y otra imaginaria—. Por ejemplo,

$$\mathfrak{z}^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy. \tag{7.3}$$

Cualquier función $F(\mathfrak{z})$ puede ser escrita como la suma de una parte real y una parte imaginaria, cada una de ellas en función de x y y:

$$F(\mathfrak{z}) = U(x, y) + iV(x, y), \tag{7.4}$$

donde $U(x, y)$ y $V(x, y)$ son funciones reales. Así, de cualquier función compleja $F(\mathfrak{z})$ pueden deducirse dos nuevas funciones $U(x, y)$ y $V(x, y)$. Por ejemplo, $F(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z}^2$ nos da las dos funciones:

$$U(x,y) = x^2 - y^2, \tag{7.5}$$

y

$$V(x,y) = 2xy. \tag{7.6}$$

Nos enfrentamos ahora a un teorema matemático milagroso que es tan agradable que vamos a dejar su demostración para alguno de los cursos de matemáticas. (No debemos revelar todos los misterios de la matemática, de lo contrario se volvería muy aburrida.) Para una "función ordinaria" cualquiera (los matemáticos la definirán mejor) las funciones U y V satisfacen *automáticamente* las relaciones

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}, \tag{7.7}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}. \tag{7.8}$$

Se deduce inmediatamente que cada una de las funciones U y V satisface la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \tag{7.9}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \tag{7.10}$$

Las funciones (7.5) y (7.6) cumplen visiblemente estas ecuaciones.

Así, partiendo de una función ordinaria cualquiera podemos llegar a dos funciones $U(x,y)$ y $V(x,y)$ que son soluciones de la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Cada función representa un posible potencial electrostático. Podemos tomar una función $F(\mathfrak{z})$ *cualquiera* y ella deberá representar un caso *particular* de problema de campo eléctrico —en realidad *dos* problemas, puesto que *ambas*, U y V, representan soluciones—. Podemos escribir tantas soluciones como lo deseemos —construyendo este tipo de funciones— ya que nos restará sólo encontrar el *problema* que corresponde a cada solución. Podrá parecer que esto es volver atrás, pero es un enfoque posible.

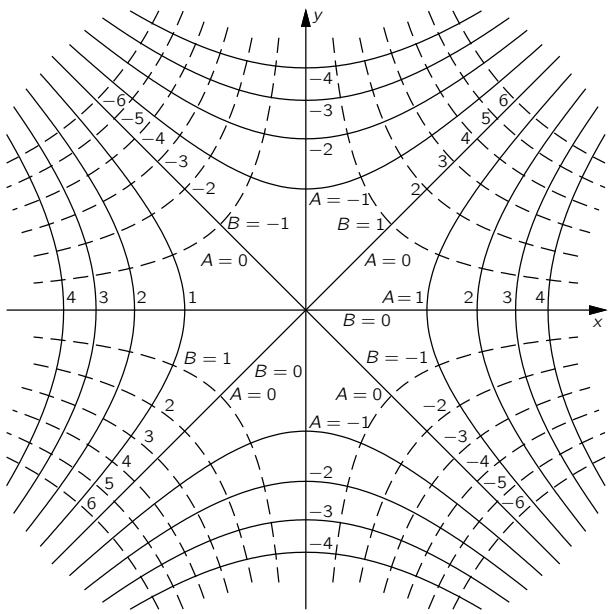


Figura 7-1. Dos sistemas de curvas ortogonales que pueden representar equipotenciales en un campo electrostático bidimensional.

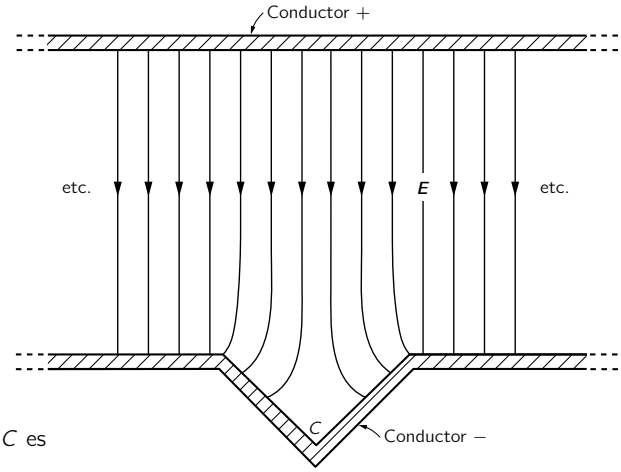


Figura 7-2. El campo cerca del punto C es el mismo que en la figura 7-1.

Por ejemplo, veamos qué física nos da la función $F(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z}^2$. A partir de ella obtenemos las dos funciones potenciales de (7.5) y (7.6). Para ver con qué problema está relacionada la función U hallemos las superficies equipotenciales tomando $U = A$, donde A es una constante:

$$x^2 - y^2 = A.$$

Ésta es la ecuación de una hipérbola rectangular. Para varios valores de A obtenemos las hipérbolas representadas en la figura 7-1. Cuando $A = 0$ tenemos el caso particular de dos rectas diagonales que pasan por el origen.

Este conjunto de equipotenciales corresponde al campo en una esquina interior en ángulo recto de un conductor. Si tenemos dos electrodos de la forma indicada en la figura 7-2, que son mantenidos con potenciales diferentes, el campo en las vecindades del vértice C representará el campo sobre el origen de la figura 7-1. Las líneas sólidas son las equipotenciales y las punteadas perpendiculares corresponden a las líneas de $\boldsymbol{E}$. Mientras que en las puntas y protuberancias el campo eléctrico tiende a ser más alto, en las muescas y agujeros tiende a ser *menor*.

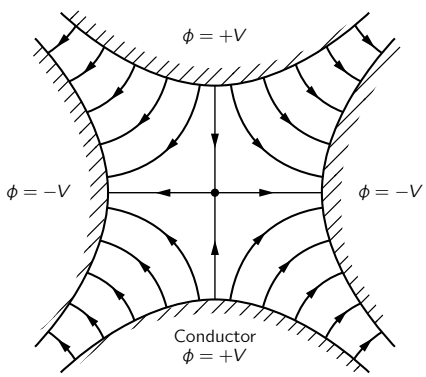


Figura 7-3. El campo en una lente cuadripolar.

La solución que hemos encontrado corresponde así a la que se obtendría para un electrodo en forma de hipérbola en las vecindades de un vértice de ángulo recto, o para dos hipérbolas con potenciales convenientes. Habrán observado que el campo de la figura 7-1 tiene una propiedad interesante. La componente x del campo eléctrico, E_x, está dada por:

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -2x.$$

El campo eléctrico es proporcional a la distancia del eje. Este hecho se utiliza en la construcción de aparatos (llamados lentes cuadrupolares) que son utilizados para enfocar haces de partículas (véase la sección 29-7). Comúnmente se obtiene el campo deseado utilizando cuatro electrodos en forma de hipérbola, como lo muestra la figura 7-3. Para las líneas de campo eléctrico en la figura 7-3, hemos copiado simplemente de la figura 7-1 el conjunto de curvas punteadas que representan a $V =$ constante. ¡Tenemos una ventaja! Las curvas para $V =$ constante son ortogonales a las curvas de $U =$ constante debido a las ecuaciones (7.7) y (7.8). Cada vez que tomamos una función $F(\mathfrak{z})$, obtenemos a partir de U y de V simultáneamente las equipotenciales y las líneas de campo. Y recordarán que hemos resuelto un problema o el otro según a qué sistema de curvas consideremos como equipotenciales.

Como segundo ejemplo consideremos la función

$$F(\mathfrak{z}) = \sqrt{\mathfrak{z}}. \tag{7.11}$$

Si escribimos

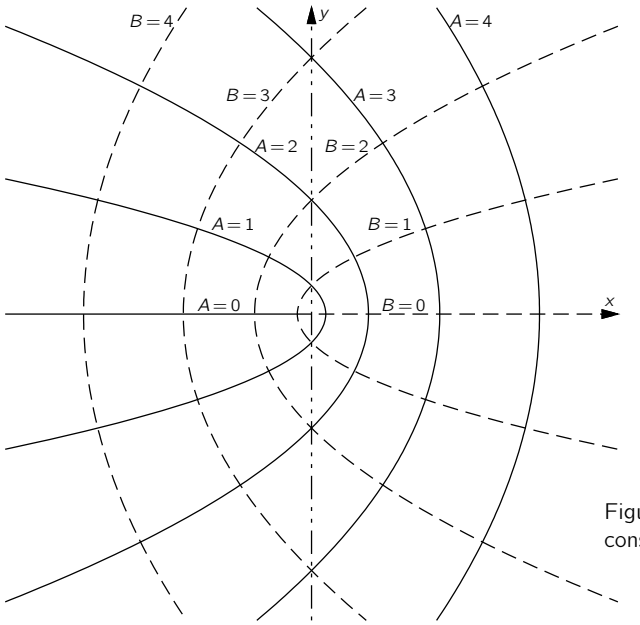


Figura 7-4. Curvas de $U(x, y)$ y $V(x, y)$ constantes, obtenidas de la ecuación (7.12).

$$\mathfrak{z} = x + iy = \rho e^{i\theta},$$

donde

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

y

$$\tan\theta = y/x,$$

entonces

$$\begin{aligned} F(\mathfrak{z}) &= \rho^{1/2} e^{i\theta/2} \\ &= \rho^{1/2}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta}{2}\right), \end{aligned}$$

de lo cual obtenemos

$$F(\mathfrak{z}) = \left[\frac{(x^2+y^2)^{1/2}+x}{2}\right]^{1/2} + i\left[\frac{(x^2+y^2)^{1/2}-x}{2}\right]^{1/2}. \qquad (7.12)$$

Las curvas $U(x, y) = A$ y $V(x, y) = B$ construidas obteniendo U y V de la ecuación (7.12) están dibujadas en la figura 7-4. Nuevamente, existen muchas situaciones posibles que pueden ser descritas por estos campos. Una de las más interesantes es el campo en las cercanías del borde de una lámina delgada. Si la línea $B = 0$ —a la derecha del eje y— representa una fina lámina delgada cargada, las líneas de campo cercanas a ella están dadas por las curvas correspondientes a diferentes valores de A. La situación física se indica en la figura 7-5.

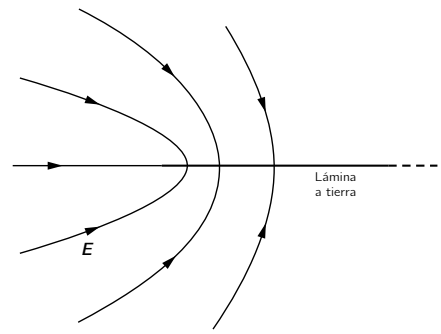


Figura 7-5. El campo eléctrico cerca del borde de una lámina delgada a tierra.

Otros ejemplos son:

$$F(\mathfrak{z}) = \mathfrak{z}^{2/3}, \qquad (7.13)$$

que representa el campo en el *exterior* de un vértice rectangular,

$$F(\mathfrak{z}) = \ln\mathfrak{z}, \qquad (7.14)$$

que determina el campo de una línea cargada, y

$$F(\mathfrak{z}) = 1/\mathfrak{z}, \qquad (7.15)$$

que da el campo creado por algo análogo a un dipolo eléctrico pero en dos dimensiones, es decir, dos rectas cargadas paralelas con signos diferentes y muy próximas la una a la otra.

No vamos a continuar con este tema en este curso, pero debemos insistir sobre el hecho de que, aunque el método de las variables complejas es muy poderoso, está limitado a problemas de dos dimensiones y, además, es un método indirecto.

7-3 Oscilaciones de plasma

Consideremos ahora aquellos problemas físicos en los cuales el campo no está determinado ni por las cargas fijas ni por las cargas en las superficies conductoras, pero sí por una combinación de dos fenómenos físicos. En otras palabras, el campo está gobernado simultáneamente por dos sistemas de ecuaciones: (1) las ecuaciones electrostáticas que se refieren a los campos eléctricos de la distribución de cargas y (2) una ecuación de otro dominio de la física que determina la posición y los movimientos de las cargas en presencia del campo.

El primer ejemplo que discutiremos es un problema dinámico en el cual el movimiento de las cargas está regido por las leyes de Newton. Un ejemplo simple de una situación de este tipo se presenta en el caso de un plasma, que es un gas ionizado compuesto de iones y de electrones libres distribuidos en una región del espacio. La ionosfera —una capa superior de la atmósfera— es un ejemplo de plasma. Los rayos ultravioleta del sol arrancan electrones a las moléculas del aire, creando iones y electrones libres. En un plasma de este tipo los iones positivos son mucho más pesados que los electrones, de modo que podemos despreciar el movimiento de los iones si lo comparamos con el de los electrones.

Sea n_0 la densidad de electrones en el estado de equilibrio no perturbado. Suponiendo que las moléculas son ionizadas individualmente, ésta debe ser también la densidad de iones positivos, ya que el plasma es eléctricamente neutro (cuando no está perturbado). Ahora supongamos que los electrones son apartados de su posición de equilibrio y nos preguntamos qué sucederá. Si la densidad de electrones crece en una región, se repelerán unos a otros y tenderán a retornar a sus posiciones de equilibrio. A medida que los electrones se desplazan hacia la posición inicial aumentan su energía cinética y en vez de llegar en reposo a la posición de equilibrio la sobrepasan. Oscilarán entonces en ese lugar. La situación es similar a lo que sucede con las ondas acústicas en las cuales la fuerza de restauración es la presión del gas. En un plasma la fuerza de restauración es la fuerza eléctrica que actúa sobre los electrones.

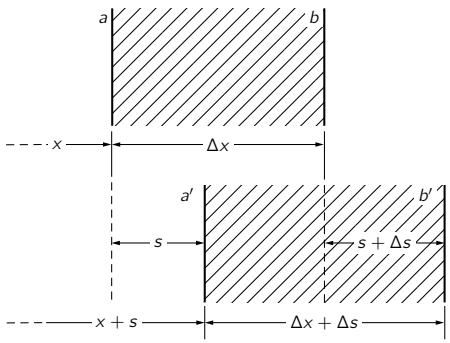


Figura 7-6. Movimiento en una onda de plasma. Los electrones del plano *a* se desplazan hacia *a′* y los de *b* hacia *b′*.

A fin de simplificar la discusión nos ocuparemos solamente del caso en el que el movimiento se realiza en una sola dirección, digamos x. Por lo que supondremos que los electrones inicialmente en x sean, en el instante t, desplazados de su posición de equilibrio en una pequeña cantidad $s(x,t)$. Como los electrones han sido desplazados, su densidad en general variará. Es fácil calcular el cambio de densidad. Con referencia a la figura 7-6, los electrones inicialmente contenidos entre los dos planos a y b son desplazados y se mantienen ahora entre los planos a' y b'. El número de electrones que se encuentre entre a y b es proporcional a $n_0\Delta x$; el *mismo* número se encuentra ahora contenido en el intervalo de amplitud $\Delta x + \Delta s$. La densidad se ha transformado en

$$n = \frac{n_0\Delta x}{\Delta x + \Delta s} = \frac{n_0}{1 + (\Delta s/\Delta x)}. \tag{7.16}$$

Si el cambio de densidad es pequeño podemos escribir [utilizando el desarrollo binomial para $(1+\epsilon)^{-1}$]

$$n = n_0\left(1 - \frac{\Delta s}{\Delta x}\right). \tag{7.17}$$

Suponemos que los iones positivos no se desplazan en forma apreciable (debido a su mayor inercia), de tal manera que su densidad permanece igual a n_0. Cada electrón transporta la carga $-q_e$, y entonces la densidad media de carga en todo punto estará dada por:

$$\rho = -(n - n_0)q_e,$$

o

$$\rho = n_0 q_e \frac{ds}{dx} \tag{7.18}$$

(donde hemos escrito $\Delta s/\Delta x$ en forma diferencial).

La densidad de carga está relacionada con el campo eléctrico a través de las ecuaciones de Maxwell. En particular,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{7.19}$$

Si el problema es efectivamente unidimensional (y si no hay otros campos excepto el debido al desplazamiento de los electrones), el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ tiene la componente única E_x. La ecuación (7.19) junto con la (7.18) nos dan:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{n_0 q_e}{\epsilon_0} \frac{\partial s}{\partial x}. \tag{7.20}$$

Integrando la ecuación (7.20) obtenemos:

$$E_x = \frac{n_0 q_e}{\epsilon_0} s + K. \tag{7.21}$$

Como $E_x = 0$ cuando $s = 0$, la constante de integración K es cero.

La fuerza actuante sobre un electrón en la posición desplazada es:

$$F_x = -\frac{n_0 q_e^2}{\epsilon_0} s, \tag{7.22}$$

que es una fuerza de restauración proporcional al desplazamiento s del electrón. Esto nos lleva a una oscilación armónica de los electrones. La ecuación de movimiento para un electrón desplazado es:

$$m_e \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{n_0 q_e^2}{\epsilon_0} s. \tag{7.23}$$

Encontramos que s variará armónicamente. Su variación con el tiempo será como $\cos \omega_p t$, o —utilizando la notación exponencial del volumen I— como:

$$e^{i\omega_p t}. \tag{7.24}$$

La frecuencia de oscilación ω_p está determinada por (7.23):

$$\omega_p^2 = \frac{n_0 q_e^2}{\epsilon_0 m_e}, \tag{7.25}$$

y se llama *frecuencia de plasma*. Éste es un número característico del plasma.

Cuando se trabaja con cargas electrónicas muchas personas prefieren expresar los resultados en términos de una cantidad e^2 definida por

$$e^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0} = 2.3068 \times 10^{-28} \text{ newton} \cdot \text{metro}^2. \tag{7.26}$$

Utilizando esta convención, la ecuación (7.25) se transforma en:

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e}, \tag{7.27}$$

que es la forma en que la encontrarán en la mayoría de los libros.

Así hemos hallado que una perturbación en el plasma dará origen a oscilaciones libres de los electrones alrededor de sus posiciones de equilibrio con la frecuencia natural ω_p, la cual es proporcional a la raíz cuadrada de la densidad electrónica. Los electrones de un plasma se comportan como un sistema resonante, como los que hemos descrito en el capítulo 23 del volumen I.

Esta resonancia natural del plasma tiene algunos efectos interesantes. Por ejemplo, si se desea propagar a través de la ionosfera una onda de radio se encontrará que puede penetrar solamente si su frecuencia es mayor que la frecuencia de plasma. En el caso contrario la señal se refleja. Deberemos utilizar, por lo tanto, altas frecuencias si deseamos comunicarnos con un satélite en el espacio.

Por otra parte, si deseamos comunicarnos con una estación de radio situada más allá del horizonte, deberemos utilizar frecuencias más bajas que la frecuencia de plasma de tal modo que la señal pueda ser reflejada hacia la Tierra.

Otro interesante ejemplo de oscilaciones de plasma se presenta en los metales. En un metal tenemos un plasma constituido de iones positivos y de electrones libres. La densidad n_0 es muy alta y, por lo tanto, ω_p también lo es. Pero es posible ahora observar las oscilaciones de los electrones. Ahora, de acuerdo con la mecánica cuántica, un oscilador armónico con la frecuencia natural ω_p tiene niveles de energía que están separados por la diferencia de energía $\hbar\omega_p$. Si entonces se envían electrones a través, digamos, de una hoja de aluminio y se realiza una medida cuidadosa de la energía de los electrones después de atravesarla, se debe esperar que a veces los electrones pierdan $\hbar\omega_p$ de energía debido a las oscilaciones de plasma. Esto es lo que realmente sucede. Se observó por primera vez experimentalmente en 1936 que electrones con energía de entre unos pocos cientos a unos pocos miles de electronvolts perdían la energía por saltos cuando chocaban o pasaban a través de una fina hoja de metal. El efecto no fue comprendido hasta 1953 cuando Bohm y Pines* mostraron que las observaciones podían explicarse en términos de excitaciones cuánticas de las oscilaciones de plasma en el metal.

7-4 Las partículas coloidales en un electrolito

Vayamos a otro fenómeno en el cual la posición de las cargas está determinada por un potencial que se debe en parte a las mismas cargas. Los efectos que resultan influyen en forma importante sobre el comportamiento de los coloides. Un coloide consiste en una suspensión en agua de pequeñas partículas cargadas que, aunque microscópicas, son muy grandes desde un punto de vista atómico. Si las partículas coloidales no están cargadas tienden a coagular en forma de grandes copos, pero debido a sus cargas, se repelen mutuamente y permanecen en suspensión.

Por otra parte, si existe alguna sal disuelta en el agua, podrá ser disociada en iones positivos y negativos (se llama electrolito a una solución iónica de este tipo). Los iones negativos son atraídos por las partículas coloidales (si suponemos que están cargadas positivamente), y los iones positivos son repelidos. Vamos a determinar cómo están distribuidos en el espacio los iones que rodean a ese tipo de partículas coloidales.

A fin de partir de una idea simple resolveremos en primer término el caso unidimensional solamente. Si consideramos a la partícula coloidal como una esfera de radio muy grande —¡en una escala atómica!— podremos tratar a una pequeña porción de su superficie como si fuera un plano. (Cada vez que se ensaya una nueva hipótesis a fin de comprender un nuevo fenómeno, es una excelente idea considerar el modelo más simple y, entonces, habiendo comprendido el problema mediante este modelo es mucho más sencillo, intentar realizar un cálculo mucho más preciso.)

Supongamos que la distribución de los iones da lugar a una densidad de carga $\rho(x)$ y a un potencial eléctrico ϕ, relacionados por medio de la ley electrostática $\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0$ o, para campos que varían en una sola dimensión, por

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{7.28}$$

Preguntemos ahora al suponer la existencia de este potencial $\phi(x)$, ¿cómo se distribuirán los iones bajo la acción del mismo? Esto se puede determinar por medio de los principios de la mecánica estadística. Nuestro problema es calcular ϕ de tal manera que la densidad de cargas resultante de la mecánica estadística *también* satisfaga (7.28).

* Para un trabajo reciente y bibliografía, véase C. J. Powell y J. B. Swann, *Phys. Rev.* **115**, 869 (1959).

De acuerdo con la mecánica estadística (véase el capítulo 40, volumen I), partículas en equilibrio térmico en un campo de fuerzas están distribuidas de tal modo que la densidad de carga n de las partículas en la posición x está dada por

$$n(x) = n_0 e^{-U(x)/kT}, \tag{7.29}$$

donde $U(x)$ es la energía potencial, k la constante de Boltzmann y T la temperatura absoluta.

Suponemos que los iones transportan una sola carga electrónica, positiva o negativa. A la distancia x de la superficie de una partícula coloidal, un ion positivo tendrá la energía potencial $q_e\phi(x)$ y entonces

$$U(x) = q_e\phi(x).$$

La densidad de iones positivos, n_+, es:

$$n_+(x) = n_0 e^{-q_e\phi(x)/kT}.$$

Análogamente, la densidad de iones negativos es:

$$n_-(x) = n_0 e^{+q_e\phi(x)/kT}.$$

La densidad total de carga es:

$$\rho = q_e n_+ - q_e n_-,$$

o sea

$$\rho = q_e n_0 (e^{-q_e\phi/kT} - e^{+q_e\phi/kT}). \tag{7.30}$$

Combinando este resultado con la ecuación (7.28), vemos que el potencial ϕ debe satisfacer:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{q_e n_0}{\epsilon_0}(e^{-q_e\phi/kT} - e^{+q_e\phi/kT}). \tag{7.31}$$

Es posible resolver esta ecuación en general [multiplicando ambos miembros por $2(d\phi/dx)$, e integrando respecto a x], pero a fin de considerar el problema de la manera más simple posible, consideraremos aquí solamente el caso límite en el cual el potencial es muy pequeño o la temperatura T es muy alta. El caso en el que ϕ es pequeño corresponde a una solución diluida. Para estos casos el exponente es pequeño y podemos hacer la aproximación

$$e^{\pm q_e\phi/kT} = 1 \pm \frac{q_e\phi}{kT}. \tag{7.32}$$

La ecuación (7.31) nos da ahora

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = +\frac{2n_0 q_e^2}{\epsilon_0 kT}\phi(x). \tag{7.33}$$

Notemos que ahora el signo del segundo miembro es positivo. La solución para ϕ no es oscilatoria sino exponencial.

La solución general de la ecuación (7.33) es:

$$\phi = Ae^{-x/D} + Be^{+x/D}, \tag{7.34}$$

con

$$D^2 = \frac{\epsilon_0 kT}{2n_0 q_e^2}. \tag{7.35}$$

Las constantes A y B deben determinarse a partir de las condiciones particulares del problema. En nuestro caso B debe ser nula; en caso contrario el potencial sería infinito para x grande. Tenemos entonces:

$$\phi = Ae^{-x/D}, \tag{7.36}$$

donde A es el potencial para $x = 0$, la superficie de la partícula coloidal.

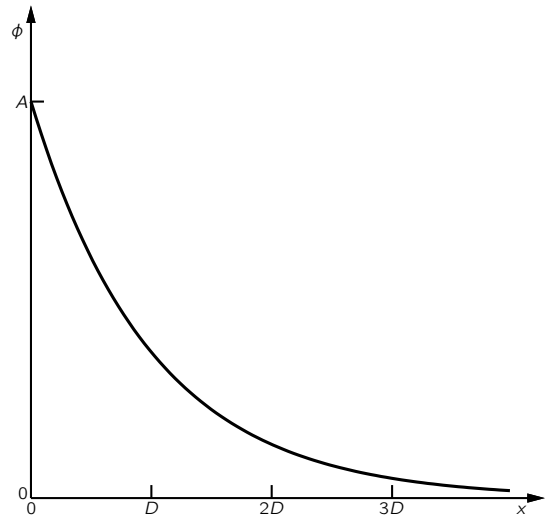


Figura 7-7. La variación del potencial cerca de la superficie de una partícula coloidal. D es la longitud de Debye.

El potencial disminuye en un factor $1/e$ cada vez que la distancia aumenta en D, como se muestra en la gráfica de la figura 7-7. El número D se llama *longitud de Debye* y es una medida de la vaina de iones que rodea a las grandes partículas cargadas en un electrolito. Además, la ecuación (7.35) nos dice que la vaina adelgaza a medida que aumenta la concentración de los iones (n_0) o cuando disminuye la temperatura.

La constante A en la ecuación (7.36) se obtiene fácilmente si conocemos la densidad de carga superficial σ sobre la partícula coloidal. Sabemos que:

$$E_n = E_x(0) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \tag{7.37}$$

Pero $\boldsymbol{E}$ es también el gradiente de $-\phi$:

$$E_x(0) = -\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_0 = +\frac{A}{D}, \tag{7.38}$$

de lo cual obtenemos

$$A = \frac{\sigma D}{\epsilon_0}. \tag{7.39}$$

Sustituyendo este resultado en (7.36) encontramos (haciendo $x = 0$) que el potencial de la partícula coloidal es:

$$\phi(0) = \frac{\sigma D}{\epsilon_0}. \tag{7.40}$$

Notarán que este potencial es el mismo que la diferencia de potencial que existe entre las placas de un condensador en el que las placas se encuentran a una distancia D y con una densidad de carga superficial σ.

Habíamos dicho que las partículas coloidales se mantenían separadas debido a la repulsión eléctrica. Pero ahora vemos que el campo a pequeña distancia de la superficie de la partícula se ve reducido por la vaina de iones que se crea alrededor de la partícula. Si esta vaina es suficientemente fina, las partículas tienen mayor posibilidad de chocar entre ellas. De este modo se pegan y el coloide se va a coagular y a precipitar fuera del líquido. De acuerdo con nuestro análisis, comprendemos ahora por qué al agregar suficiente sal a un coloide debería causar que se precipite. El proceso se llama "floculación del coloide".

Otro ejemplo interesante es el efecto que una solución salina tiene sobre las moléculas de proteínas. Una molécula de proteína es una larga cadena complicada y flexible de aminoácidos. La molécula puede tener cargas diversas y a veces sucede que tiene una carga neta, digamos negativa, que se encuentra distribuida

a lo largo de toda la cadena. Debido a la repulsión mutua de las cargas negativas la cadena de proteínas se mantiene extendida. Igualmente, si hay presente otra cadena molecular similar en la solución, se mantendrán apartadas por el mismo efecto repulsivo. Podemos, en consecuencia, tener una suspensión de cadenas moleculares en un líquido. Pero si añadimos sal al líquido cambiamos las propiedades de la suspensión. A medida que se agrega sal a la solución disminuye la longitud de Debye y las cadenas moleculares pueden aproximarse entre ellas y enrollarse sobre sí mismas. Con un agregado suficiente de sal a la solución las cadenas moleculares pueden precipitar en la solución. Existen muchos efectos químicos de este tipo que pueden explicarse en términos de fuerzas eléctricas.

7-5 El campo electrostático de una rejilla

Como último ejemplo vamos a describir otra propiedad interesante de los campos eléctricos. Es una propiedad que se usa en la construcción de instrumentos eléctricos, en la construcción de tubos al vacío y en otras aplicaciones. Se trata de las características del campo eléctrico cerca de una rejilla formada por alambres cargados. Para estudiar el problema del modo más simple posible consideraremos un conjunto de alambres paralelos situados en un plano en el cual los alambres son infinitamente largos y uniformemente espaciados entre ellos.

Si consideramos el campo a gran distancia del plano que contiene los alambres veremos un campo eléctrico constante, como si las cargas estuviesen uniformemente distribuidas en el plano. A medida que nos aproximamos a la rejilla el campo comienza a apartarse de la uniformidad que habíamos encontrado a grandes distancias de la rejilla. Estimaremos ahora a qué distancia de la rejilla debemos ubicarnos a fin de poder ver una variación apreciable en el potencial. La figura 7-8 muestra un croquis burdo de las equipotenciales a varias distancias de la rejilla. A medida que nos acercamos a la rejilla las variaciones son más importantes. Si nos desplazamos paralelamente a la rejilla observamos que el campo varía en forma periódica.

Hemos visto (capítulo 50, volumen I) que toda cantidad periódica se puede expresar como una suma de ondas sinusoidales (teorema de Fourier). Veamos si podemos encontrar una función armónica conveniente que satisfaga nuestras ecuaciones de campo.

Si los alambres se encuentran en el plano xy y son paralelos al eje y, entonces podremos intentar con términos del tipo

$$\phi(x,z) = F_n(z)\cos\frac{2\pi n x}{a}, \tag{7.41}$$

donde a es la distancia entre los alambres y n el número armónico (hemos supuesto alambres largos de modo que no haya variación con y). Podrá construirse una solución completa por medio de la suma de tales términos para $n = 1, 2, 3, \ldots$

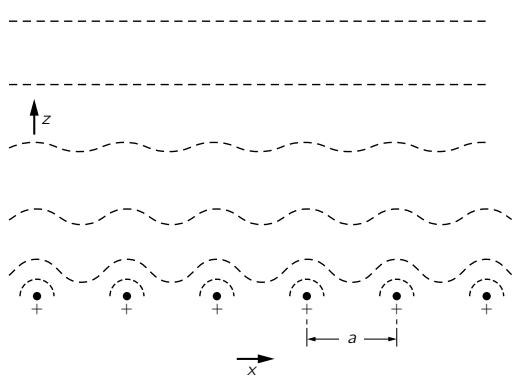


Figura 7-8. Superficies equipotenciales encima de una rejilla uniforme de alambres cargados.

Para que este potencial sea válido debe satisfacer la ecuación de Laplace en la región por encima de los alambres (donde no existen cargas). Esto es:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0.$$

Utilizando esta ecuación para ϕ en (7.41) vemos que

$$-\frac{4\pi^2n^2}{a^2}F_n(z)\cos\frac{2\pi nx}{a}+\frac{d^2F_n}{dz^2}\cos\frac{2\pi nx}{a}=0, \tag{7.42}$$

o que $F_n(z)$ debe satisfacer

$$\frac{d^2F_n}{dz^2}=\frac{4\pi^2n^2}{a^2}F_n. \tag{7.43}$$

Así pues, debemos tener

$$F_n=A_ne^{-z/z_0}, \tag{7.44}$$

donde

$$z_0=\frac{a}{2\pi n}. \tag{7.45}$$

Hemos encontrado que si existe una componente de Fourier del campo de la armónica n, *esta* componente decrecerá exponencialmente con una distancia característica $z_0 = a/2\pi n$. Para el primer armónico ($n = 1$), la amplitud disminuirá en un factor $e^{-2\pi}$ (un decrecimiento fuerte) cada vez que aumentemos z en la cantidad a, el espaciamiento de la rejilla. Los otros armónicos disminuyen más rápidamente a medida que nos alejamos de la rejilla. Vemos que si nos encontramos a una distancia de solamente algunos múltiplos de a de la rejilla, el campo es aproximadamente uniforme, es decir, los términos oscilatorios son pequeños. Quedará siempre, por supuesto, el campo del "armónico cero".

$$\phi_0=-E_0z$$

para dar el campo uniforme a una distancia z grande. Para obtener una solución completa, deberemos combinar este término con una suma de términos como (7.41) con F_n dado por la (7.44). El coeficiente A_n deberá ser ajustado de tal modo que al derivar la suma total nos dé un campo eléctrico que corresponda a la densidad de carga λ de los alambres de la rejilla.

El método que hemos desarrollado se puede emplear para explicar por qué el blindaje electrostático por medio de una malla es tan bueno como el obtenido con un metal sólido. Excepto a distancias de la malla del orden de unas pocas veces el espaciamiento entre los alambres, los campos en el interior de una malla cerrada son nulos. Comprendemos ahora por qué se utiliza una malla de cobre —más liviana y barata que una lámina de cobre— para blindar equipos eléctricos muy sensibles de los campos externos perturbadores.

8

Energía electrostática

8-1 La energía electrostática de cargas. Esfera uniforme

En el estudio de la mecánica, uno de los descubrimientos más interesantes y útiles fue la ley de conservación de la energía. Las expresiones de las energías cinética y potencial de un sistema mecánico nos ayudaron a descubrir conexiones entre los estados de un sistema en dos instantes diferentes sin tener que entrar a los detalles de lo que estaba ocurriendo en medio. Ahora queremos considerar la energía de sistemas electrostáticos. También en electricidad el principio de conservación de la energía será útil para descubrir muchas cosas interesantes.

La ley de la energía de interacción en electrostática es muy simple; en realidad ya la hemos discutido. Supongan que tenemos dos cargas q_1 y q_2 a una distancia r_{12}. Hay cierta energía en el sistema porque se necesitó cierta cantidad de trabajo para juntar las cargas. Ya hemos calculado el trabajo realizado al acercar dos cargas desde una gran distancia. Esto es:

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}. \tag{8.1}$$

También sabemos, por el principio de superposición, que si tenemos muchas cargas presentes, la fuerza total sobre cualquier carga es la suma de las fuerzas de las otras. De aquí se deduce que la energía total de un sistema de cargas es la suma de términos debidos a la interacción mutua de cada par de cargas. Si q_i y q_j son dos cualesquiera de las cargas y r_{ij} es la distancia entre ellas (figura 8-1), la energía de ese par particular es:

$$\frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}. \tag{8.2}$$

La energía electrostática total U es la suma de las energías de todos los pares posibles de cargas:

$$U = \sum_{\text{todos los pares}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}. \tag{8.3}$$

Si tenemos una distribución de carga especificada por una densidad de carga ρ, la suma de la ecuación (8.3) se remplaza, naturalmente, por una integral.

Nos ocuparemos de dos aspectos de esta energía. Uno es la *aplicación* del concepto de energía a problemas electrostáticos; el otro es el *cálculo* de la energía de diferentes maneras. A veces es más fácil calcular el trabajo realizado en un caso especial que calcular la suma de la ecuación (8.3) o la integral correspondiente. Calculemos, por ejemplo, la energía necesaria para armar una esfera de carga con densidad uniforme de carga. La energía es simplemente el trabajo realizado para juntar las cargas desde el infinito.

Imaginen que armamos la esfera construyendo una sucesión de capas esféricas delgadas de espesor infinitesimal. En cada paso del proceso, juntamos una pequeña cantidad de carga y la ponemos en una fina capa entre r y $r + dr$. Continuamos el proceso hasta que llegamos al radio final a (figura 8-2). Si Q_r es la carga de la esfera que se ha formado hasta el radio r, el trabajo que se realiza para traer hasta ella una carga dQ es

$$dU = \frac{Q_r\, dQ}{4\pi\epsilon_0 r}. \tag{8.4}$$

8-1 La energía electrostática de cargas. Esfera uniforme
8-2 La energía de un condensador. Fuerzas sobre conductores cargados
8-3 La energía electrostática de un cristal iónico
8-4 La energía electrostática en los núcleos
8-5 La energía en el campo electrostáticos
8-6 La energía de una carga puntual

Revisar
Volumen I, capítulo 4, *Conservación de la energía*
Volumen I, capítulo 13, *Trabajo y energía potencial (A)*
Volumen I, capítulo 14, *Conservación de la energía*

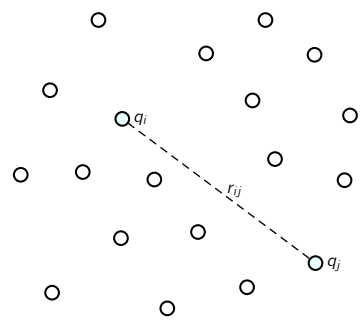


Figura 8-1. La energía electrostática de un sistema de partículas es la suma de la energía electrostática de cada par.

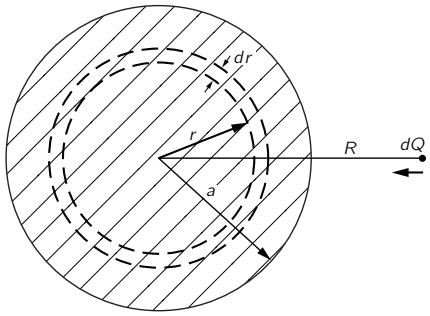


Figura 8-2. Se puede calcular la energía de una esfera uniforme de carga imaginando que se le arma con cascarones esféricos sucesivos.

Si la densidad de carga en la esfera es ρ, la carga Q_r es:

$$Q_r = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^2,$$

la carga dQ es

$$dQ = \rho \cdot 4\pi r^2\, dr.$$

La ecuación (8.4) se convierte en

$$dU = \frac{4\pi\rho^2 r^4\, dr}{3\epsilon_0}. \tag{8.5}$$

La energía total necesaria para armar la esfera es la integral de dU desde $r = 0$ hasta $r = a$, o sea

$$U = \frac{4\pi\rho^2 a^5}{15\epsilon_0}. \tag{8.6}$$

O también, si queremos expresar el resultado en términos de la carga total Q de la esfera,

$$U = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}. \tag{8.7}$$

La energía es proporcional al cuadrado de la carga total e inversamente proporcional al radio. También podemos interpretar la ecuación (8.7) como si dijese que el promedio de $(1/r_{ij})$ para todos los pares de puntos de la esfera es $6/5a$.

8-2 La energía de un condensador. Fuerzas sobre conductores cargados

Consideremos ahora la energía necesaria para cargar un condensador. Si se ha tomado la carga Q de uno de los conductores de un condensador y colocado sobre el otro, la diferencia de potencial entre ellos es:

$$V = \frac{Q}{C}, \tag{8.8}$$

donde C es la capacidad del condensador. ¿Cuánto trabajo se realiza al cargar el condensador? Procediendo como con la esfera, imaginamos que el condensador ha sido cargado transfiriendo carga de una placa a la otra en pequeñas cantidades dQ. El trabajo necesario para transferir la carga dQ es:

$$dU = V\, dQ.$$

Tomando V de la ecuación (8.8), escribimos:

$$dU = \frac{Q\, dQ}{C}.$$

O integrando desde la carga cero hasta la carga final Q, tenemos:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}. \tag{8.9}$$

También se puede escribir esta energía en la forma

$$U = \tfrac{1}{2}CV^2. \tag{8.10}$$

Recordando que la capacidad de una esfera conductora (respecto al infinito) es

$$C_{\text{esfera}} = 4\pi\epsilon_0 a,$$

podemos obtener de la ecuación (8.9) la energía de una esfera cargada:

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a}. \tag{8.11}$$

Ésta es también la energía de un *cascarón esférico* delgado de carga total Q y es 5/6 de la energía de una esfera *cargada uniformemente*, ecuación (8.7).

Consideremos aplicaciones del concepto de energía electrostática. Consideren las siguientes preguntas: ¿cuál es la fuerza entre las placas de un condensador? o ¿cuál es el torque respecto a algún eje de un conductor cargado en presencia de otro con carga opuesta? Es fácil responder esas preguntas usando nuestro resultado (8.9) para la energía electrostática de un condensador, junto con el principio de los trabajos virtuales (capítulos 4, 13 y 14 del volumen I).

Utilicemos este método para determinar la fuerza entre las placas de un condensador de placas paralelas. Si imaginamos que la distancia entre placas aumenta en la pequeña cantidad Δz, el trabajo mecánico realizado desde el exterior para mover las placas será:

$$\Delta W = F\,\Delta z, \tag{8.12}$$

donde F es la fuerza entre las placas. Este trabajo debe ser igual a la variación de energía electrostática del condensador. Según la ecuación (8.9), la energía del condensador era originalmente

$$U = \frac{1}{2}\,\frac{Q^2}{C}.$$

La variación de energía (si no dejamos que la carga varíe) es:

$$\Delta U = \frac{1}{2}\,Q^2\,\Delta\!\left(\frac{1}{C}\right). \tag{8.13}$$

Igualando (8.12) y (8.13) tenemos

$$F\,\Delta z = \frac{Q^2}{2}\,\Delta\!\left(\frac{1}{C}\right). \tag{8.14}$$

También se puede escribir en la forma

$$F\,\Delta z = -\frac{Q^2}{2C^2}\,\Delta C. \tag{8.15}$$

La fuerza proviene, naturalmente, de la atracción de las cargas que están sobre las placas, pero vemos que no tenemos que preocuparnos en detalle de cómo están distribuidas; la capacidad C se ocupa de todo lo que necesitamos.

Es fácil ver cómo se extiende el concepto a conductores de forma cualquiera y para otras componentes de la fuerza. En la ecuación (8.14) remplazamos F por la componente que estamos buscando y remplazamos Δz por un pequeño desplazamiento en la dirección correspondiente. Y si tenemos un electrodo con un pivote y queremos saber cuál es el torque τ, escribimos el trabajo virtual en la forma

$$\Delta W = \tau\,\Delta\theta,$$

donde $\Delta\theta$ es un desplazamiento angular pequeño. Naturalmente que $\Delta(1/C)$ debe ser la variación de $1/C$ que corresponde a $\Delta\theta$. De esta manera podríamos hallar el torque sobre las placas movibles de un condensador variable del tipo mostrado en la figura 8-3.

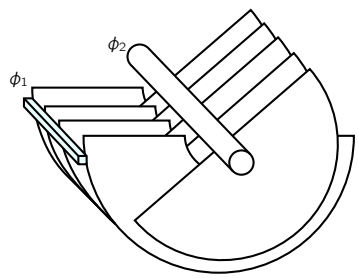


Figura 8-3. ¿Cuál es el torque sobre un capacitor variable?

Volviendo al caso especial de un condensador de placas paralelas podemos emplear la fórmula que obtuvimos en el capítulo 6 para la capacidad:

$$\frac{1}{C} = \frac{d}{\epsilon_0 A}, \tag{8.16}$$

donde A es el área de cada placa. Si aumentamos la separación en Δz,

$$\Delta\!\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{\Delta z}{\epsilon_0 A}.$$

De la ecuación (8.14) obtenemos que la fuerza entre las placas es

$$F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 A}. \tag{8.17}$$

Examinemos la ecuación (8.17) con más cuidado y veamos si nos puede indicar cómo surge la fuerza. Si para la carga de una de las placas escribimos

$$Q = \sigma A,$$

La ecuación (8.17) puede ser escrita en la forma

$$F = \frac{1}{2} Q \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Y como el campo eléctrico entre las placas es:

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

se tiene

$$F = \tfrac{1}{2} Q E_0. \tag{8.18}$$

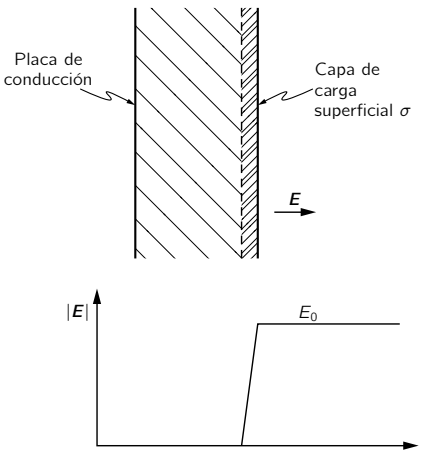


Figura 8-4. En la superficie de un conductor el campo varía de cero a $E_0 = \sigma/\epsilon_0$, cuando se atraviesa la capa de carga superficial.

Se podría creer que la fuerza que actúa sobre una placa es la carga Q de la placa por el campo que actúa sobre la carga. Pero tenemos un factor sorprendente de un medio. La razón es que el campo E_0 no es el campo *en* las cargas. Si imaginamos que la carga en la superficie de la placa ocupa una capa delgada, como lo indica la figura 8-4, el campo variará desde cero en la superficie interna de la capa hasta E_0 en el espacio fuera de la placa. El campo medio que actúa sobre las cargas superficiales es $E_0/2$. Éste es el porqué del factor un medio en la ecuación (8.18).

Notarán que al calcular el trabajo virtual hemos supuesto que la carga del condensador era constante —que no estaba conectado eléctricamente a otros objetos, de modo que la carga no podía variar—.

Supongan que hubiéramos imaginado que el condensador se mantuviera a una diferencia de potencial constante al hacer el desplazamiento virtual. Entonces tendríamos que haber tomado

$$U = \tfrac{1}{2} C V^2$$

y en lugar de la ecuación (8.15) habríamos tenido

$$F \Delta z = \tfrac{1}{2} V^2 \, \Delta C,$$

que da una fuerza de módulo igual que la ecuación (8.15) (porque $V = Q/C$), ¡pero de signo opuesto! Es seguro que la fuerza entre las placas del condensador no invierte su signo al desconectarlo de la fuente que lo carga. Además, sabemos que dos placas con cargas eléctricas opuestas se deben atraer. El principio de los trabajos virtuales ha sido aplicado incorrectamente en el segundo caso —no hemos tenido en cuenta el trabajo virtual realizado sobre la fuente de carga—. Es decir, para mantener el potencial en valor V constante a medida que varía la capacidad, la fuente de carga debe suministrar una carga $V\Delta C$. Pero se suministra esta carga con potencial V, de modo que el trabajo realizado por el sistema eléctrico que mantiene el potencial constante es $V^2 \, \Delta C$. El trabajo mecánico $F \, \Delta z$ *más* el trabajo eléctrico $V^2 \, \Delta C$, juntos dan lugar a la variación $\frac{1}{2} V^2 \, \Delta C$ de la energía total del condensador. En consecuencia $F \, \Delta z$ es $-\frac{1}{2} V^2 \, \Delta C$, como antes.

8-3 La energía electrostática de un cristal iónico

Consideremos ahora una aplicación del concepto de energía electrostática en física atómica. No podemos medir fácilmente las fuerzas entre átomos, pero muchas veces estamos interesados en las diferencias de energía entre un ordenamiento atómico y otro, como por ejemplo, la energía de un cambio químico. Como las fuerzas atómicas son básicamente eléctricas, las energías químicas son en gran parte nada más que energías electrostáticas.

Consideremos, por ejemplo, la energía electrostática de una red iónica. Un cristal iónico como el NaCl consiste en iones positivos y negativos a los que se puede considerar como esferas rígidas. Se atraen eléctricamente hasta que comienzan a tocarse; entonces hay una fuerza repulsiva que sube muy rápidamente si tratamos de acercarlos más.

En consecuencia, como primera aproximación imaginamos un conjunto de esferas rígidas que representan los átomos de un cristal de sal. Por lo que, la estructura de la red ha sido determinada por difracción de rayos X. Es una red cúbica —como un tablero de damas tridimensional—. La figura 8-5 muestra un corte transversal. El espaciamiento de los iones es 2.81 Å ($= 2.81 \times 10^{-8}$ cm).

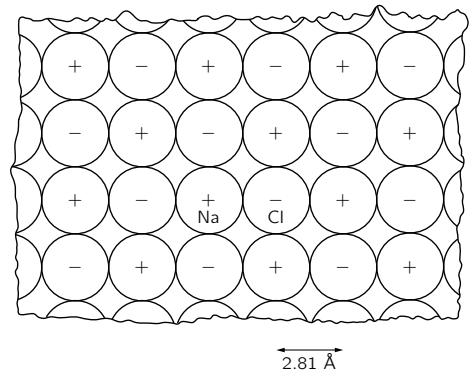


Figura 8-5. Corte de un cristal de sal en una escala atómica. El ordenamiento de los iones Na y Cl en forma de tablero de damas es el mismo en los dos cortes perpendiculares al mostrado. (Véase el volumen I, figura 1-7.)

Si nuestra representación de este sistema es correcta, tendríamos que poder verificarlo haciendo la siguiente pregunta: ¿cuánta energía se necesitaría para separar todos estos iones —es decir, dividir completamente el cristal en iones—? Esta energía debería ser igual al calor de vaporización del NaCl más la energía necesaria para disociar las moléculas en iones. El valor experimental de esta energía total de división del NaCl en iones es 7.92 electronvoltios por molécula. Usando la conversión

$$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ joule},$$

y el número de Avogadro para el número de moléculas en un mol,

$$N_0 = 6.02 \times 10^{23},$$

la energía de disociación también se puede dar como:

$$W = 7.64 \times 10^5 \text{ joule/mol}.$$

Los fisicoquímicos prefieren la kilocaloría como unidad de energía, la cual es 4 190 joules; de modo que 1 eV por molécula es 23 kilocalorías por mol. Un químico diría entonces que la energía de disociación del NaCl es:

$$W = 183 \text{ kcal/mol}.$$

¿Podemos obtener teóricamente esta energía química calculando cuánto trabajo se necesitaría para separar el cristal? Conforme a nuestra teoría, este trabajo es la suma de las energías de todos los pares de iones. La manera más fácil de calcular esta suma es tomar un ion determinado y calcular su energía potencial con todos los otros iones. Eso nos dará *dos veces* la energía por ion porque la energía pertenece a los *pares* de cargas. Si queremos que la energía esté asociada con un ion particular, debemos tomar la mitad de la suma. Pero en realidad queremos la energía *por molécula*, la cual contiene dos iones, de modo que la suma que calculemos dará directamente la energía por molécula.

La energía de un ion con uno de sus vecinos más cercanos es e^2/a, donde $e^2 = q_e^2/4\pi\epsilon_0$ y a es la distancia entre los centros de los iones. (Estamos considerando iones monovalentes.) Esta energía es 5.12 eV, que ya vimos que nos va a dar un resultado de un orden de magnitud correcta. Pero todavía está muy lejos de la suma infinita de términos que necesitamos.

Comencemos sumando todos los términos provenientes de los iones a lo largo de una recta. Suponiendo que el ion marcado Na en la figura 8-5 es nuestro ion especial, consideraremos primero todos los iones en su misma línea horizontal. Hay dos iones Cl más cercanos con cargas negativas, los dos a una distancia a. Luego están los dos iones positivos a la distancia $2a$, etc. Llamando U_1 a esta suma de energías, escribimos:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{e^2}{a}\left(-\frac{2}{1}+\frac{2}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{4}\mp\cdots\right) \\ &= -\frac{2e^2}{a}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\pm\cdots\right). \end{aligned} \tag{8.19}$$

La serie converge lentamente, así que es difícil calcularla numéricamente, pero se sabe que es igual a $\ln 2$. Así pues,

$$U_1 = -\frac{2e^2}{a}\ln 2 = -1.386\,\frac{e^2}{a}. \tag{8.20}$$

Consideren ahora la siguiente línea adyacente de iones. El más cercano es negativo y está a una distancia a. Luego hay dos positivos a la distancia $\sqrt{2}\,a$. Los del par siguiente están a la distancia $\sqrt{5}\,a$, los siguientes a $\sqrt{10}\,a$, y así sucesivamente. Por lo tanto, para toda la línea obtenemos la serie

$$\frac{e^2}{a}\left(-\frac{1}{1}+\frac{2}{\sqrt{2}}-\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{10}}\mp\cdots\right). \tag{8.21}$$

Hay *cuatro* líneas como éstas: arriba, abajo, al frente y atrás. Luego están las cuatro líneas que son las más cercanas en diagonal, y así sucesivamente.

Si pacientemente hacen el cálculo para todas las líneas y luego las suman, encuentran que el total general es:

$$U=-1.747\,\frac{e^2}{a},$$

que es sólo algo mayor que lo que obtuvimos en (8.20) para la primera línea. Usando $e^2/a=5.12$ eV, obtenemos

$$U=-8.94 \text{ eV}.$$

Nuestra respuesta es 10 % mayor que la energía observada experimentalmente. Demuestra que nuestra idea de que toda la red se mantiene unida por fuerzas eléctricas coulombianas es fundamentalmente correcta. Ésta es la primera vez que obtenemos una propiedad específica de una sustancia macroscópica a partir de un conocimiento de física atómica. Adelante haremos más. La rama de la física que trata de comprender la materia en escala macroscópica en términos de las leyes del comportamiento atómico se llama *física de estado sólido*.

¿Y a qué se debe el error de nuestro cálculo? ¿Por qué no es exactamente correcto? Se debe a la repulsión entre los iones a distancias cortas. No son esferas perfectamente rígidas, así que cuando están juntas se aplastan un poco. No son muy blandas, así que sólo se aplastan un poco. Pero algo de energía se emplea en deformarlas y cuando los iones se separan se libera esta energía. La verdadera energía necesaria para separar los iones es un poco menor que la energía que hemos calculado; la repulsión ayuda a vencer la atracción electrostática.

¿Hay alguna manera de tener en cuenta esta contribución? Podríamos, si conociéramos la ley de la fuerza repulsiva. No estamos listos para analizar los detalles de este mecanismo de repulsión, pero podemos hacernos una idea de sus características a partir de medidas en escala macroscópica. Comenzando en una medida de la *compresibilidad* de todo el cristal se tiene una idea cuantitativa de la ley de repulsión entre los iones y, en consecuencia, de su contribución a la energía. De esta manera se encontró que esta contribución debe ser 1/9.4 de la contribución de la atracción electrostática y, por supuesto, de signo contrario. Si restamos esta contribución de la energía puramente electrostática, obtenemos 7.99 eV para la energía de disociación por molécula. Ésta está más cerca del resultado 7.92 eV observado, pero aún no concuerda perfectamente. Hay algo más que no hemos tenido en cuenta: no hemos incluido la energía cinética de las vibraciones en el cristal. Si se hace la corrección correspondiente a este efecto, se obtiene que concuerde con el número experimental. Entonces las ideas son correctas; la mayor contribución a la energía de un cristal como el NaCl es electrostática.

8-4 La energía electrostática en los núcleos

Trataremos ahora otro ejemplo de energía electrostática en física atómica, la energía eléctrica de los núcleos atómicos. Antes de hacer esto tendremos que discutir algunas propiedades de las principales fuerzas (llamadas fuerzas nucleares) que mantienen unidos dentro del núcleo los protones y neutrones. En los primeros tiempos del descubrimiento de los núcleos —y de los neutrones y protones que los constituyen— se tenía la esperanza de que la parte intensa, no eléctrica, de la fuerza entre un protón y otro protón, digamos, tendría alguna

ley simple, como la ley de la inversa del cuadrado en la electricidad. Porque una vez que se hubiese determinado esta ley de fuerza, y las correspondientes entre un protón y un neutrón y entre un neutrón y un neutrón, sería posible describir teóricamente todo el comportamiento de estas partículas en los núcleos. En consecuencia, se inició un gran programa de estudio de la dispersión de protones, con la esperanza de encontrar la ley de fuerza entre ellos; pero después de 30 años de esfuerzos no ha surgido nada que sea simple. Se tiene un conocimiento considerable sobre la fuerza protón-protón, pero nos encontramos con que la fuerza es tan complicada como puede.

Lo que entendemos por "tan complicada como puede" es que la fuerza depende de todas las cosas que puede.

Primero, la fuerza no es una función simple de la distancia entre los dos protones. A grandes distancias hay una atracción, pero a distancias cortas hay repulsión. La dependencia de la distancia es una función complicada que todavía se conoce imperfectamente.

Segundo, la fuerza depende del espín de los protones.* Los protones tienen espín y dos cualesquiera de ellos en interacción pueden tener sus momentum angulares de espín en la misma dirección o en direcciones opuestas. Y cuando los espines son paralelos la fuerza es diferente de cuando son antiparalelos, como en (a) y en (b) de la figura 8-6. La diferencia es muy grande; no es un efecto pequeño.

Tercero, cuando la separación de los dos protones es en dirección *paralela* a sus espines, como en (c) y (d) de la figura 8-6, la fuerza es considerablemente diferente de cuando la separación es en dirección *perpendicular* a los espines, como en (a) y (b).

Cuarto, la fuerza depende, como en magnetismo, de la velocidad de los protones, sólo que mucho más fuertemente que en magnetismo. Y esta fuerza dependiente de la velocidad no es un efecto relativista; es intensa aun a velocidades mucho menores que la velocidad de la luz. Aún más, esta parte de la fuerza depende de otros factores además del módulo de la velocidad. Por ejemplo, cuando un protón se está moviendo cerca del otro protón, cuando el movimiento orbital tiene el mismo sentido de rotación que el espín, como en (e) de la figura 8-6, la fuerza es diferente de cuando tiene el sentido de rotación opuesto como en (f). Esto se llama la parte "espín órbita" de la fuerza.

Además, las fuerzas entre un protón y un neutrón y entre un neutrón y un neutrón son igualmente complicadas. Hasta el día de hoy no conocemos el mecanismo responsable de estas fuerzas —es decir, no conocemos ningún modo simple de comprenderlas—.

No obstante, hay un aspecto importante de las fuerzas nucleares que es más *simple* de lo que podría ser. La fuerza *nuclear* entre dos neutrones es igual a la fuerza entre un protón y un neutrón, ¡la cual es igual a la fuerza entre dos protones! Si en cualquier situación nuclear cambiamos un protón por un neutrón (o viceversa), las *interacciones nucleares* no cambian. No se conoce la "razón fundamental" de esta igualdad, pero es un ejemplo de un principio importante que se puede extender también a las leyes de interacción de otras partículas en la interacción fuerte —como los mesones π y las partículas "extrañas"—.

La ubicación de los niveles de energía de núcleos similares es un buen ejemplo de esto. Consideren un núcleo como B^{11} (boro once), que está compuesto de cinco protones y seis neutrones. Las 11 partículas del núcleo interactúan entre sí en una danza más complicada. Ahora bien, hay una configuración de todas las interacciones posibles que tiene la energía más baja posible; es el estado normal del núcleo y se llama *estado fundamental*. Si se perturba el núcleo (por ejemplo, golpeándolo con un protón u otra partícula de alta energía) puede ponérsele en cualquier cantidad de otras configuraciones, llamadas *estados excitados*, cada uno de los cuales tendrá una energía característica mayor que la del estado

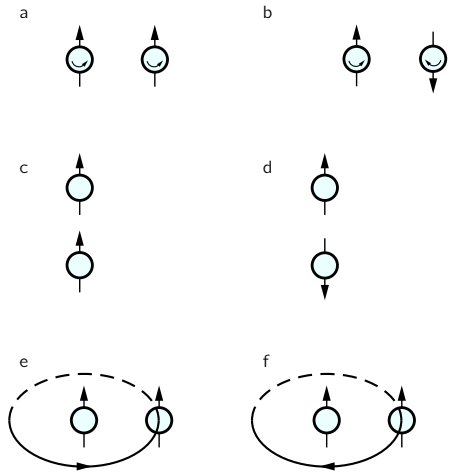


Figura 8-6. La fuerza entre dos protones depende de todo parámetro posible.

* N. del T. El espín (del inglés *to spin*, girar) es un momentum angular intrínseco de las partículas. Se trata de una propiedad típicamente cuántica, pero se puede visualizar clásicamente como un girar de la partícula sobre sí misma. Fue precisamente esta interpretación clásica la que dio origen al nombre de esa propiedad.

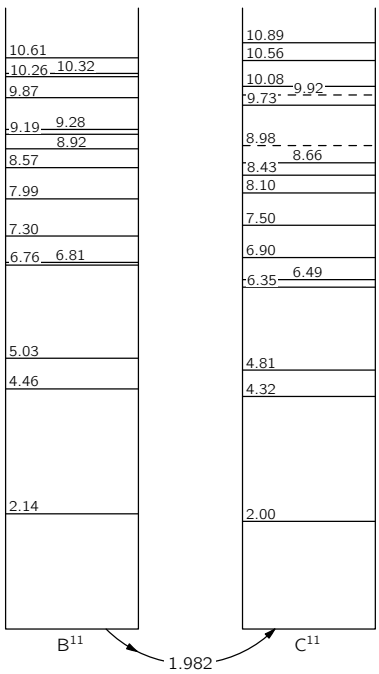


Figura 8-7. Los niveles de energía de B^{11} y de C^{11} (energías en MeV). El estado fundamental del C^{11} es 1.982 MeV más alto que el de B^{11}.

fundamental. En la investigación en física nuclear, como la que se lleva a cabo con un generador Van de Graaff (por ejemplo, en los laboratorios de Kellogg y Sloan en el Caltech), se determinan experimentalmente las energías y otras propiedades de estos estados excitados. La parte izquierda de la figura 8-7 muestra, en un gráfico unidimensional, la energía de los 15 primeros estados excitados del B^{11}. La línea horizontal más baja representa el estado fundamental. El primer estado excitado tiene una energía 2.14 MeV más alta que la del estado fundamental, el siguiente una energía 4.46 MeV más alta que el estado fundamental, y así sucesivamente. La física nuclear trata de encontrar una explicación de este diagrama de energías bastante complicado; sin embargo, todavía no hay una teoría general completa de esos niveles nucleares de energía.

Si remplazamos uno de los neutrones del B^{11} por un protón, tenemos el núcleo de un isótopo de carbono, el C^{11}. Las energías de los primeros 16 estados excitados del C^{11} también han sido medidas; son las que muestra la mitad derecha de la figura 8-7. (Las líneas discontinuas indican niveles para los que la información experimental es cuestionable.)

Examinando la figura 8-7, vemos una analogía sorprendente entre los diagramas de niveles de energía de los dos núcleos. En los dos casos el primer nivel excitado está a unos 2 MeV por encima del estado fundamental. Hay una gran discontinuidad de unos 2.3 MeV hasta el segundo estado excitado, luego un pequeño salto de sólo 0.5 MeV hasta el tercer nivel. De nuevo un gran salto entre el cuarto y el quinto niveles; pero entre el quinto y el sexto una pequeña separación del orden de 0.1 MeV. Y así sucesivamente. Después del décimo nivel más o menos, la correspondencia parece perderse, pero se puede seguir viendo si se clasifican los niveles con sus otras características definitorias —por ejemplo, su momentum angular y qué es lo que hacen para perder su energía extra—.

La analogía sorprendente entre el diagrama de niveles de energía del B^{11} y el del C^{11} no es una simple coincidencia. Debe revelar alguna ley física. Demuestra, en efecto, que aun en la situación complicada de un núcleo, remplazar un neutrón por un protón no produce mucho cambio. Esto sólo puede significar que las fuerzas neutrón-neutrón y protón-protón deben ser casi idénticas. Sólo entonces sería de esperar que las configuraciones nucleares con cinco protones y seis neutrones sean lo mismo que seis protones y cinco neutrones.

Observen que las propiedades de estos dos núcleos no nos dicen nada acerca de la fuerza neutrón-protón; hay el mismo número de combinaciones neutrón-protón en ambos núcleos. Pero si comparamos otros dos núcleos, como C^{14} que tiene seis protones y ocho neutrones, con N^{14} que tiene siete de cada uno, encontramos una correspondencia similar de niveles de energía. Así pues, podemos concluir que las fuerzas p-p, p-n y n-n son idénticas en todas sus complejidades. Hay un principio inesperado en las leyes de las fuerzas nucleares. Aunque la fuerza entre cada par de partículas nucleares es muy complicada, la fuerza entre los tres pares diferentes posibles es la misma.

Pero hay ciertas pequeñas diferencias. Los niveles no corresponden exactamente; además, el estado fundamental del C^{11} tiene una energía absoluta (su masa) que está a 1.982 MeV por encima del estado fundamental del B^{11}. La energía de todos los otros niveles también es más alta en la misma cantidad. Así pues, las fuerzas no son exactamente iguales. Pero sabemos muy bien que las fuerzas *completas* no son exactamente iguales; hay una fuerza *eléctrica* entre dos protones porque tienen carga positiva, mientras que entre dos neutrones no hay tal fuerza eléctrica. ¿Podemos quizá explicar las diferencias entre el B^{11} y el C^{11} por el hecho de que la interacción eléctrica de los protones es diferente en los dos casos? ¿No será que aun las pequeñas diferencias restantes en los niveles se deben a efectos eléctricos? Como las fuerzas nucleares son mucho más intensas que la fuerza eléctrica, los efectos eléctricos tendrían únicamente un pequeño efecto perturbador sobre las energías de los niveles.

Para verificar esta idea, o más bien para hallar cuáles son las consecuencias de esta idea, consideremos primero la diferencia de energía de los estados fundamentales de ambos núcleos. Tomando un modelo muy simple, suponemos que los núcleos son esferas de radio r (por determinar) que contienen Z protones.

Si consideramos que un núcleo es como una esfera con una densidad de carga uniforme, sería de esperar (por la ecuación 8.7) que la energía electrostática fuera

$$U = \frac{3}{5}\,\frac{(Zq_e)^2}{4\pi\epsilon_0 r}. \tag{8.22}$$

donde q_e es la carga elemental del protón. Como Z es cinco para el B^{11} y seis para el C^{11}, su energía electrostática sería diferente.

No obstante, con un número de protones tan chico, la ecuación (8.22) no es completamente correcta. Si calculamos la energía eléctrica entre todos los pares de protones, considerados como puntos que suponemos casi uniformemente distribuidos en la esfera, encontramos que en la ecuación (8.22) se debe remplazar la cantidad Z^2 por $Z(Z-1)$, de modo que la energía es

$$U = \frac{3}{5}\,\frac{Z(Z-1)q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{3}{5}\,\frac{Z(Z-1)e^2}{r}. \tag{8.23}$$

Si conociéramos el radio nuclear r, podríamos usar (8.23) para hallar la diferencia de energía electrostática entre B^{11} y C^{11}. Pero hagamos lo contrario; utilicemos la diferencia de energía observada para determinar el radio, suponiendo que la diferencia de energía es únicamente de origen electrostático.

Pero, esto no está completamente bien. La diferencia de energía 1.982 MeV entre el estado fundamental de B^{11} y el C^{11} incluye las energías en reposo —es decir, la energía mc^2— de todas las partículas. Al pasar del B^{11} al C^{11}, remplazamos un neutrón por un protón y un electrón, que tiene masa menor. Así pues, parte de la diferencia de energía es la diferencia de energías en reposo de un neutrón y un protón, que es 0.784 MeV. La diferencia de que debe dar cuenta la energía electrostática es entonces de más de 1.982 MeV; es:

$$1.982\ \text{MeV} + 0.784\ \text{MeV} = 2.766\ \text{MeV}.$$

Usando esta energía en la ecuación (8.23), encontramos para el radio del B^{11} o del C^{11} indistintamente,

$$r = 3.12 \times 10^{-13}\ \text{cm}. \tag{8.24}$$

¿Tiene algún significado este número? Para ver si lo tiene, debemos compararlo con alguna otra determinación del radio de estos núcleos. Por ejemplo, podemos hacer otra medida del radio de un núcleo viendo cómo dispersa partículas rápidas. A partir de esas mediciones se ha encontrado, de hecho, que la *densidad* de materia en todos los núcleos es casi la misma, es decir, que sus volúmenes son proporcionales al número de partículas que contienen. Si A es el número de protones y neutrones de un núcleo (número que es prácticamente proporcional a su masa), se encuentra que su radio está dado por

$$r = A^{1/3} r_0, \tag{8.25}$$

donde

$$r_0 = 1.2 \times 10^{-13}\ \text{cm}. \tag{8.26}$$

A partir de estas mediciones es de esperar que el radio de un núcleo de B^{11} (o de C^{11}) sea

$$r = (11)^{1/3}(1.2 \times 10^{-13})\ \text{cm} = 2.7 \times 10^{-13}\ \text{cm}.$$

Comparando este resultado con (8.24), vemos que nuestra hipótesis de que la diferencia de energía entre el B^{11} y el C^{11} es electrostática es buena; la discrepancia es de sólo 15 % (¡no está mal para nuestro primer cálculo nuclear!).

Probablemente, la razón de la discrepancia es la siguiente. Conforme a lo que se sabe actualmente de los núcleos, un número par de partículas nucleares —en el caso del B^{11}, cinco neutrones con cinco protones— forman una especie de *núcleo*; cuando se agrega una partícula más a este núcleo, en vez de ser absorbida, da

vueltas por fuera formando un nuevo núcleo esférico. Si es así, deberíamos haber tomado una energía electrostática diferente para el protón adicional. Tendríamos que haber tomado para el exceso de energía del C^{11} sobre el B^{11} simplemente

$$\frac{Z_B q_e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

que es la energía necesaria para agregar un protón más fuera del núcleo. Este número es 5/6 de lo que predice la ecuación (8.23), así que la nueva predicción para el radio es 5/6 de (8.24), lo cual concuerda mejor con lo que se mide directamente.

Podemos extraer dos conclusiones de esta concordancia. Una es que las leyes eléctricas funcionan a dimensiones tan pequeñas como 10^{-13} cm. La otra es que hemos verificado la coincidencia notable de que la parte no eléctrica de las fuerzas entre protón y protón, neutrón y neutrón, y protón y neutrón son todas iguales.

8-5 La energía en el campo electrostáticos

Consideremos ahora otros métodos de cálculo de la energía electrostática. Todos se pueden obtener de la relación básica (8.3), la suma sobre todos los pares de cargas, de las energías mutuas de cada par de cargas. Primero queremos escribir una expresión para la energía de una distribución de carga. Como de costumbre, consideramos que cada elemento de volumen dV contiene el elemento de carga $\rho\,dV$. Luego, hay que escribir la ecuación (8.3) en la forma:

$$U = \frac{1}{2}\int_{\substack{\text{todo el}\\ \text{espacio}}} \frac{\rho(1)\rho(2)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}\,dV_1 dV_2. \tag{8.27}$$

Noten el factor $\frac{1}{2}$, que se introduce porque en la integral doble sobre dV_1 y dV_2 hemos contado dos veces todos los pares de elementos de carga. (No hay ninguna manera conveniente de escribir una integral que no pierda de vista los pares y, por lo tanto, los cuente una sola vez.) A continuación observamos que la integral sobre dV_2 en (8.27) es justamente el potencial en (1). Es decir,

$$\int \frac{\rho(2)}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}\,dV_2 = \phi(1),$$

de modo que se puede escribir (8.27) en la forma

$$U = \frac{1}{2}\int \rho(1)\phi(1)\,dV_1.$$

O también, como el punto (2) ya no aparece, podemos escribir simplemente

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\phi\,dV. \tag{8.28}$$

Se puede interpretar esta ecuación como sigue. La energía potencial de la carga $\rho\,dV$ es el producto de esta carga por el potencial en el mismo punto. La energía total es, por lo tanto, la integral de $\phi\rho\,dV$. Pero de nuevo está el factor $\frac{1}{2}$. Todavía se necesita porque estamos contando dos veces las energías. La energía mutua de dos cargas es la carga de una por el potencial de la otra. *O también*, se puede tomar como la segunda carga por el potencial de la primera. Así pues, escribiríamos para las dos cargas puntuales

$$U = q_1\phi(1) = q_1\,\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$$

o también

$$U = q_2\phi(2) = q_2\,\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}.$$

Observen que también podríamos escribir

$$U = \tfrac{1}{2}[q_1\phi(1) + q_2\phi(2)]. \tag{8.29}$$

La integral en (8.28) corresponde a la suma de ambos términos del corchete de (8.29). Es por eso que necesitamos el factor $\frac{1}{2}$.

Una pregunta interesante es: ¿dónde está ubicada la energía electrostática? También se podría preguntar: ¿Y a quién le importa? ¿Cuál es el significado de una pregunta como ésa? Si hay un par de cargas en interacción, la combinación tiene cierta energía. ¿Es necesario que digamos que la energía está ubicada en una de las cargas o en la otra, o en ambas o en el medio? Puede que estas preguntas no tengan sentido porque realmente sólo sabemos que la energía total se conserva. La idea de que la energía está ubicada *en alguna parte* no es necesaria.

De todas maneras, supongan que *tuviera* sentido decir, en general, que la energía está ubicada en cierto lugar, como ocurre con la energía térmica. Entonces podríamos *extender* nuestro principio de conservación de la energía con la idea de que si la energía contenida dentro de un volumen dado varía, tenemos que poder explicar la variación mediante el flujo de energía que entra o sale de ese volumen. Se dan cuenta que nuestro primer enunciado del principio de conservación de la energía todavía está perfectamente bien si cierta energía desaparece en un lugar y aparece lejos en otra parte sin que pase nada (es decir, sin que ocurra ningún fenómeno especial) en el espacio intermedio. En consecuencia, ahora estamos discutiendo una extensión de la idea de la conservación de la energía. Lo podríamos llamar principio de conservación *local* de la energía. Ese principio diría que la energía dentro de cualquier volumen varía únicamente en la cantidad que fluye hacia afuera o hacia dentro del volumen. Por cierto que es posible que la energía se conserve localmente de esa manera. Si es así, tendríamos una ley mucho más detallada que el simple enunciado de la conservación de la energía total. Realmente resulta que en la naturaleza *la energía se conserva localmente*. Podemos hallar fórmulas sobre dónde se ubica la energía y cómo viaja de un lugar a otro.

También hay una causa *física* de que sea imprescindible que podamos decir dónde está ubicada la energía. De acuerdo con la teoría de gravitación, toda masa es una fuente de atracción gravitacional. También sabemos, por $E = mc^2$, que masa y energía son equivalentes. Toda energía es, por lo tanto, una fuente de fuerza gravitacional. Si no pudiéramos ubicar la energía, no podríamos ubicar todas las masas. No podríamos decir dónde están ubicadas las fuentes del campo gravitacional. La teoría de la gravitación sería incompleta.

Si nos restringimos a la electrostática, realmente no hay manera de decir dónde está ubicada la energía. Las ecuaciones de Maxwell completas para la electrodinámica nos dan mucha más información (aunque entonces la respuesta no es, estrictamente hablando, única). En consecuencia, en un capítulo posterior discutiremos de nuevo esta cuestión en detalle. Ahora les daremos de manera única el resultado en el caso particular de la electrostática. La energía está ubicada en el espacio donde está el campo eléctrico. Esto parece razonable porque sabemos que cuando las cargas se aceleran, radian campos eléctricos. Diríamos que cuando la luz o las ondas de radio viajan de un punto a otro, transportan su energía con ellas. Pero no hay cargas en las ondas. Así pues, nos gustaría ubicar la energía donde está el campo electromagnético y no en las cargas de donde vino. Por lo tanto describimos la energía, no en términos de las cargas, sino en términos de los campos que producen. En efecto, podemos demostrar que la ecuación (8.28) es *numéricamente* igual a

$$U = \frac{\epsilon_0}{2}\int \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}\,dV. \tag{8.30}$$

Podemos interpretar entonces esta fórmula diciendo que cuando hay un campo eléctrico presente, hay energía ubicada en el espacio cuya *densidad* (energía por unidad de volumen) es

$$u = \frac{\epsilon_0}{2}\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}. \tag{8.31}$$

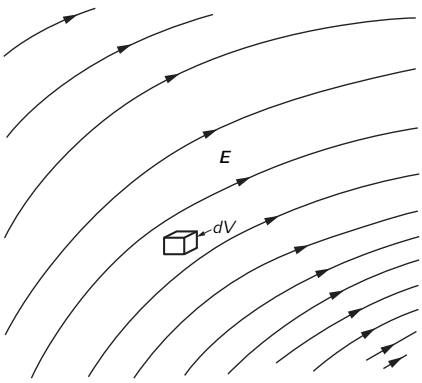


Figura 8-8. Cada elemento de volumen $dV = dx\,dy\,dz$ en un campo eléctrico contiene una energía $(\epsilon_0/2)E^2\,dV$.

Esta idea está ilustrada en la figura 8-8.

Para demostrar que la ecuación (8.30) es compatible con nuestras leyes de la electrostática, comencemos introduciendo en la ecuación (8.28) la relación entre ρ y ϕ que obtuvimos en el capítulo 6:

$$\rho = -\epsilon_0\,\nabla^2\phi.$$

Obtenemos

$$U = -\frac{\epsilon_0}{2}\int \phi\,\nabla^2\phi\,dV. \tag{8.32}$$

Escribiendo explícitamente las componentes del integrando, vemos que

$$\begin{aligned}\phi\,\nabla^2\phi &= \phi\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial}{\partial y}\left(\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial}{\partial z}\left(\phi\,\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\\ &= \boldsymbol{\nabla}\cdot(\phi\,\boldsymbol{\nabla}\phi)-(\boldsymbol{\nabla}\phi)\cdot(\boldsymbol{\nabla}\phi).\end{aligned} \tag{8.33}$$

Nuestra integral de energía es entonces

$$U = \frac{\epsilon_0}{2}\int(\boldsymbol{\nabla}\phi)\cdot(\boldsymbol{\nabla}\phi)\,dV-\frac{\epsilon_0}{2}\int\boldsymbol{\nabla}\cdot(\phi\,\boldsymbol{\nabla}\phi)\,dV.$$

Podemos emplear el teorema de Gauss para transformar la segunda integral en una integral de superficie:

$$\int_{\text{vol.}}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\phi\,\boldsymbol{\nabla}\phi)\,dV = \int_{\text{superficie}}(\phi\,\boldsymbol{\nabla}\phi)\cdot\boldsymbol{n}\,da. \tag{8.34}$$

Calculamos la integral de superficie en el caso en que la superficie va al infinito (por lo que las integrales de volumen se convierten en integrales sobre todo el espacio), suponiendo que todas las cargas están ubicadas a distancias finitas. La manera más simple de proceder es tomar una superficie esférica de radio R enorme cuyo centro está en el origen de las coordenadas. Sabemos que cuando estamos muy lejos de todas las cargas, ϕ varía como $1/R$ y $\boldsymbol{\nabla}\phi$ como $1/R^2$. (Ambos decrecerán aún más rápido con R si la carga resultante de la distribución es cero.) Como el área de la gran esfera aumenta como R^2, vemos que la integral de superficie se anula como $(1/R)(1/R^2)R^2 = (1/R)$ a medida que el radio de la esfera aumenta. Así pues, si incluimos todo el espacio en nuestra integración $(R\to\infty)$, la integral de superficie se hace cero y tenemos entonces que

$$U = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{\substack{\text{todo el}\\ \text{espacio}}}(\boldsymbol{\nabla}\phi)\cdot(\boldsymbol{\nabla}\phi)\,dV = \frac{\epsilon_0}{2}\int_{\substack{\text{todo el}\\ \text{espacio}}}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}\,dV. \tag{8.35}$$

Vemos que es posible representar la energía de cualquier distribución de carga como la integral de una densidad de energía ubicada en el campo.

8-6 La energía de una carga puntual

Nuestra nueva relación, la ecuación (8.35), dice que aun una sola carga puntual q tendrá cierta energía electrostática. En este caso, el campo eléctrico está dado por

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Luego, la densidad de energía a una distancia r de la carga es

$$\frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}.$$

Podemos tomar como elemento de volumen un cascarón esférico de espesor dr y área $4\pi r^2$. La energía total es:

$$U = \int_{r=0}^{\infty} \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2}\, dr = -\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r}\bigg|_{r=0}^{r=\infty}. \tag{8.36}$$

El límite para $r = \infty$ no presenta dificultad. Pero se supone que para una carga puntual tenemos que integrar hasta $r = 0$, lo cual da una integral infinita. La ecuación (8.35) dice que hay una cantidad infinita de energía en el campo de una carga puntual, aunque comenzamos con la idea de que había energía únicamente *entre* cargas puntuales. En nuestra fórmula original para la energía de un conjunto de cargas puntuales (8.3) no incluimos ninguna energía de interacción de una carga consigo misma. Lo que ha ocurrido es que cuando pasamos a una distribución continua de carga en la ecuación (8.27), contamos la energía de interacción de cada carga *infinitesimal* con todas las otras cargas infinitesimales. La misma cuenta está incluida en la ecuación (8.35), así que cuando la aplicamos a una carga puntual *finita*, estamos incluyendo la energía que se necesitaría para armar esa carga con cargas infinitesimales. Observarán, en efecto, que también obtendríamos el resultado de la ecuación (8.36) si usáramos nuestra expresión (8.11) para la energía de una esfera cargada e hiciéramos tender el radio a cero.

Debemos concluir que la idea de ubicar la energía en el campo es incompatible con la hipótesis de la existencia de cargas puntuales. Una manera de salir de la dificultad sería diciendo que las cargas elementales, como un electrón, en realidad no son puntos sino pequeñas distribuciones de carga. Alternativamente, podríamos decir que hay algo equivocado en nuestra teoría de la electricidad a distancias muy cortas, o en la idea de conservación local de la energía. Hay dificultades con ambos puntos de vista. Estas dificultades nunca han sido resueltas; existen hasta hoy. Un poco más adelante, cuando hayamos estudiado algunos conceptos adicionales, como el de momentum de un campo electromagnético, haremos una relación más completa de estas dificultades fundamentales en la comprensión de la naturaleza.

9

La electricidad en la atmósfera

9-1 El gradiente de potencial eléctrico en la atmósfera

9-2 Las corrientes eléctricas en la atmósfera

9-3 El origen de las corrientes atmosféricas

9-4 Las tormentas eléctricas

9-5 El mecanismo de separación de cargas

9-6 Los rayos

9-1 El gradiente de potencial eléctrico en la atmósfera

En un día ordinario sobre una llanura desierta, o sobre el mar, cuando uno se eleva a partir de la superficie terrestre el potencial eléctrico aumenta a razón de 100 voltios por metro. Existe, entonces, un campo eléctrico vertical $\boldsymbol{E}$ de 100 voltios/metro en el aire. El signo del campo corresponde a una carga negativa sobre la superficie de la Tierra. ¡Esto significa que el potencial a la altura de sus narices es 200 voltios más alto que el potencial a la altura de sus pies! Podrían preguntar: "¿por qué no se ubican dos electrodos en el aire a un metro de distancia, uno de otro, a fin de utilizar los 100 voltios para alimentar nuestras luces eléctricas?" O bien, podrían preguntar: "si *realmente* existe una diferencia de potencial de 200 voltios entre mi nariz y mis pies, ¿por qué no recibo una descarga cuando salgo a la calle?"

Primero vamos a responder la segunda pregunta. El cuerpo es un conductor relativamente bueno. Si están en contacto con el suelo, ustedes y el suelo tenderán a formar una superficie equipotencial. Normalmente las equipotenciales son paralelas al suelo como lo muestra la figura 9-1(a), pero cuando ustedes se paran sobre el suelo las equipotenciales se distorsionan y el campo es de la forma indicada en la figura 9-1(b). De esta manera tienen ahora una diferencia de potencial prácticamente nula entre la cabeza y los pies. Hay cargas que se desplazan de la Tierra hacia la cabeza cambiando de este modo el campo. Algunas de ellas pueden ser neutralizadas por los iones provenientes del aire, pero la corriente de esos iones es muy pequeña debido a que el aire es un mal conductor.

Revisar

Chalmers, J. Alan, *Atmospheric Electricity*, Pergamon Press, Londres (1957).

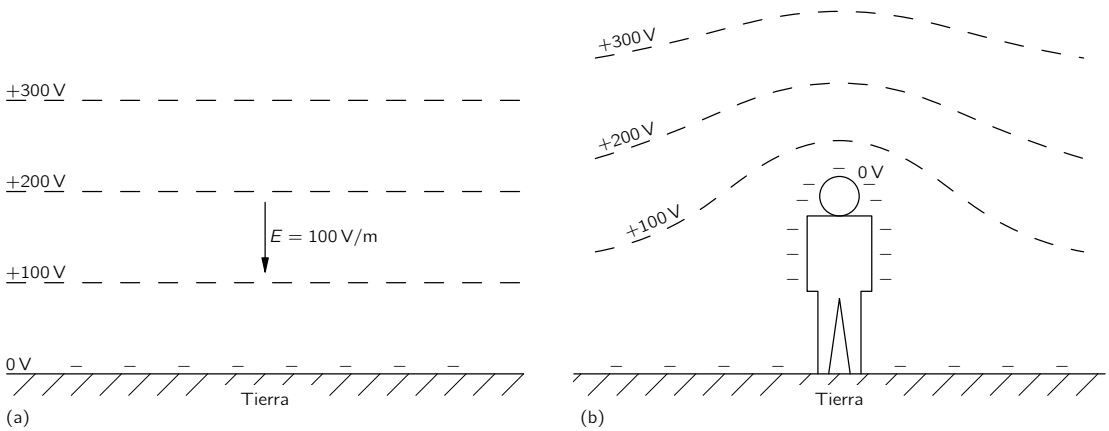


Figura 9-1. (a) La distribución de potencial sobre la Tierra. (b) La distribución de potencial cerca de un hombre en un lugar abierto y llano.

¿Cómo es posible medir un campo de este tipo si el campo se modifica al colocar allí cualquier cosa? Hay varias maneras. Una de ellas consiste en colocar un conductor aislado a cierta distancia encima del suelo y dejarlo allí hasta que esté al mismo potencial que el aire. Si lo dejamos allí lo suficiente, la pequeñísima conductividad del aire permitirá que las cargas abandonen el conductor (o que se acumulen) hasta que adopte el potencial correspondiente a su altitud. Se

puede ahora retornar el conductor al suelo y medir la diferencia de potencial que se ha producido. Un camino más rápido consiste en tomar como conductor un recipiente con agua con una pequeña pérdida. Como el agua goteará del recipiente se llevará el exceso de cargas que pudiese haber y el recipiente se aproximará al mismo potencial del aire (las cargas, como saben, residen en la superficie y cuando las gotas salen del recipiente son "pedazos de superficie" que lo abandonan). Podemos medir el potencial del recipiente con un electrómetro.

Existe otra forma para medir directamente el *gradiente* de potencial. Como hay un campo eléctrico, hay una carga superficial sobre la Tierra ($\sigma = \epsilon_0 E$). Si colocamos sobre el suelo una placa metálica y le hacemos una conexión a tierra, aparecen cargas negativas sobre ella [véase figura 9-2(a)]. Si cubrimos ahora esta placa con otra placa conductora B conectada a tierra, las cargas aparecerán ahora sobre la placa B y no habrá cargas en la placa original A. Si medimos la carga que fluye desde la placa A hacia tierra cuando se le recubre con B (digamos por medio de un galvanómetro intercalado en la conexión a tierra) se puede encontrar la densidad de carga superficial que había en ese lugar y, en consecuencia, el campo eléctrico.

Habiendo sugerido cómo podemos medir el campo eléctrico en la atmósfera continuaremos con su descripción. Las mediciones muestran, primero que nada, que a medida que la altitud es mayor el campo sigue existiendo pero que se vuelve cada vez más débil. Alrededor de los 50 kilómetros el campo es muy pequeño de modo que la mayor parte de la variación del potencial (la integral de E) se produce a pequeñas alturas. La diferencia total de potencial desde la superficie de la Tierra hasta lo alto de la atmósfera es alrededor de 400 000 voltios.

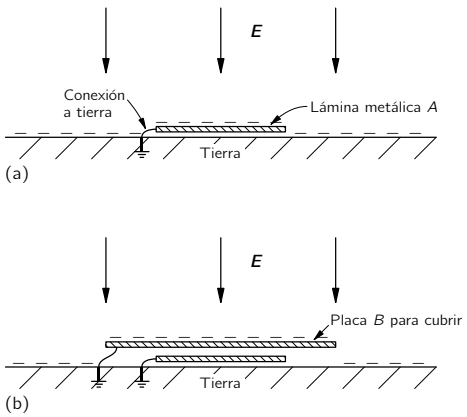


Figura 9-2. (a) Una lámina metálica a tierra tendrá la misma carga superficial que la Tierra. (b) Si se cubre la lámina con un conductor a tierra, no tendrá carga superficial.

9-2 Las corrientes eléctricas en la atmósfera

Otra cuestión que se puede medir además del gradiente de potencial es la corriente en la atmósfera. La densidad de corriente es pequeña —alrededor de 10 micromicroamperios cruzan cada metro cuadrado paralelo a la Tierra—. El aire evidentemente no es un aislador perfecto, y debido a su conductividad, una pequeña corriente —producida por el campo eléctrico que acabamos de describir— pasa del cielo a la Tierra.

¿Por qué es conductora la atmósfera? En uno que otro lugar hay entre las moléculas de aire un ion —una molécula de oxígeno, por ejemplo, que ha adquirido un electrón más o que quizá ha perdido uno—. Estos iones no permanecen como moléculas simples ya que su campo eléctrico normalmente acumula otras moléculas alrededor de ellos. Cada ion se transforma entonces en un pequeño montoncito que junto con otros montoncitos se desplaza en el campo —moviéndose lentamente hacia arriba y hacia abajo— produciendo la corriente observada. ¿De dónde provienen los *iones*? Primero se pensó que los iones eran producidos por la radiactividad de la Tierra (se sabía que la radiación proveniente de materiales radiactivos podía transformar el aire en conductor por ionización de sus moléculas). Las partículas como los rayos β, por ejemplo, que salen de los núcleos atómicos se mueven tan rápidamente que pueden arrancar electrones a los átomos dejando iones a su paso. Esto implica, por supuesto, que si nos desplazamos hacia mayores alturas deberemos encontrar una ionización menor debido a que la radiactividad proviene de todo lo que hay en el suelo —de los restos de radio, uranio, potasio, etcétera—.

A fin de comprobar esta teoría, unos físicos llevaron a cabo un experimento en un globo con el propósito de medir la ionización del aire (Hess, en 1912), y descubrieron precisamente lo opuesto —¡que la ionización por unidad de volumen *aumenta* con la altitud!— (en la figura 9-3 se muestra la forma que tiene el aparato. Las dos placas se cargan periódicamente al potencial V. Debido a la conductividad del aire las placas se descargan lentamente, la rapidez de la descarga fue medida con el electrómetro). Éste fue un resultado muy misterioso —el descubrimiento más sensacional de toda la historia de la electricidad atmosférica—. Fue realmente tan sensacional que originó una rama de la ciencia completamente nueva: la de los rayos cósmicos. La electricidad atmosférica en sí se tornó menos sensacional.

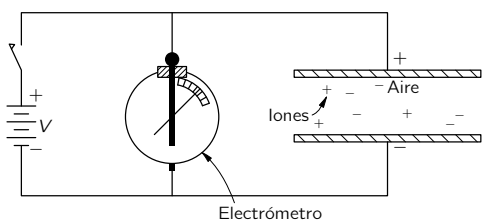


Figura 9-3. Midiendo la conductividad del aire que se debe al movimiento de iones.

Evidentemente la ionización era producida por algo exterior a la Tierra; la investigación de esta fuente llevó al descubrimiento de los rayos cósmicos. No vamos a discutir el tema de los rayos cósmicos ahora, sólo diremos que son los que originan los iones. Si bien los iones son continuamente eliminados, nuevos iones son creados por las partículas de rayos cósmicos que provienen del exterior.

Para ser precisos, es necesario decir que, además de los iones constituidos por moléculas, existen otras clases de iones. Minúsculas partículas, como pequeños granos de polvo, flotan en el aire y se cargan. A veces se los llama "núcleos". Por ejemplo, cuando se rompe una ola en el mar, pequeñísimas gotas de agua son proyectadas hacia el aire. Cuando una de esas gotas se evapora, deja un cristal infinitesimal de NaCl flotando en el aire. Esos pequeños cristales pueden captar cargas y transformarse en iones; son los llamados "grandes iones".

Los pequeños iones —los formados por los rayos cósmicos— tienen mayor movilidad. Debido a que son muy pequeños se mueven rápidamente a través del aire —con una velocidad alrededor de 1 cm/s en un campo de 100 voltios/metro, o sea de 1 V/cm—. Los iones más grandes y más pesados se mueven mucho más lentamente. Se ve entonces que si hay muchos "núcleos" captarán las cargas de los pequeños iones. Entonces, y puesto que los "iones grandes" se mueven más lentamente en un campo, la conductividad total se verá reducida. La conductividad del aire, por lo tanto, es muy variable debido a que es muy sensible al grado de "suciedad" que pueda haber en él. Hay mayor cantidad de suciedad sobre la tierra —donde los vientos levantan gran cantidad de polvo y donde el hombre agrega toda clase de contaminantes al aire— que sobre el agua. No es sorprendente que de día a día, de momento a momento, de lugar a lugar, la conductividad del aire cercana a la superficie de la Tierra varíe enormemente. El gradiente de potencial observado en un lugar particular sobre la superficie de la Tierra también varía apreciablemente porque más o menos la misma corriente fluye hacia abajo desde grandes alturas en diferentes lugares, y como la conductividad varía en las vecindades de la Tierra resulta una variación del gradiente de potencial.

La conductividad del aire debida al movimiento de los iones también aumenta rápidamente con la altura —por dos razones—. En primer lugar, la ionización producida por los rayos cósmicos aumenta con la altura. En segundo lugar, como la densidad del aire disminuye, el camino libre promedio de los iones aumenta, de manera que pueden recorrer un camino más largo en el campo eléctrico antes de sufrir un choque —resultando entonces un rápido aumento de la conductividad con la altura—.

Aunque la densidad de corriente eléctrica en el aire es solamente de unos pocos micromicroamperios por metro cuadrado, hay muchísimos metros cuadrados en la superficie de la Tierra. Además, la corriente eléctrica total que llega a la superficie de la Tierra en cada instante es constante y muy cercana a los 1 800 amperios. Esta corriente, por supuesto, es "positiva" —lleva más cargas hacia la Tierra—. De esta manera tenemos una fuente de tensión de 400 000 voltios con una corriente de 1 800 amperios —¡o sea una potencia de 700 megawatts!

Con una corriente tan grande en descenso, las cargas negativas que hay sobre la Tierra deberían descargarse rápidamente. En efecto, sería necesaria solamente una media hora para descargar toda la Tierra. Pero el campo eléctrico atmosférico ha durado más de media hora desde su descubrimiento. ¿Cómo se mantiene? ¿Quién mantiene el potencial? ¿Y entre la tierra y qué se mantiene? Hay numerosos puntos a tratar.

La Tierra es negativa y el potencial en el aire es positivo. Si suben suficientemente alto, la conductividad es tan grande que no hay ninguna posibilidad de que el potencial varíe horizontalmente. El aire, para la escala de tiempo que estamos hablando, es efectivamente un conductor. Esto ocurre a alturas vecinas a los 50 kilómetros. No es tan alta como la "ionosfera", en la cual hay gran cantidad de iones producidos fotoeléctricamente por el Sol. Sin embargo, para nuestra discusión sobre la electricidad atmosférica, el aire es lo suficientemente conductor alrededor de los 50 kilómetros como para que podamos imaginar que hay una superficie conductora prácticamente perfecta a esta altura, de la cual bajan las

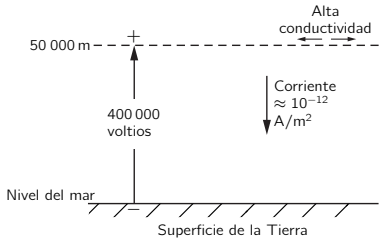


Figura 9-4. Condiciones eléctricas típicas en atmósfera despejada.

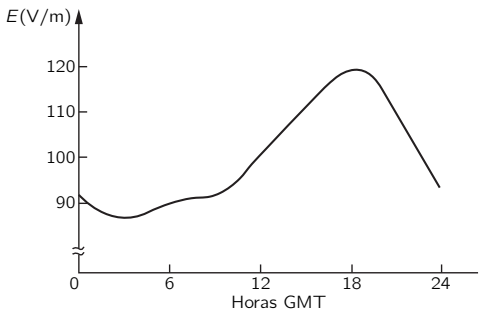


Figura 9-5. Variación diaria promedio del gradiente de potencial atmosférico en un día despejado sobre los océanos; referido a la hora de Greenwich.

corrientes. La figura 9-4 muestra un gráfico de esta situación. El problema es: ¿Cómo se mantienen ahí las cargas positivas?, ¿cómo se las bombea de vuelta? Porque si descienden sobre la Tierra, se las debe bombear nuevamente hasta esas alturas. Éste fue uno de los más grandes enigmas de la electricidad atmosférica durante un buen tiempo.

Cada elemento de información que se pueda obtener, deberá darnos una indicación, o por lo menos, decirnos algo respecto a esto. Aquí hay un fenómeno interesante: si medimos la corriente (que es más estable que el gradiente de potencia) sobre el mar, por ejemplo, o en condiciones controladas cuidadosamente, y promediamos con mucho cuidado de modo que nos libremos de las irregularidades, descubrimos que sigue habiendo una variación diaria. El promedio de muchas mediciones sobre el océano tiene una variación temporal más o menos como lo muestra la figura 9-5. La corriente varía alrededor de $\pm 15\,\%$ y es mayor a las 19:00 en Londres. Lo extraño de todo esto es que *cualquiera* sea el lugar donde efectúen la medición de la corriente —en el océano Atlántico, o en el océano Pacífico o en el océano Ártico— ¡tiene un valor máximo cuando los relojes de *Londres* indican las 19:00 horas! En todo el mundo la corriente tiene un máximo a las 19:00 horas de Londres y un mínimo a las 4:00 también hora de Londres. Es decir, depende de la hora absoluta de la Tierra y *no* de la hora local del lugar de observación. En cierto modo no es misterioso; está de acuerdo con nuestra idea de que hay una conductividad lateral muy grande en la parte más alta de la atmósfera, porque esto hace imposible que la diferencia de potencial entre el suelo y esta capa superior puedan variar localmente. Cualquier variación de potencial debería ser mundial y esto es lo que ocurre realmente. Lo que sabemos hasta ahora es que el potencial en la superficie "superior" está disminuyendo y aumentando en un 15 % en función del tiempo absoluto de la Tierra.

9-3 El origen de las corrientes atmosféricas

Tenemos que hablar ahora de las fuentes de las grandes corrientes negativas que fluyen desde lo alto hacia la superficie de la Tierra para mantener su carga negativa. ¿Dónde están las baterías que lo realizan? La figura 9-6 muestra la "batería". Es la tormenta eléctrica y sus rayos. Pero resulta que los rayos no "descargan" el potencial de que hemos estado hablando (como podrían suponer). Las tormentas de rayos llevan cargas *negativas* hacia la Tierra. Cuando cae un rayo, nueve de cada 10 veces se produce la descarga de gran cantidad de cargas negativas hacia la Tierra. Por lo que, son las tormentas eléctricas las que por todo el mundo están cargando la Tierra a un promedio de 1 800 amperios, la cual se descarga luego en zonas donde hace buen tiempo.

Se producen alrededor de 40 000 tormentas eléctricas por día sobre toda la Tierra y podemos considerarlas como las baterías que bombean la electricidad hacia las capas superiores y mantienen la diferencia de potencial. Luego tengan en cuenta la geografía de la Tierra —hay tormentas eléctricas por la tarde en Brasil, tormentas eléctricas tropicales en África, etc.—. Se han hecho estimaciones de cuántos rayos están cayendo en cualquier instante en todo el mundo y quizá no hace falta decir que las estimaciones concuerdan más o menos con las medidas de diferencia de potencial: la cantidad total de actividad de tormentas eléctricas es máxima en toda la Tierra alrededor de las 19:00 en Londres. Sin embargo, las estimaciones sobre tormentas eléctricas son muy difíciles de hacer y sólo se hicieron *después* que se supo que debía haber una variación. Estas cuestiones son muy difíciles porque no tenemos observaciones suficientes sobre los mares en todos los lugares de la Tierra para saber el número de tormentas eléctricas de forma precisa. Pero los que piensan que "hacen las cosas bien" obtienen el resultado de que hay unos 100 rayos por segundo en todo el mundo con un pico de actividad a las 19:00, hora media de Greenwich.

Para comprender cómo trabajan estas baterías, examinaremos una tormenta eléctrica en detalle. ¿Qué pasa dentro de una tormenta eléctrica? Lo describiremos hasta donde se conoce. Cuando entramos en este maravilloso fenómeno de la naturaleza —en vez de las esferas idealizadas de conductores perfectos dentro

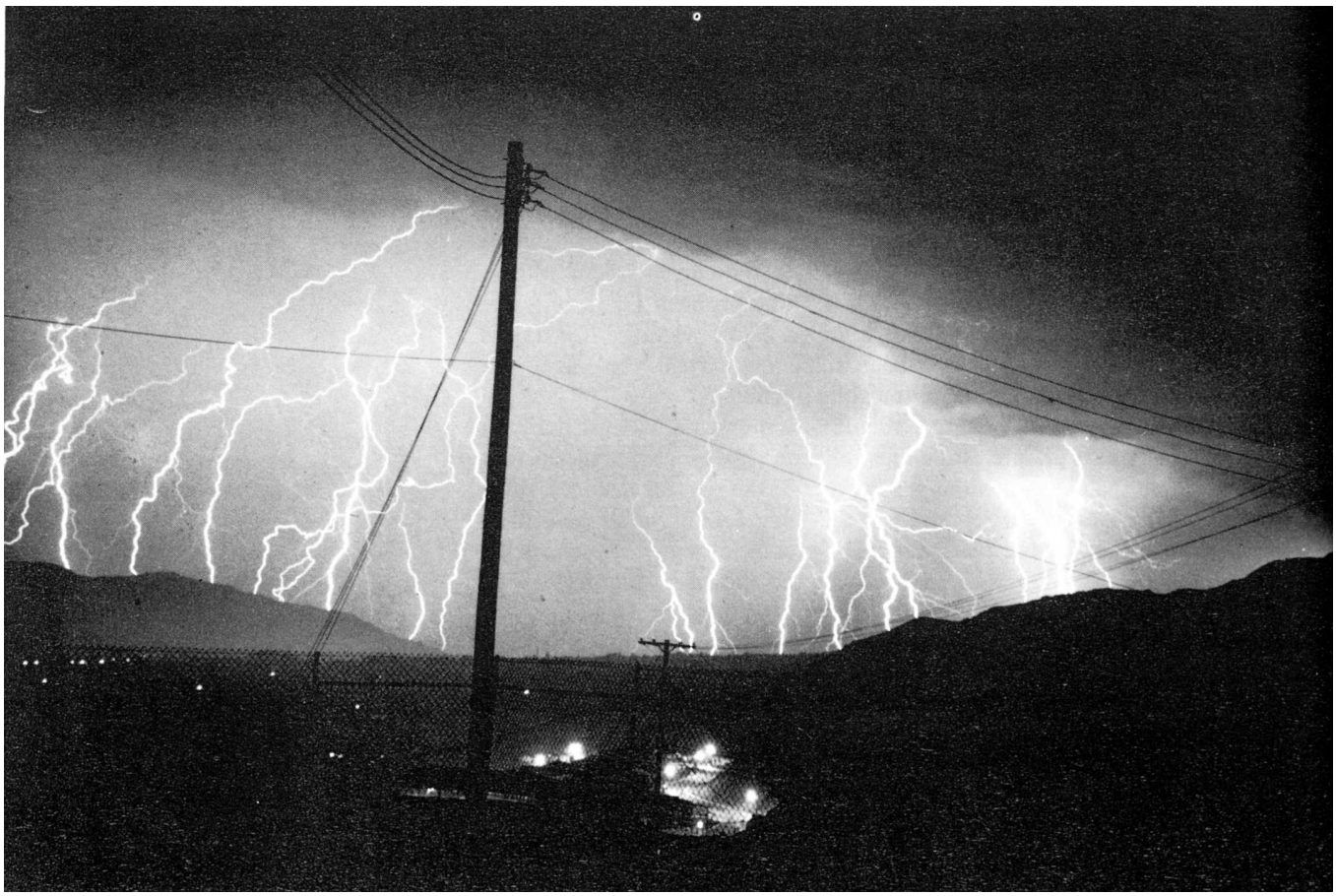


Figura 9-6. El mecanismo que genera el campo eléctrico atmosférico. [Foto de William L. Widmayer.]

de otras esferas, que podemos resolver tan limpiamente— descubrimos que no sabemos mucho. Y, sin embargo, es para entusiasmar. Cualquiera que haya estado en una tormenta eléctrica ha disfrutado o se ha asustado o, por lo menos, ha tenido alguna emoción. Y en esos lugares de la naturaleza donde sentimos emoción encontramos que, en general, están envueltos de una complejidad y un misterio correspondientes. No va a ser posible describir exactamente cómo funciona una tormenta eléctrica, porque todavía no sabemos mucho. Pero trataremos de describir un poquito de lo que ocurre.

9-4 Las tormentas eléctricas

En primer lugar, una tormenta eléctrica ordinaria está compuesta de una cantidad de "células" bastante juntas, pero casi independientes entre sí. Entonces lo mejor es analizar una célula por vez. Por "célula" entendemos una región con una superficie limitada en dirección horizontal, en la cual ocurren todos los procesos básicos. Por lo común hay varias células una al lado de otra, y en cada una está ocurriendo más o menos lo mismo, aunque, quizá, no al mismo tiempo. La figura 9-7 indica en forma idealizada cuál es el aspecto de esta célula en los comienzos de la tormenta eléctrica. Resulta que en cierto lugar del aire, cuando se cumplen ciertas circunstancias que describiremos, hay un ascenso general del aire con velocidades cada vez mayores cerca del tope. A medida que sube, el aire tibio y húmedo de abajo se enfría y condensa. En la figura, las pequeñas cruces indican nieve y los puntos indican lluvia, pero como las corrientes ascendentes son suficientemente grandes y las gotas suficientemente chicas, ni la nieve ni la

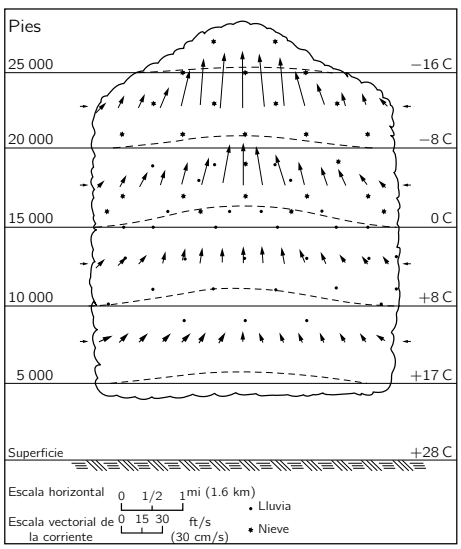


Figura 9-7. Una célula de tormenta eléctrica en las primeras etapas de su desarrollo. (Del informe de la Oficina Meteorológica del Ministerio de Comercio de los Estados Unidos, junio de 1949.)

lluvia caen en esta etapa. Es la etapa inicial y no la verdadera tormenta eléctrica todavía —en el sentido de que nada ocurre al nivel del suelo—. Al mismo tiempo que el aire tibio sube, arrastra tras de sí aire de los costados —punto importante dejado de lado durante muchos años—. Así pues, no es sólo el aire de abajo que sube sino también otra cierta cantidad de aire de los costados.

¿Por qué sube el aire de esta manera? Como saben, a medida que el aire sube es más frío. El sol calienta el *suelo* y es el vapor de agua en la alta atmósfera lo que vuelve a irradiar el calor hacia el cielo; por lo tanto, a grandes alturas el aire es frío —muy frío— mientras que más abajo es tibio. Ustedes dirían: "entonces es muy simple. El aire tibio es más liviano que el frío; por ello, la combinación es mecánicamente inestable y el aire tibio sube". Por supuesto, si la temperatura es diferente a alturas diferentes, el aire *es termodinámicamente* inestable. Abandonado a sí mismo durante un tiempo infinitamente largo, todo el aire llegaría a estar a la misma temperatura. Pero no está abandonado a sí mismo; el Sol siempre brilla (durante el día). De modo que el problema no es por cierto un problema de equilibrio termodinámico sino de equilibrio *mecánico*. Supongan que representamos (como en la figura 9-8) la temperatura del aire en función de la altura sobre el suelo. En circunstancias ordinarias obtendríamos una disminución según una curva como la marcada (a); a medida que la altura aumenta la temperatura baja. ¿Cómo puede ser estable la atmósfera? ¿Por qué el aire caliente no sube simplemente hasta el aire frío? La respuesta es ésta: si el aire subiera, la presión bajaría y si consideramos un volumen determinado de aire que sube, se estaría expandiendo adiabáticamente (no saldría ni entraría calor porque en las grandes dimensiones que estamos considerando, no hay tiempo de que haya mucho flujo de calor). Por lo tanto, el volumen de aire se enfriaría al subir. Ese proceso adiabático da una relación entre temperatura y altura como la curva (b) de la figura 9-8. Cualquier aire que proviniera de abajo sería *más frío* que el del lugar a donde llegará. Así pues, no hay ninguna razón para que suba el aire caliente de abajo; si subiera, se enfriaría a una temperatura menor que la del aire que ya hay ahí, sería más pesado que el aire de ahí y simplemente tendería a bajar de nuevo. En un día de buen tiempo y brillante con muy poca humedad hay una cierta rapidez de caída de la temperatura en la atmósfera, y esta rapidez de caída es en general menor que el "gradiente estable máximo", representado por la curva (b). El aire está en equilibrio mecánico estable.

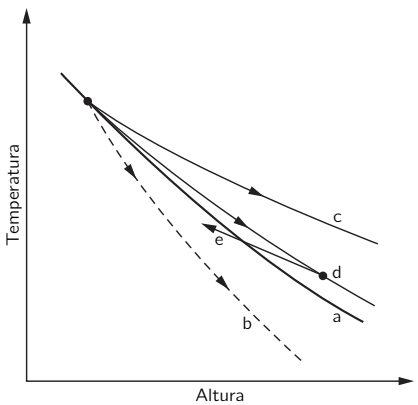


Figura 9-8. Temperatura atmosférica.
(a) Atmósfera estática;
(b) enfriamiento adiabático de aire seco;
(c) enfriamiento adiabático de aire húmedo;
(d) aire húmedo mezclado con un poco de aire de ambiente.

Por otra parte, si consideramos un volumen de aire que contiene mucho vapor de agua y lo arrastra hacia arriba, la curva de enfriamiento adiabático será diferente. A medida que se expande y se enfría, el vapor de agua que contiene se condensa, y el agua en condensación liberará calor. En consecuencia, la mayor parte del aire no se enfría casi igual que el aire seco. Así pues, si comienza a ascender aire más húmedo que el promedio, la temperatura seguirá una curva como la (c) de la figura 9-8. Se enfriará algo pero seguirá siendo más caliente que el aire circundante que se encuentra al mismo nivel. Si tenemos una región de aire caliente y húmedo y algo lo hace empezar a ascender, siempre se encontrará más liviano y más caliente que el aire que lo rodea y continuará subiendo hasta alcanzar grandes alturas. Ésta es la maquinaria que hace que el aire ascienda en una célula de tormenta eléctrica.

Por muchos años se explicó la célula de tormenta eléctrica simplemente de esta manera. Pero más tarde las medidas mostraron que la temperatura de la nube a diferentes alturas no era tan alta como indica la curva (c). La razón es que a medida que la "burbuja" de aire húmedo sube, arrastra tras de sí aire del medio, el cual lo enfría. La curva de temperatura en función de la altura se parece más a la curva (d), que está mucho más cerca de la curva original (a) que de la curva (c).

Después de que la convección que acabamos de describir se ha puesto en marcha, la sección transversal de una célula de tormenta eléctrica tiene el aspecto que muestra la figura 9-9. Tenemos lo que se llama una tormenta eléctrica "madura". Hay una corriente ascendente muy rápida que, en esta etapa, sube hasta unos 10 000 a 15 000 metros —a veces más alto aún—. Las nubes de tormenta, con su condensación, suben por encima del banco general de nubes,

llevadas por una corriente ascendente que, por lo común, es de aproximadamente 96.5 kilómetros por hora. A medida que el vapor es arrastrado hacia arriba y se condensa, forma pequeñísimas gotas que se minan rápidamente a temperaturas por debajo de cero grados. Deberían congelarse, pero no lo hacen inmediatamente —se "sobreenfrían"—. Por lo común, el agua y otros líquidos se enfriarán bien por debajo de sus puntos de congelación antes de cristalizar si no hay "núcleos" presentes para iniciar el proceso de cristalización. Únicamente si hay algún trozo pequeño de material presente, como un cristal minúsculo de "NaCl", la gota de agua se congelará formando un trocito de hielo. Luego el equilibrio es tal que las gotas de agua se evaporan y los cristales de hielo crecen. Por lo tanto, en un momento dado hay una desaparición rápida de agua y una formación rápida de hielo. Además, puede haber choques directos entre las gotas de agua y el hielo —en los cuales el agua sobreenfriada se pega a los cristales de hielo, lo cual hace que se cristalice repentinamente—. Así, alcanzado cierto punto en el desarrollo de la nube, hay una rápida acumulación de grandes partículas de hielo.

Cuando las partículas de hielo son suficientemente pesadas, comienzan a caer a través del aire ascendente —se hacen demasiado pesadas para que la corriente ascendente las siga manteniendo—. Al bajar, arrastran un poco de aire con ellas e inician una corriente descendente. Y, lo que es sorprendente, es fácil ver que una vez que comienza la corriente descendente, la misma se automantiene. ¡Ahora el aire se lanza hacia abajo!

Observen que la curva (d) de la figura 9-8, que corresponde a la verdadera distribución de temperatura en la nube, es más pronunciada que la curva (c), que corresponde al aire húmedo. Por lo tanto, si tenemos aire húmedo cayendo, su temperatura disminuirá con la pendiente de la curva (c) y llegará a estar *por debajo* de la temperatura del medio si baja lo suficiente, como lo indica la curva (e) de la figura. Cuando llega a este punto, es más denso que el medio y continúa cayendo rápidamente. Ustedes dirán: "eso es un movimiento perpetuo. Primero demuestra que el aire debe ascender y cuando está allá arriba demuestra igualmente bien que el aire debe caer". Pero no es un movimiento perpetuo. Cuando la situación es inestable y el aire caliente debe ascender, es claro que algo tiene que remplazar al aire caliente. Es igualmente cierto que el aire frío que baja tiene que remplazar rápidamente al aire caliente, pero se dan cuenta que lo que baja *no* es el aire original. Los primeros razonamientos, que consideraban una nube particular sin arrastre hacia arriba y luego hacia abajo, eran una especie de rompecabezas. Necesitaban de la lluvia para mantener la corriente descendente —lo cual es un argumento difícil de creer—. Tan pronto se dan cuenta de que hay un montón de aire original mezclado con el aire ascendente, el razonamiento termodinámico demuestra que puede haber un descenso del aire frío que originariamente estaba a gran altura. Esto explica el esquema de la tormenta eléctrica activa mostrado en la figura 9-9.

A medida que el aire baja, comienza a caer lluvia de la parte inferior de la tormenta. Por lo que, el aire relativamente frío se extiende al llegar a la superficie de la Tierra. Así, inmediatamente antes de que llegue la lluvia hay un poco de viento frío que nos da un aviso anticipado de la tormenta que viene. En la tormenta misma hay ráfagas rápidas e irregulares del aire, hay una turbulencia enorme en la nube, etc. Pero básicamente tenemos una corriente ascendente, luego una descendente —en general, un proceso muy complicado—.

El momento en que se inicia la precipitación es el mismo momento en que comienza la corriente descendente y en que aparecen los fenómenos eléctricos. Sin embargo, antes de describir los rayos, podemos terminar la historia viendo que le ocurre a la célula de tormenta después de aproximadamente media o una hora. La célula tiene el aspecto que muestra la figura 9-10. La corriente ascendente se detiene porque ya no hay suficiente aire caliente para mantenerla. La precipitación hacia abajo continúa por unos instantes, salen los últimos restos de agua y todo se vuelve más tranquilo —aunque hay pequeños cristales de hielo que quedaron muy arriba en el aire—. Como a muy grandes alturas los vientos están en direcciones diferentes, la parte de arriba de la nube se extiende por lo común en forma de yunque. Así, la célula toca a su fin.

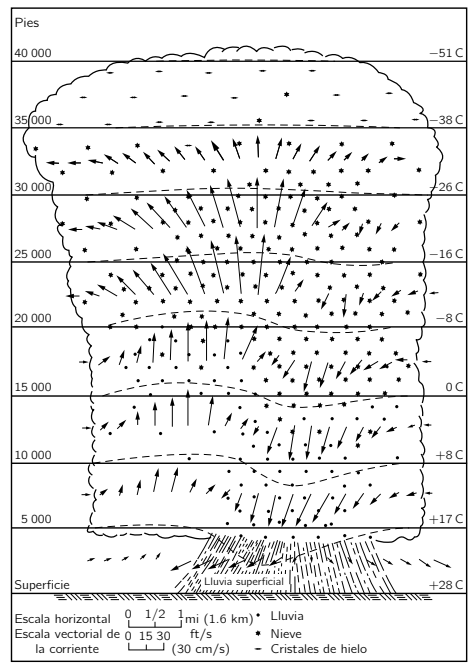


Figura 9-9. Célula madura de tormenta eléctrica. (Del Informe de la Oficina Meteorológica del Ministerio de Comercio de los Estados Unidos, junio de 1949.)

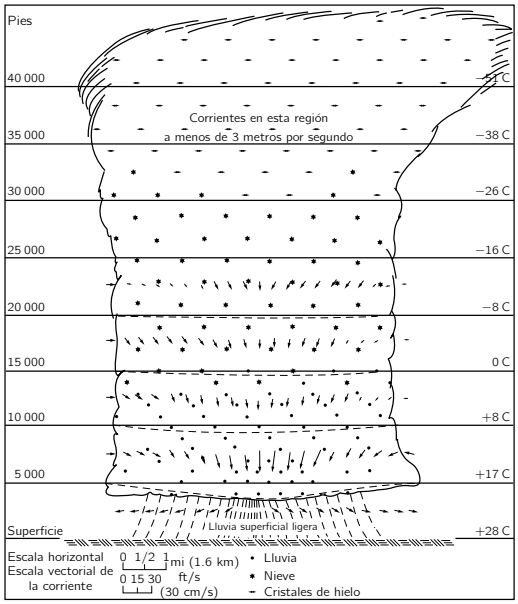


Figura 9-10. La última fase de una célula de tormenta eléctrica. (Del Informe de la Oficina Meteorológica del Ministerio de Comercio de los Estados Unidos, junio de 1949.)

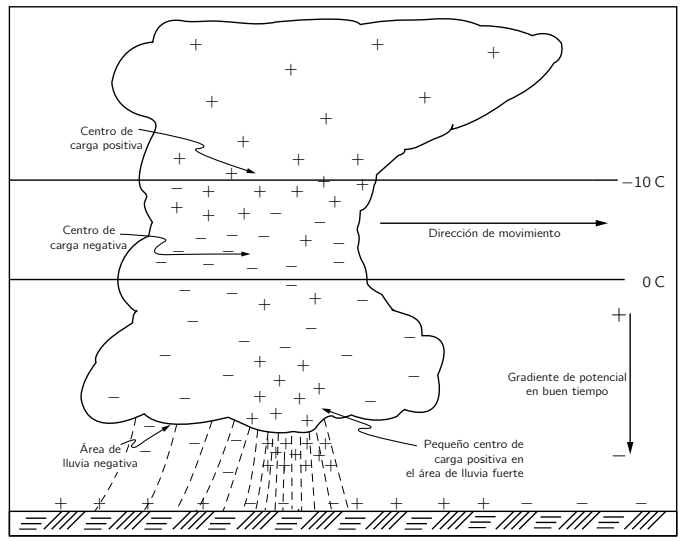


Figura 9-11. Distribución de cargas eléctricas en una célula madura de tormenta eléctrica. (Del Informe de la Oficina Meteorológica del Ministerio de Comercio de los Estados Unidos, junio de 1949.)

9-5 El mecanismo de separación de cargas

Ahora discutiremos el aspecto más importante para nuestros fines: el desarrollo de las cargas eléctricas. Experimentos de varios tipos —incluyendo el vuelo de aviones a través de las tormentas (¡los pilotos que lo hacen son valientes!)— nos dicen que la distribución de carga en una célula de tormenta eléctrica es algo así como la que muestra la figura 9-11. La parte de arriba de la tormenta eléctrica tiene carga positiva y la de abajo, negativa —a excepción de una pequeña región local de carga positiva en la parte inferior de la nube, la cual ha preocupado mucho a todo el mundo—. Parece que nadie sabe por qué está ahí, cuál es su importancia —si es un efecto secundario de la lluvia positiva que baja o si es parte esencial del mecanismo—. Las cosas serían mucho más simples si no estuviera ahí. De todas maneras, la carga preponderante negativa en la parte inferior y la carga positiva en la superior tienen el signo correcto para la batería necesaria para hacer negativa la Tierra. Las cargas positivas están a 6 o 7 kilómetros de altura, donde la temperatura es de unos $-20°C$, mientras que las cargas negativas están a una altura de 3 o 4 kilómetros, donde la temperatura está entre cero y $-10°C$.

La carga de la parte inferior de la nube es suficientemente grande como para producir diferencias de potencial de 20, 30 o aun 100 millones de voltios entre la nube y la tierra —mucho mayor que los 0.4 millones de voltios entre el "cielo" y el suelo cuando la atmósfera está despejada—. Por lo que, estos grandes voltajes superan el voltaje de ruptura del aire y crean descargas gigantes de arco. Cuando se produce la ruptura, los rayos transportan a la Tierra las cargas negativas de la parte inferior de la tormenta.

Describiremos ahora con cierto detalle las características del rayo. Antes que nada, hay grandes voltajes, de modo que se produce la ruptura eléctrica del aire. Hay rayos* entre una parte de una nube y otra parte de la misma, o entre una nube y otra nube, o entre una nube y la Tierra. En cada uno de los relámpagos independientes de descarga —el tipo de rayos que ven— bajan aproximadamente

* N. del T.: en español se usa frecuentemente *relámpago* como sinónimo de *rayo* cuando el mismo es entre nube y nube o entre una parte y otra de una nube. Para evitar confusiones usaremos relámpago exclusivamente en su acepción de "resplandor producido por un rayo".

20 o 30 coulombs de carga. Una pregunta es entonces: ¿cuánto tarda la nube en regenerar los 20 o 30 coulombs llevados por el rayo? Esto se puede saber midiendo, lejos de una nube, el campo eléctrico producido por el momento dipolar de la nube. En esas mediciones se observa una disminución repentina del campo cuando cae el rayo y luego un retorno exponencial al valor anterior con una constante de tiempo que es ligeramente diferente en distintos casos pero que es cercana a 5 segundos. Después de cada rayo, la tormenta tarda sólo 5 segundos en desarrollar su carga de nuevo. Eso no significa necesariamente que en todo momento va a haber otro rayo cada 5 segundos exactamente porque, naturalmente, la geometría cambia, etc. Los rayos saltan más o menos irregularmente, pero lo importante es que se tarda unos 5 segundos en recrear la condición original. Por lo tanto, hay aproximadamente 4 amperios de corriente en la máquina generadora de la tormenta eléctrica. Esto significa que cualquier modelo que se haga para explicar cómo esta tormenta genera su electricidad, debe tener mucho jugo; debe ser un dispositivo grande que funciona rápidamente.

Antes de seguir adelante discutiremos algo que casi con certeza no tiene nada que ver, pero que de todos modos es interesante porque muestra el efecto de un campo eléctrico sobre gotas de agua. Decimos que puede que no tenga nada que ver porque se refiere a un experimento que se puede hacer en el laboratorio con un chorro de agua para mostrar los efectos bastante fuertes del campo eléctrico sobre gotas de agua. En una tormenta no hay ningún chorro de agua; hay una nube de hielo en formación y gotas de agua. En consecuencia, la cuestión del mecanismo puesto en juego en una tormenta probablemente no tenga ninguna relación con lo que pueden ver en el experimento simple que vamos a describir. Si toman una pequeña boquilla conectada a una llave de agua y la dirigen hacia arriba casi verticalmente, como en la figura 9-12, el agua saldrá en un chorro fino que finalmente se rompe en una lluvia de gotas finas. Si aplican un campo eléctrico al chorro en la boquilla (acercando una varilla cargada, por ejemplo), la forma del chorro cambia. Con un campo eléctrico débil, encontrarán que el chorro se rompe en un número menor de gotas grandes. Pero si aplican un campo más intenso, el chorro se rompe en muchísimas gotitas —más pequeñas que antes—.* Con un campo eléctrico débil hay una tendencia a inhibir el desmenuzamiento del chorro en gotas. Con un campo más intenso, en cambio, hay un aumento de la tendencia a separarse en gotas.

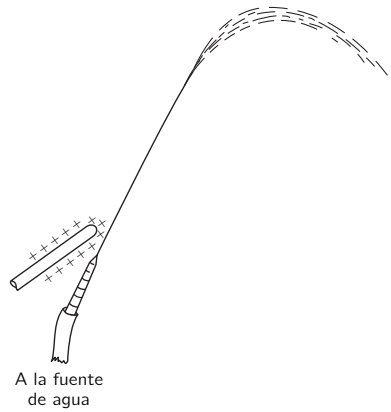


Figura 9-12. Un chorro de agua con un campo eléctrico cerca de la boquilla.

La explicación de estos efectos es probablemente la siguiente. Si tenemos el chorro de agua saliendo de la boquilla y le aplicamos un campo eléctrico, un lado del agua se hace ligeramente positivo y el otro ligeramente negativo. Luego, cuando el chorro se rompe, las gotas de un lado pueden ser positivas y las del otro negativas. Se atraerán y tendrán una tendencia a adherirse unas a otras, más que la que tenían antes —el chorro no se rompe tanto—. Por otra parte, si el campo es más intenso, la carga de cada gota se hace mucho mayor y hay una tendencia a que la carga *misma* ayude a romper las gotas debido a su propia repulsión. Cada gota se romperá en muchas más pequeñas, todas con la misma carga; de este modo se repelen y se extienden muy rápidamente. Así pues, a medida que aumentamos el campo, el chorro se divide más finamente. El único punto que queremos señalar es que en ciertas circunstancias los campos eléctricos tienen una influencia considerable sobre las gotas. El mecanismo exacto de lo que ocurre en una tormenta no se conoce y de ninguna manera está relacionado necesariamente con lo que acabamos de describir. Lo hemos incluido simplemente para que aprecien las complejidades que podrían entrar en juego. De hecho, nadie tiene una teoría aplicable a nubes que se base en esa idea.

Nos gustaría describir dos teorías que han sido inventadas para dar cuenta de la separación de cargas en una tormenta eléctrica. Puesto que en todas las teorías interviene la idea de que debe haber algo de carga en las partículas de la precipitación y una carga diferente en el aire. Entonces, por el movimiento de las partículas de la precipitación —el agua o el hielo— a través del aire, hay

* Una manera práctica de observar el tamaño de las gotas es hacer que el chorro caiga sobre una gran lámina delgada de metal. Las gotas más grandes hacen más ruido.

una separación de carga eléctrica. La única pregunta es: ¿cómo comienzan a cargarse las gotas? Una de las teorías más viejas se llama teoría de la "gota que se rompe". Alguien descubrió que si tienen una gota de agua que se rompe en dos pedazos en una corriente de viento, hay carga positiva en el agua y carga negativa en el aire. Esta teoría de la gota que se rompe tiene varias desventajas, entre las cuales la más seria es que el *signo* está equivocado. En segundo lugar, en el gran número de tormentas eléctricas de las zonas templadas que tienen rayos, los efectos de precipitación a grandes alturas son en hielo y *no* en agua.

Según lo que acabamos de decir, observamos que si pudiéramos imaginar alguna manera de que la carga fuera diferente en la parte superior y en la inferior de una gota y si también pudiéramos ver una razón de por qué las gotas de una corriente de aire de alta velocidad se romperían en dos pedazos desiguales —uno grande al frente y uno más pequeño atrás a causa del movimiento a través del aire o algo diferente— tendríamos una teoría (¡diferente de cualquier teoría conocida!). Entonces, las gotas pequeñas no caerían por el aire tan rápidamente como las grandes debido a la resistencia del aire y obtendríamos una separación de cargas. Como ven, es posible urdir todo tipo de posibilidades.

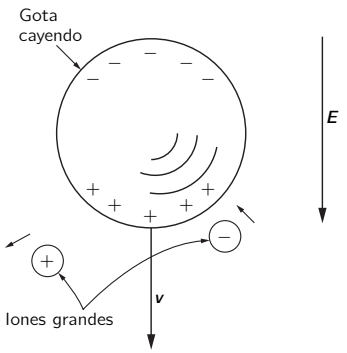


Figura 9-13. Teoría de C. T. R. Wilson sobre la separación de cargas en una nube de tormenta eléctrica.

Una de las teorías más ingeniosas, que es más satisfactoria en muchos aspectos que la teoría de la gota que se rompe, se debe a C. T. R. Wilson. La describiremos, como lo hizo Wilson, con referencia a las gotas de agua, aunque el mismo fenómeno se daría también con hielo. Supongan que tenemos una gota de agua cayendo en el campo eléctrico de unos 100 voltios por metro hacia la Tierra cargada negativamente. La gota tendrá un momento dipolar inducido —siendo positiva la parte de abajo de la gota y negativa la de arriba, como se ha dibujado en la figura 9-13—. Ahora bien, en el aire están los "núcleos" que mencionamos antes —los grandes iones lentos (los iones rápidos no tienen un efecto importante aquí)—. Supongan que cuando la gota está bajando se aproxima a un ion grande. Si el ion es positivo, es repelido por la parte inferior positiva de la gota y se aleja. Por lo tanto, no se adhiere a la gota. Si el ion se aproximara desde la parte superior, en cambio, se podría adherir a la parte de arriba que es negativa. Pero como la gota está cayendo por el aire, hay un desplazamiento del aire hacia arriba respecto a ella, el cual aleja los iones si su movimiento por el aire es suficientemente lento. Luego, los iones positivos tampoco se pueden adherir a la parte superior. Como ven, esto se aplicaría únicamente a los grandes iones lentos. Los iones positivos de este tipo tampoco se adherirán a la parte delantera o a la trasera de una gota que cae. Por el contrario, cuando una gota se acerca a los grandes iones lentos *negativos*, los atrae y los captura. La gota adquiere una carga negativa —el signo de la carga ha quedado determinado por la diferencia de potencial original de toda la Tierra— obteniéndose el signo correcto. Las gotas bajarán con carga negativa hasta la parte inferior de la nube y los iones cargados positivamente que quedan atrás son arrastrados hacia la parte superior de la nube por las diversas corrientes ascendentes. La teoría parece muy buena y, por lo menos, da el signo correcto. Además no depende de que tengamos gotas de líquido. Veremos, al estudiar la polarización en un dieléctrico, que los trozos de hielo harán lo mismo. También desarrollarán cargas positivas y negativas en sus extremos al encontrarse en un campo eléctrico.

No obstante, hay problemas aún con esta teoría. En primer lugar, la carga total implicada en una tormenta eléctrica es muy grande. Después de un tiempo corto se acabaría la disponibilidad de iones. Por eso Wilson y otros tuvieron que proponer que hay fuentes adicionales de iones grandes. Una vez que empieza la separación de cargas, se desarrollan campos eléctricos muy grandes y en estos campos intensos puede haber lugares donde el aire se ioniza. Si hay un punto con carga muy alta o cualquier objeto pequeño como una gota, puede concentrar el campo lo suficientemente como para originar una "chispa eléctrica". Cuando hay un campo eléctrico suficientemente intenso —digamos que positivo— los electrones caerán en el campo y adquirirán una gran velocidad entre choques. Su velocidad será tal que al chocar contra otro átomo arrancarán electrones de ese átomo, dejando cargas positivas a su paso. Estos nuevos electrones también adquieren velocidad y chocan con más electrones. Ocurre entonces una especie

de reacción en cadena o avalancha habiendo una rápida acumulación de iones. Las cargas positivas se quedan cerca de sus posiciones originales, así que el efecto resultante es distribuir la carga positiva que había en un punto por una región alrededor del mismo. Entonces, por supuesto, ya no hay un campo intenso y el proceso se detiene. Ésta es la característica de una "descarga disruptiva eléctrica". Es posible que los campos de la nube lleguen a ser tan intensos que produzcan un poco de descarga en forma de efluvio; también puede haber otros mecanismos, una vez comenzada la cosa, que produzcan una gran ionización. Pero nadie sabe exactamente cómo funciona. Así pues, el origen fundamental de los rayos en realidad no se comprende completamente. Sabemos que provienen de las tormentas eléctricas (y sabemos, naturalmente, que el trueno proviene del rayo —de la energía térmica liberada por la descarga—).

Por lo menos podemos comprender en parte el origen de la electricidad atmosférica. Se separan cargas positivas y negativas debido a las corrientes de aire, los iones y las gotas de agua sobre partículas de hielo que hay en una tormenta. Las cargas positivas son transportadas hasta la parte de arriba de la nube (véase la figura 9-11) y las cargas negativas se derraman de golpe sobre la Tierra en los rayos. Las cargas positivas dejan la cima de la nube, entran en las altas capas de aire mucho más conductor y se extienden por toda la Tierra. En las regiones de tiempo despejado las cargas positivas de esta capa son conducidas lentamente hacia la Tierra por los iones del aire —iones formados por los rayos cósmicos, por el mar y por las actividades del hombre—. ¡La atmósfera es una máquina eléctrica muy ocupada!

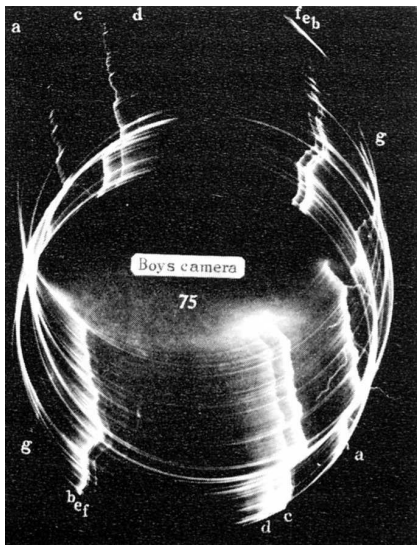


Figura 9-14. Fotografía de un rayo tomada con una cámara Boys. [Tomada de Schonland, Malan, y Collens, *Proc. Roy. Soc.* Londres, vol. 152 (1935).]

9-6 Los rayos

La primera evidencia de lo que ocurre en un rayo se obtuvo de fotografías tomadas con una cámara sostenida en la mano que se movía de un lado a otro con el obturador abierto —apuntando hacia un lugar donde se esperaba un rayo—. Las primeras fotografías obtenidas de esta manera mostraron claramente que los rayos son, por lo común, descargas múltiples a lo largo del mismo camino. Más tarde se desarrolló la "cámara Boys", que tiene *dos* lentes montadas a un ángulo de 180° sobre un disco que rota rápidamente. La imagen formada por cada lente se mueve transversalmente por la película —la fotografía está extendida en el tiempo—. Por ejemplo, si el rayo se repite habrá dos imágenes una junto a otra. Comparando las imágenes de las dos lentes es posible obtener los detalles de la sucesión temporal de los destellos. La figura 9-14 muestra una fotografía tomada con una cámara Boys.

Describiremos ahora el rayo. Tampoco aquí comprendemos exactamente cómo funcionan las cosas. Daremos una descripción cualitativa del *aspecto* que tiene, pero no entraremos en detalles de *por qué* hace lo que se ve. Describiremos únicamente el caso ordinario de la nube con parte inferior negativa sobre terreno llano. Su potencial es mucho más negativo que el de la Tierra abajo, de modo que los electrones negativos serán acelerados hacia la Tierra. Lo que ocurre es lo siguiente: todo comienza con algo llamado "descarga guía escalonada", que no es tan brillante como el rayo. En las fotografías se puede ver una manchita brillante al principio que empieza en la nube y baja muy rápidamente —¡a un sexto de la velocidad de la luz!—. Anda sólo unos 50 metros y se para. Hace una pausa de unos 50 microsegundos y luego da otro paso. Hace otra pausa y luego anda otro paso y así sucesivamente. Se mueve en forma escalonada hacia el suelo siguiendo un camino como el que muestra la figura 9-15. En la descarga guía hay cargas negativas provenientes de la nube; toda la columna está llena de cargas negativas. Además, el aire está siendo ionizado por las cargas en movimiento rápido que producen la guía, de modo que el aire se vuelve conductor a lo largo del camino trazado. En el momento que la guía toca el suelo, tenemos un "alambre" conductor que se extiende hasta la nube y está lleno de carga negativa. Ahora, finalmente, la carga negativa de la nube puede escapar simplemente y agotarse. Los electrones del extremo inferior de la guía son los primeros en darse cuenta de eso; se derraman dejando atrás una carga positiva que atrae más carga negativa

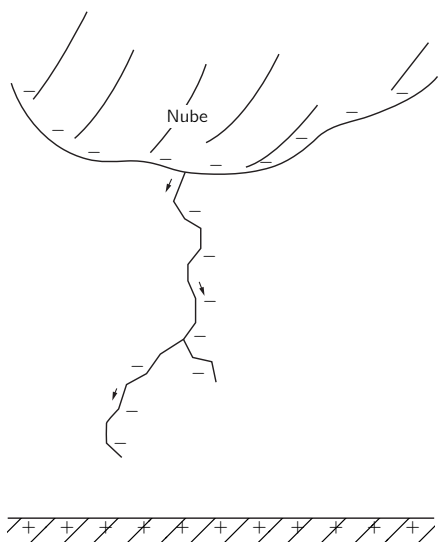


Figura 9-15. La formación de la "descarga guía escalonada".

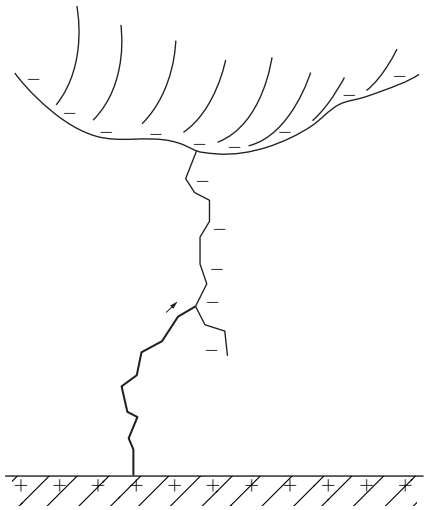


Figura 9-16. El rayo de retorno sube por el camino hecho por la guía.

de más arriba en la guía, las cuales a su vez se derraman, etc. Finalmente, toda la carga negativa de una parte de la nube se escapa a lo largo de la columna en un movimiento rápido y enérgico. Así pues, el rayo que *ven* corre *hacia arriba* desde el suelo, como se indica en la figura 9-16. De hecho, este rayo principal —de lejos la parte más brillante— se llama *rayo de retorno*. Lo anterior es el que produce la luz tan brillante y el calor, lo cual causa una expansión rápida del aire produciendo el trueno.

En el rayo, la corriente es de unos 10 000 amperios en el pico y transporta hacia abajo unos 20 coulombs.

Pero aún no hemos terminado. Después de un tiempo de unas pocas centésimas de segundo quizá, cuando el rayo de retorno ha desaparecido, baja otra guía. Pero esta vez sin pausas. Esta vez se llama "líder dardo" y hace todo el trayecto desde arriba hacia abajo de un tirón. Va a todo vapor exactamente por el mismo camino porque hay suficientes residuos allí como para que sea la ruta más fácil. La nueva guía también está llena de carga negativa. En el momento que toca el suelo —¡zing!— hay un rayo de retorno que sube derecho por el mismo camino. Ven entonces que el rayo "cae" una vez y otra y otra. A veces cae una o dos veces, a veces, cinco o 10 —en un caso se observó 42 veces por el mismo camino— pero siempre en rápida sucesión.

A veces las cosas se hacen aún más complicadas. Por ejemplo, la guía puede, después de una de sus pausas, ramificarse enviando *dos* escalones —ambos hacia el suelo pero en direcciones algo diferentes, como lo muestra la figura 9-15—. Lo que ocurre después depende de si una rama llega al suelo claramente antes que la otra. Si ocurre esto, el rayo brillante de retorno (de carga negativa que se derrama hacia el suelo) se abre camino *hacia arriba* a lo largo de la rama que toca el suelo y cuando llega al punto de ramificación y lo pasa en camino hacia la nube, aparece una descarga brillante por la otra rama *hacia abajo*. ¿Por qué? Porque está bajando la carga negativa y eso es lo que ilumina el rayo. Esta carga empieza a moverse al comienzo de la rama secundaria, vaciando trozos sucesivos cada vez más largos de la rama, de modo que el rayo brillante parece abrirse camino hacia abajo por esa rama, al mismo tiempo que sube hacia la nube. Pero, si ocurre que una de estas ramas adicionales de la guía ha llegado al suelo casi simultáneamente con la guía original, puede suceder a veces que el líder dardo del segundo rayo tome la segunda rama. Entonces verán el primer relámpago principal en un lugar y el segundo relámpago en otro. Ésta es una variante de la idea originaria.

Además nuestra descripción es sobresimplificada para la región muy cercana al suelo. Cuando la guía escalonada llega más o menos a un centenar de metros del suelo, hay evidencia de que sube una descarga desde el suelo para encontrarla. Es posible que el campo se haga lo suficientemente intenso como para que ocurra un efluvio eléctrico. Por ejemplo, si hay un objeto puntiagudo, como un edificio con una punta en el techo, cuando la guía se acerca los campos son tan grandes que se inicia una descarga desde la punta, la cual sube hasta la guía. El rayo tiende a caer en esa punta.

Aparentemente se ha sabido desde hace mucho tiempo que los rayos caen en los objetos altos. Hay una cita de Artabano, el consejero de Jerjes, que recomienda a su amo sobre un ataque previsto a los griegos —durante la campaña de Jerjes para poner todo el mundo conocido bajo el control de los persas—. Artabano decía: "Ved cómo Dios con sus rayos siempre hiere a los animales mayores y no les permite su insolencia, mientras que los de menor porte no lo irritan. Y en forma similar sus rayos caen siempre sobre las casas más altas y los árboles más altos". Luego explica la razón: "Por tanto, claramente, él tiende a empequeñecer todo lo que se enaltece".

¿Creen ustedes —ahora que tienen una relación verdadera de los rayos que caen sobre los árboles altos— que tienen mayor sabiduría que Artabano hace 2 400 años para aconsejar reyes sobre cuestiones militares? No se enaltezcan. Sólo podrían hacerlo menos poéticamente.

10

Dieléctricos

10-1 La constante dieléctrica
10-2 El vector de polarización P
10-3 Las cargas de polarización
10-4 Las ecuaciones electrostáticas en presencia de dieléctricos
10-5 Los campos y las fuerzas en presencia de dieléctricos

10-1 La constante dieléctrica

Comenzamos a discutir aquí otra de las propiedades peculiares de la materia bajo la influencia del campo eléctrico. En un capítulo anterior consideramos el proceder de los *conductores*, en los cuales las cargas se mueven libremente como respuesta a un campo eléctrico a tal punto que no hay ningún campo en el interior de un conductor. Discutiremos ahora los *aisladores*, materiales que no conducen la electricidad. A primera vista se creería que no tendría que haber ningún efecto. No obstante, utilizando un simple electroscopio y un capacitor de placas paralelas, Faraday descubrió que no era así. Sus experimentos muestran que la capacitancia de ese capacitor *aumenta* cuando se coloca un aislador entre las placas. Si el aislador llena completamente el espacio entre las placas, la capacitancia aumenta en un factor κ que depende solamente de la naturaleza del material aislador. Los materiales aisladores se llaman *dieléctricos*; el factor κ es, entonces, una propiedad del dieléctrico y se llama *constante dieléctrica*. La constante dieléctrica del vacío es, por supuesto, la unidad.

Nuestro problema consiste en explicar por qué se produce un efecto eléctrico si los aisladores son efectivamente aislantes y no conductores de la electricidad. Comenzaremos con el hecho experimental de que la capacitancia aumenta y trataremos de comprender por qué sucede esto. Consideremos un capacitor de placas paralelas con algunas cargas transportadas por las superficies de los conductores, digamos cargas negativas en la placa superior y positivas en la inferior. Supongamos que el espaciamiento entre las placas sea d y que la superficie de cada placa sea A. Como hemos demostrado anteriormente la capacitancia es:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}, \tag{10.1}$$

y la carga y el voltaje en el capacitor están relacionados por

$$Q = CV. \tag{10.2}$$

Ahora bien, el hecho experimental es que si colocamos un trozo de material aislador como lucita o vidrio entre las placas, encontramos que la capacitancia es mayor. Esto significa, por supuesto, que el voltaje es menor para la misma carga. Pero la diferencia de potencial es la integral del campo eléctrico a través del capacitor; podemos concluir así que dentro del capacitor el campo eléctrico disminuye aunque las cargas sobre las placas no cambien.

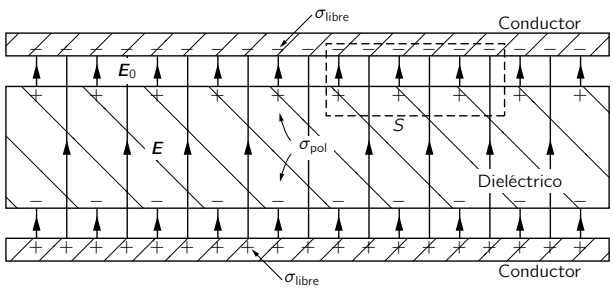


Figura 10-1. Capacitor de placas paralelas con un dieléctrico. Se muestran las líneas de E.

¿Cómo puede ser eso? Tenemos una ley de Gauss que dice que el flujo de un campo eléctrico está relacionado directamente con la carga encerrada.

Consideremos la superficie gaussiana S que se muestra con líneas punteadas en la figura 10-1. Como el campo eléctrico disminuye cuando se coloca el dieléctrico, concluimos que la carga neta dentro de la superficie debe ser menor que cuando no se encuentra colocado el dieléctrico. Hay una sola conclusión posible: debe haber cargas positivas en la superficie del dieléctrico. Como el campo ha disminuido pero no es nulo, debemos esperar que la carga positiva sea menor que la negativa en el conductor. Así, pues, el fenómeno puede ser explicado si podemos comprender, de algún modo, por qué cuando un material dieléctrico se coloca en un campo eléctrico hay cargas positivas inducidas sobre una superficie y negativas inducidas sobre la otra.

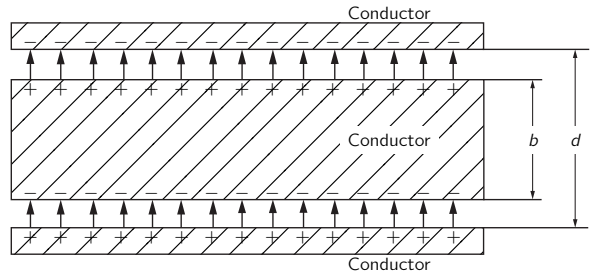


Figura 10-2. Si colocamos una lámina conductora en el interior de un capacitor de placas paralelas, las cargas inducidas anulan el campo en el conductor.

Podemos observar lo que sucede para un conductor. Por ejemplo, supongamos que tenemos un capacitor con un espaciamiento d entre placas y que colocamos entre sus placas un conductor neutro cuyo espesor es b, como en la figura 10-2. El campo eléctrico induce una carga positiva en la superficie superior y otra negativa en la inferior, de tal manera que no hay campo en el interior del conductor. El campo en el resto del espacio es el mismo que si no hubiera conductor puesto que es igual a la densidad de carga dividida entre ϵ_0; pero la distancia sobre la que debemos integrar para obtener el voltaje (la diferencia de potencial) ha disminuido. El voltaje es:

$$V = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\,(d - b).$$

La ecuación resultante para la capacitancia es parecida a la ecuación (10.1) con $(d - b)$ en vez de d:

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d[1 - (b/d)]}. \tag{10.3}$$

La capacitancia ha aumentado en un factor que depende de (b/d), o sea, la fracción del volumen que ha sido ocupado por el conductor.

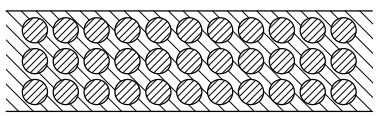


Figura 10-3. Modelo de dieléctrico: pequeñas esferas conductoras en el seno de un aislador ideal.

Lo anterior da por resultado un modelo evidente para lo que sucede con los dieléctricos —que en el interior del material dieléctrico hay muchas hojas pequeñas de material conductor—. Lo incómodo de este modelo es que tiene un eje particular, el eje normal a las hojas, y la mayoría de los dieléctricos no tienen tal eje. Sin embargo, esta dificultad se puede eliminar si suponemos que todos los materiales aisladores contienen pequeñas esferas conductoras separadas unas de otras por el aislador, como lo muestra la figura 10-3. El fenómeno de la constante dieléctrica se explica por el efecto de las cargas que pueden ser inducidas sobre cada esfera. Éste es uno de los primeros modelos físicos para dieléctricos usado para explicar el fenómeno observado por Faraday. Más específicamente, el modelo suponía que cada uno de los átomos del material es un conductor perfecto pero aislado de los otros. La constante dieléctrica κ dependería de la fracción del espacio que está ocupada por las esferas conductoras. No es éste, por supuesto, el modelo utilizado actualmente.

10-2 El vector de polarización P

Si continuamos con el análisis anterior encontramos que la idea de regiones de conductividad perfecta y aisladas no es esencial. Cada una de las esferas

actúa como un dipolo en el momento en que es inducida por el campo exterior. Lo único esencial para comprender los dieléctricos es que tienen muchos dipolos pequeños inducidos en el material. No importa que los dipolos estén inducidos porque hay minúsculas esferas conductoras o por cualquier otra razón.

¿Por qué un campo inducirá un momento dipolar en un átomo si el átomo no es una esfera conductora? Este problema será discutido en mayor detalle en el capítulo próximo que tratará de la estructura interna de los materiales dieléctricos. No obstante, daremos aquí un ejemplo para ilustrar un mecanismo posible. Un átomo tiene una carga positiva en el núcleo, el cual está rodeado de electrones negativos. En un campo eléctrico el núcleo será atraído en un sentido y los electrones en el otro. Las órbitas de los electrones o sus diagramas de ondas (o toda otra imagen que se utilice en mecánica cuántica) se deformarán como se muestra en la figura 10-4; el centro de gravedad de la carga negativa se desplazará y no coincidirá más con la carga positiva del núcleo. Hemos discutido ya una distribución de cargas como ésta. Si observamos un poco, esa configuración neutra es equivalente, en primera aproximación, a un pequeño dipolo.

Parece razonable que si el campo no es muy grande, el valor del momento dipolar inducido deba ser proporcional al campo. Esto significa que un campo pequeño desplazará poco las cargas y un campo grande producirá un desplazamiento mayor —y en proporción al campo— a menos que el desplazamiento sea muy grande. En lo que resta de este capítulo supondremos que el momento dipolar es directamente proporcional al campo.

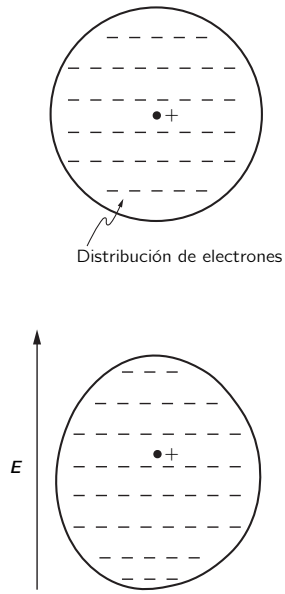


Figura 10-4. La distribución de los electrones de un átomo ubicado en un campo eléctrico está desplazada respecto al núcleo.

Supondremos ahora que en cada átomo hay cargas q separadas por una distancia $\boldsymbol{\delta}$, de manera que $q\boldsymbol{\delta}$ es el momento dipolar por átomo (usamos $\boldsymbol{\delta}$ porque ya hemos usado d para la separación de las placas). Si hay N átomos por unidad de volumen habrá un *momento dipolar por unidad de volumen* igual a $Nq\boldsymbol{\delta}$. Este momento dipolar por unidad de volumen será representado por un vector $\boldsymbol{P}$. Es útil decir que tendrá la dirección de los momentums dipolares individuales, es decir, estará en la dirección de la separación $\boldsymbol{\delta}$ de las cargas:

$$\boldsymbol{P} = Nq\boldsymbol{\delta}. \tag{10.4}$$

En general $\boldsymbol{P}$ variará de lugar a lugar en el dieléctrico. Sin embargo, en cualquier punto del material, $\boldsymbol{P}$ es proporcional al campo eléctrico $\boldsymbol{E}$. Así pues, la constante de proporcionalidad, que depende de la facilidad con que los electrones son desplazados, dependerá de la clase de átomos que constituyen en el material.

Lo que determina realmente el comportamiento de esta constante de proporcionalidad, hasta qué punto es constante para campos grandes y qué es lo que sucede en el interior de diferentes materiales será discutido más adelante. Por el momento supondremos simplemente que existe un momento dipolar que es proporcional al campo eléctrico.

10-3 Las cargas de polarización

Veamos qué es lo que aporta este modelo a la teoría de los condensadores con dieléctrico. Primero consideremos una hoja de material en el cual haya cierto momento dipolar por unidad de volumen. ¿Habrá en promedio alguna densidad de carga producida por él? Si $\boldsymbol{P}$ es uniforme, no. Si las cargas positivas y negativas se desplazan unas respecto a otras tendremos la misma densidad promedio; el hecho de que sean desplazadas no produce ninguna carga neta dentro del volumen. Por otra parte, si $\boldsymbol{P}$ fuera mayor en un lugar y menor en otro representaría que en una región entrarían más cargas de las que salen y se esperaría que resultara una densidad de carga de volumen. Además, para el condensador de placas paralelas suponemos que $\boldsymbol{P}$ es uniforme de manera que necesitamos solamente ver qué sucede en la superficie. En una de las superficies las cargas negativas, los electrones, se han movido efectivamente a una distancia δ hacia afuera; en la otra superficie hacia adentro, dejando una carga negativa efectiva en el exterior a una distancia δ. Como se muestra en la figura 10-5, tendremos una densidad de carga de superficie que llamaremos *carga de polarización* de superficie.

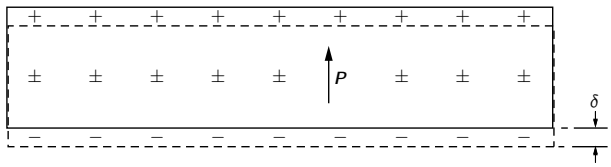


Figura 10-5. Una placa dieléctrica en un campo uniforme. Las cargas positivas se desplazan una distancia δ con respecto a las negativas.

Esta carga se puede calcular como sigue. Si A es la superficie de la placa, entonces el número de electrones que aparece en la superficie es el producto de A por N, el número por unidad de volumen y por el desplazamiento δ, que aquí suponemos es perpendicular a la superficie. La carga total se obtiene multiplicando por la carga electrónica q_e. Para obtener la densidad superficial de la carga de polarización aducida sobre la superficie dividimos entre A. El valor de la densidad de carga superficial es:

$$\sigma_{\text{pol}} = N q_e \delta.$$

Pero esto es precisamente igual al módulo P del vector de polarización $\boldsymbol{P}$, ecuación (10.4):

$$\sigma_{\text{pol}} = P. \tag{10.5}$$

Además, la densidad superficial de carga es igual a la polarización dentro del material. La carga superficial es, por supuesto, positiva sobre una superficie y negativa sobre la otra.

Supongamos ahora que nuestra hoja es el dieléctrico de un capacitor plano. Las *placas* del capacitor tienen igualmente carga superficial, que llamaremos σ_{lib}, porque se pueden mover "libremente" en cualquier lugar del conductor. Por supuesto, ésta es la carga que aportamos cuando cargamos el capacitor. Es necesario recalcar que σ_{pol} existe sólo debido a σ_{lib}. Si se elimina σ_{lib} por descarga del capacitor, σ_{pol} desaparecerá, no porque salga por el alambre de descarga sino porque retorna dentro del material —por la relajación de la polarización dentro del material—.

Podemos ahora aplicar la ley de Gauss a la superficie gaussiana S de la figura 10-1. El campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ en el dieléctrico es igual a la densidad *total* de carga superficial dividida entre ϵ_0. Es evidente que σ_{pol} y σ_{lib} tienen signos opuestos, entonces

$$E = \frac{\sigma_{\text{lib}} - \sigma_{\text{pol}}}{\epsilon_0}. \tag{10.6}$$

Notemos que el campo E_0 entre las placas de metal y la superficie del dieléctrico es mayor que el campo E; corresponde a σ_{lib} sola. Sin embargo, aquí estamos interesados en el campo dentro del dieléctrico el cual, si el dieléctrico llena casi todo el espacio en medio de las placas, es el campo en aproximadamente todo el volumen. Usando la ecuación (10.5) podemos escribir

$$E = \frac{\sigma_{\text{lib}} - P}{\epsilon_0}. \tag{10.7}$$

Esta ecuación no nos dice cuál es el campo eléctrico, salvo si conocemos P. Aquí, sin embargo, estamos suponiendo que P depende de E —en efecto, es proporcional a E—. Esta proporcionalidad se escribe normalmente en la forma

$$\boldsymbol{P} = \chi \epsilon_0 \boldsymbol{E}. \tag{10.8}$$

La constante χ (letra griega "ji") se llama *susceptibilidad eléctrica* del dieléctrico.

Entonces la ecuación (10.7) se transforma en

$$E = \frac{\sigma_{\text{lib}}}{\epsilon_0} \frac{1}{(1+\chi)}, \tag{10.9}$$

que nos da el factor $1/(1+\chi)$ por el cual se reduce el campo.

El voltaje entre las placas es la integral del campo eléctrico. Como el campo es uniforme, la integral es precisamente el producto de E por la separación de las placas d. Tenemos que

$$V = Ed = \frac{\sigma_{\text{lib}} d}{\epsilon_0(1+\chi)}.$$

La carga total sobre el condensador es $\sigma_{\text{lib}} A$, de manera que la capacitancia definida por (10.2) es

$$C = \frac{\epsilon_0 A(1+\chi)}{d} = \frac{\kappa\epsilon_0 A}{d}. \tag{10.10}$$

Hemos explicado los hechos observados. Cuando un capacitor de placas paralelas se llena con un dieléctrico, la capacitancia aumenta en el factor

$$\kappa = 1 + \chi, \tag{10.11}$$

que es una propiedad del material. Por supuesto, nuestra explicación no es completa pues no hemos explicado —como lo haremos más adelante— cómo se produce la polarización atómica.

Vamos a considerar ahora un ejemplo más complicado —el caso en que la polarización $\boldsymbol{P}$ no es la misma en todas partes—. Como mencionamos anteriormente, si la polarización no es constante es de esperar que encontremos, en general, una densidad de carga en el volumen, puesto que pueden entrar más cargas por un lado del pequeño elemento de volumen que las que lo dejan por el otro. ¿Cómo podemos encontrar cuánta carga se gana o se pierde en un pequeño volumen?

Primero calculemos cuánta carga se mueve a través de una superficie imaginaria cuando se polariza el material. La cantidad de cargas que atraviesa una superficie es precisamente P por el área de la superficie, si la polarización es *normal* a la superficie. Por supuesto, si la polarización es *tangencial* a la superficie no se mueven cargas a través de ella.

Siguiendo el mismo razonamiento que ya hemos utilizado es fácil ver que la carga que se mueve a través de cualquier elemento de superficie es proporcional a la *componente* de $\boldsymbol{P}$ *perpendicular* a la superficie. Comparemos la figura 10-6 con la 10-5. Vemos que la ecuación (10.5) debe escribirse, en el caso general,

$$\sigma_{\text{pol}} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n}. \tag{10.12}$$

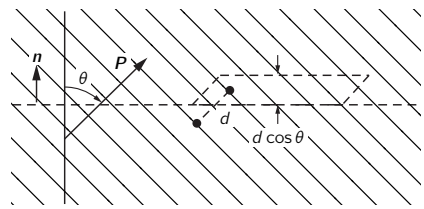


Figura 10-6. La carga que atraviesa un elemento de superficie imaginaria en un dieléctrico es proporcional a la componente de $\boldsymbol{P}$ normal a la superficie.

Si consideramos un elemento de superficie imaginario *dentro* del dieléctrico, la ecuación (10.12) da la carga que se mueve a través de la superficie, pero no hay una carga superficial neta porque hay contribuciones iguales y opuestas del dieléctrico en los dos lados de la superficie.

El desplazamiento de las cargas puede producir, sin embargo, una densidad de carga de *volumen*. La carga total desplazada *fuera* de cualquier volumen V por la polarización es la integral de la componente normal saliente de $\boldsymbol{P}$ sobre la superficie S que limita el volumen (véase figura 10-7). Un exceso de cargas iguales y de signo opuesto se deja atrás. Llamando ΔQ_{pol} a la carga neta dentro de V, escribimos

$$\Delta Q_{\text{pol}} = -\int_S \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n}\, da. \tag{10.13}$$

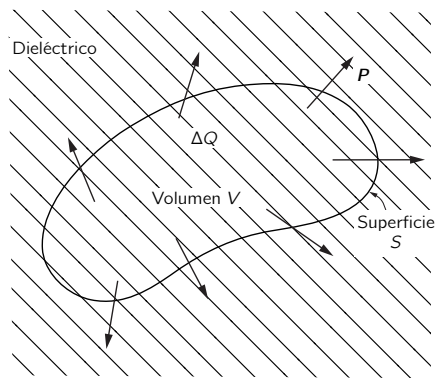


Figura 10-7. De una polarización $\boldsymbol{P}$ no uniforme puede resultar una carga neta en el cuerpo de un dieléctrico.

Podemos atribuir ΔQ_{pol} a una distribución de cargas de volumen con la densidad ρ_{pol} y entonces

$$\Delta Q_{\text{pol}} = \int_V \rho_{\text{pol}}\, dV. \tag{10.14}$$

Combinando las dos ecuaciones llegamos a

$$\int_V \rho_{\text{pol}}\, dV = -\int_S \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n}\, da. \tag{10.15}$$

Obtenemos una clase especial de teorema gaussiano que relaciona la densidad de carga del material polarizado con el vector de polarización $\boldsymbol{P}$. Podemos ver

que esto está de acuerdo con el resultado que habíamos obtenido para la carga de polarización superficial del dieléctrico en un capacitor de placas paralelas. Utilizando la ecuación (10.15) con la superficie gaussiana de la figura 10-1, la integral de superficie da $P\,\Delta A$, la carga en el interior es $\sigma_{\text{pol}}\,\Delta A$, y obtenemos nuevamente que $\sigma_{\text{pol}} = P$.

Como lo hicimos con la ley de Gauss en electrostática, podemos convertir la ecuación (10.15) a una forma diferencial —utilizando el teorema matemático de Gauss—:

$$\int_S \boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}\,da = \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P}\,dV.$$

Obtenemos

$$\rho_{\text{pol}} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P}. \tag{10.16}$$

Si existe una polarización no uniforme, su divergencia da como resultado la densidad neta de carga que aparece en el material. Ésta es una densidad de carga perfectamente *real*; la llamamos la "carga de polarización" solamente para recordar la forma en que aparece.

10-4 Las ecuaciones electrostáticas en presencia de dieléctricos

Vamos a combinar ahora los resultados anteriores con nuestra teoría de la electrostática. La ecuación fundamental es

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{10.17}$$

Aquí ρ es la densidad de *todas* las cargas eléctricas. Como no es fácil seguirles la pista a las cargas de polarización, es conveniente separar ρ en dos partes. Nuevamente llamamos ρ_{pol} a las cargas debidas a una polarización no uniforme y ρ_{lib} a las restantes. Comúnmente ρ_{lib} es la carga que ponemos sobre los conductores o en un lugar conocido del espacio. La ecuación (10.17) se transforma ahora en

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho_{\text{lib}}+\rho_{\text{pol}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{lib}}-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P}}{\epsilon_0}$$

o sea

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{P}}{\epsilon_0}\right) = \frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon_0}. \tag{10.18}$$

Por supuesto, la ecuación para el rotacional de $\boldsymbol{E}$ no cambia:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = 0. \tag{10.19}$$

Tomando $\boldsymbol{P}$ de la ecuación (10.8) obtenemos la ecuación más simple

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot[(1+\chi)\boldsymbol{E}] = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\kappa\boldsymbol{E}) = \frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon_0}. \tag{10.20}$$

Éstas son las ecuaciones de la electrostática cuando hay dieléctricos. Ellas no nos dicen, por supuesto, nada nuevo, pero están en una forma que es más conveniente para el cálculo en el caso en que se conoce ρ_{lib} y la polarización $\boldsymbol{P}$ es proporcional a $\boldsymbol{E}$.

Observen que no hemos sacado la "constante" dieléctrica κ fuera de la divergencia. Esto se debe a que puede que no sea la misma en todas partes. Si tiene el mismo valor en todas partes puede ser sacada fuera como factor y las ecuaciones son entonces las de la electrostática con la densidad de carga ρ_{lib}, dividida entre κ. En la forma que les hemos dado, las ecuaciones se aplican al caso general donde diferentes dieléctricos pueden estar en distintos lugares del campo. Entonces las ecuaciones pueden ser muy difíciles de resolver.

Un tema de cierta importancia histórica se debe mencionar aquí. En los primeros tiempos de la electricidad, el mecanismo atómico de la polarización no

se conocía y la existencia de ρ_{pol} no se apreciaba. Se consideraba que la carga ρ_{lib} era el total de la densidad de carga. A fin de escribir las ecuaciones de Maxwell en una forma simple, se definió un nuevo vector $\boldsymbol{D}$ igual a la combinación lineal de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{P}$:

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}. \tag{10.21}$$

Como resultado de esto las ecuaciones (10.18) y (10.19) se escribieron en una forma aparentemente simple:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \rho_{\text{lib}}, \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0. \tag{10.22}$$

¿Podemos resolverlas? Solamente si se da una tercera ecuación para establecer una relación entre $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{E}$. Cuando vale la ecuación (10.8) esta relación es

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0(1 + \chi)\boldsymbol{E} = \kappa\epsilon_0 \boldsymbol{E}. \tag{10.23}$$

Esta ecuación se escribe normalmente

$$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}, \tag{10.24}$$

donde ϵ es ahora otra constante para describir la propiedad dieléctrica de los materiales. Se llama la "permitividad" (se dan cuenta ahora por qué tenemos ϵ_0, en nuestras ecuaciones, esto es, la "permitividad del espacio vacío"). Evidentemente

$$\epsilon = \kappa\epsilon_0 = (1 + \chi)\epsilon_0. \tag{10.25}$$

Actualmente consideramos estas propiedades desde otro punto de vista, esto es, que tenemos ecuaciones muy simples en el vacío y que si especificamos en cada caso todas las cargas, cualquiera sea su origen, las ecuaciones son siempre correctas. Si separamos algunas de las cargas por conveniencia o porque no deseamos realizar una discusión detallada, podemos, si lo deseamos, escribir nuestras ecuaciones en una forma más conveniente.

Debemos hacer resaltar otro punto. Una ecuación como $\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}$ es un intento de describir una propiedad de la materia. Pero la materia es extremadamente complicada y esa ecuación no es en realidad correcta. Por ejemplo, si $\boldsymbol{E}$ es muy grande, $\boldsymbol{D}$ no es proporcional a $\boldsymbol{E}$. Para algunas sustancias la proporcionalidad se rompe aun para campos pequeños. La "constante" de proporcionalidad también puede depender de la rapidez con que $\boldsymbol{E}$ cambie con el tiempo. No obstante, esta clase de ecuaciones son un tipo de aproximación, como la ley de Hooke. No pueden ser ecuaciones fundamentales y profundas. Por otra parte, nuestras ecuaciones fundamentales para $\boldsymbol{E}$, (10.17) y (10.19), representan nuestro conocimiento más completo y profundo de la electrostática.

10-5 Los campos y las fuerzas en presencia de dieléctricos

Demostraremos ahora algunos teoremas muy generales de la electrostática en situaciones en las cuales hay dieléctricos presentes. Hemos visto que la capacitancia de un capacitor de placas paralelas aumenta en un factor definido si se lo llena con un dieléctrico. Podemos demostrar que esto es cierto para un condensador de *cualquier* forma, a condición de que toda la región vecina a los dos conductores sea llenada con un dieléctrico lineal y uniforme. Sin dieléctrico las ecuaciones a resolver son

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}_0 = \frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon_0} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}_0 = 0.$$

Cuando el dieléctrico está presente, la primera de estas ecuaciones se modifica y tenemos en cambio las ecuaciones

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\kappa \boldsymbol{E}) = \frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon_0} \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0. \tag{10.26}$$

Como estamos considerando que κ es el mismo para todo punto, las dos últimas ecuaciones se pueden escribir como

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\kappa\boldsymbol{E})=\frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon_0}\qquad\text{y}\qquad\boldsymbol{\nabla}\times(\kappa\boldsymbol{E})=0. \tag{10.27}$$

Tenemos en consecuencia para $\kappa\boldsymbol{E}$ las mismas ecuaciones que para $\boldsymbol{E}_0$ por lo que tenemos la solución $\kappa\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_0$. En otras palabras, el campo es menor en todas partes en un factor $1/\kappa$ que en el caso sin dieléctrico. Como el voltaje es una integral de línea del campo, el voltaje disminuye en el mismo factor. Como la carga en los electrodos del condensador ha sido tomada la misma en ambos casos, la ecuación (10.2) nos dice que la capacitancia en el caso de un dieléctrico uniforme en todas partes ha aumentado en el factor κ.

Busquemos ahora cuál será la *fuerza* existente entre los dos conductores cargados en un dieléctrico. Consideremos un dieléctrico líquido que es homogéneo en todo punto. Hemos visto antes que un camino para obtener la fuerza es el de derivar la energía respecto a la distancia apropiada. Si los conductores tienen cargas iguales y opuestas, la energía es $U=Q^2/2C$, donde C es su capacitancia. Usando el principio de los trabajos virtuales, cualquier componente se obtiene por derivación, por ejemplo

$$F_x=-\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{Q^2}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{C}\right). \tag{10.28}$$

Como el dieléctrico aumenta la capacidad en un factor κ, todas las fuerzas deben *disminuir* en el mismo factor.

Debemos recalcar algo. Lo que hemos dicho es válido sólo si el dieléctrico es un líquido. Cualquier movimiento de los conductores dentro de un dieléctrico sólido cambia las condiciones de tensión mecánica del dieléctrico y altera sus propiedades eléctricas, produciendo cambios en la energía mecánica del dieléctrico. En cambio, si se mueven los conductores en un líquido, éste no se altera. El líquido se mueve hacia un lugar, pero las características eléctricas no cambian.

Muchos libros viejos de electricidad dicen que la ley "fundamental" para la fuerza entre dos cargas es

$$F=\frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0\kappa r^2}, \tag{10.29}$$

un punto de vista completamente insatisfactorio. Primero, esta ley no es válida en general; solamente es válida para un mundo lleno de líquido. En segundo lugar, depende del hecho de que κ sea una constante, lo cual es aproximadamente cierto para la mayor parte de los materiales reales. Es mucho mejor partir de la ley de Coulomb para las cargas en el *vacío*, que es siempre válida (para cargas estáticas).

¿Qué sucede en un sólido? Éste es un problema muy difícil que no ha sido resuelto, porque en cierto sentido, está indeterminado. Si colocan cargas dentro de un dieléctrico sólido, hay muchas clases de presiones y tensiones. No pueden tratar los trabajos virtuales sin hacer intervenir también la energía mecánica necesaria para comprimir el sólido, y es un problema difícil, generalmente hablando, el poder hacer una distinción unívoca entre fuerzas eléctricas y mecánicas debidas al material sólido. Afortunadamente no se ha necesitado nunca conocer realmente la respuesta al problema planteado. Puede que a veces se quiera saber cuál es la tensión que va a haber en un sólido, la cual se puede calcular. Pero es mucho más complicado que el resultado simple que obtuvimos para los líquidos.

En la teoría de dieléctricos un problema sorprendentemente complicado es el siguiente: ¿por qué un objeto cargado capta pequeños trozos de dieléctrico? Cuando se peinan el cabello en un día seco, el peine es capaz de levantar fragmentos pequeños de papel. Si reflexionan respecto a este problema, probablemente supongan que el peine tiene alguna carga y que el papel posee la carga opuesta. Pero el papel inicialmente es neutro. No posee ninguna carga neta y, sin embargo, es atraído. También es cierto que el papel a veces se aproxima al peine pero luego se aparta, es repelido inmediatamente después de tocar el peine. La razón

es, por supuesto, que cuando el papel toca al peine capta algunas de las cargas negativas y que luego las cargas negativas se repelen. Pero no hay respuesta para la pregunta original, ¿por qué el papel es atraído por el peine en primer lugar?

La respuesta tiene que ver con la polarización del dieléctrico cuando se lo ubica en un campo eléctrico. Hay cargas de polarización de ambos signos que son atraídas y repelidas por el peine. Hay una atracción neta, sin embargo, debida a que el campo cerca del peine es mayor que lejos de él —el peine no es una hoja infinita—. Su carga está localizada. Un trozo neutro de papel no será atraído por ninguna de las placas dentro de un condensador de placas paralelas. La variación del campo es una parte esencial en el mecanismo de atracción.

Como lo muestra la figura 10-8, un dieléctrico siempre es arrastrado desde una región de campo débil hacia una región de campo más fuerte. En efecto, podemos comprobar que para pequeños objetos la fuerza es proporcional al gradiente del *cuadrado* del campo eléctrico. ¿Por qué depende del cuadrado del campo? Porque la carga de polarización inducida es proporcional al campo y para las cargas dadas las fuerzas son proporcionales al campo. Sin embargo, como lo hemos indicado, puede haber una fuerza *resultante* solamente si el cuadrado del campo cambia de un punto a otro. Entonces la fuerza es proporcional al gradiente del cuadrado del campo. La constante de proporcionalidad contiene, entre otras cosas, la constante dieléctrica del objeto, y depende también del tamaño y forma del objeto.

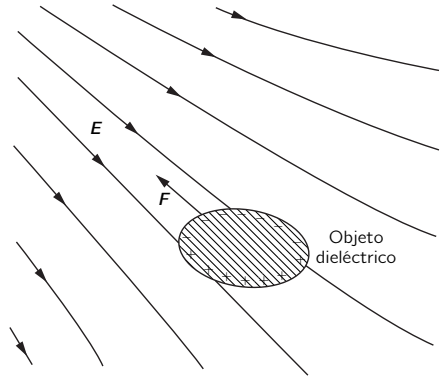


Figura 10-8. Un objeto dieléctrico en un campo no uniforme sufre una fuerza dirigida hacia la región donde el campo es mayor.

Hay un problema relacionado con esto en el que la fuerza sobre un dieléctrico puede ser calculada de una manera muy precisa. Si tenemos un capacitor de placas paralelas con una lámina dieléctrica sólo parcialmente introducida en él, como muestra la figura 10-9, habrá una fuerza que empuja la lámina hacia adentro. Un examen detallado de la fuerza es muy complicado; está relacionado con la falta de uniformidad del campo cercano a los bordes del dieléctrico y de las placas. Pero si no observamos el problema en detalle sino que utilizamos simplemente el principio de conservación de la energía podemos calcular fácilmente la fuerza. Podemos encontrar la fuerza a partir de la fórmula que demostramos anteriormente. La ecuación (10.28) es equivalente a

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = +\frac{V^2}{2}\frac{\partial C}{\partial x}. \tag{10.30}$$

Necesitamos encontrar solamente cómo varía la capacitancia con la posición de la lámina dieléctrica.

Supongamos que la longitud total de las placas es L, que el ancho es W, que la separación entre las placas y el espesor del dieléctrico sea d y que la distancia en que ha sido insertado el dieléctrico sea x. La capacitancia es el cociente entre la carga libre total sobre las placas y el voltaje entre las placas. Anteriormente habíamos visto que para un voltaje dado V la densidad superficial de carga de las cargas libres es $\kappa\epsilon_0 V/d$. Entonces la carga total sobre las placas es

$$Q = \frac{\kappa\epsilon_0 V}{d}\,xW + \frac{\epsilon_0 V}{d}\,(L-x)W,$$

de la cual obtenemos la capacitancia:

$$C = \frac{\epsilon_0 W}{d}\,(\kappa x + L - x). \tag{10.31}$$

Utilizando (10.30), tenemos

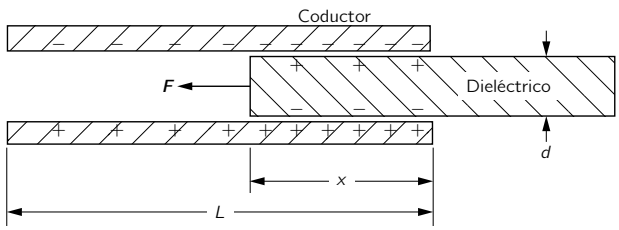


Figura 10-9. La fuerza sobre una hoja dieléctrica ubicada en un capacitor de placas paralelas se puede calcular aplicando el principio de conservación de la energía.

$$F_x = \frac{V^2}{2}\,\frac{\epsilon_0 W}{d}\,(\kappa - 1). \tag{10.32}$$

Ahora bien, estas ecuaciones no son particularmente útiles para nada salvo que se necesite conocer la fuerza en tales circunstancias. Deseábamos solamente demostrar que la teoría de la energía se puede usar frecuentemente para evitar enormes complicaciones cuando se calculan las fuerzas sobre materiales dieléctricos —como las habría en el caso presente—.

Nuestra discusión de la teoría de dieléctricos tiene relación sólo con los fenómenos eléctricos, aceptando el hecho de que el material tiene una polarización que es proporcional al campo eléctrico. El porqué de la existencia de esa proporcionalidad es quizá de mayor interés para los físicos. Una vez que comprendamos el origen de las constantes dieléctricas desde un punto de vista atómico, podremos usar mediciones eléctricas de las constantes dieléctricas en diversas circunstancias a fin de obtener información detallada de la estructura atómica y molecular. Este aspecto del problema será tratado en parte en el próximo capítulo.

11

Dentro de los dieléctricos

11-1 Los dipolo molecular
11-2 La polarización electrónica
11-3 Las moléculas polares. Polarización de orientación
11-4 Los campos eléctricos en cavidades de un dieléctrico
11-5 La constante dieléctrica de líquidos; la ecuación de Clausius-Mossotti
11-6 Los dieléctricos sólidos
11-7 Ferroelectricidad; el $BaTiO_3$

11-1 Los dipolo molecular

En este capítulo vamos a discutir por qué los materiales son dieléctricos. En el capítulo anterior estudiamos las propiedades de los sistemas eléctricos con dieléctricos, una vez que notamos que si se aplica un campo eléctrico a un dieléctrico, induce un momento dipolar sobre los átomos. Específicamente, si el campo eléctrico E induce un momento dipolar promedio P, por unidad de volumen, la constante dieléctrica κ está dada por:

$$\kappa - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E}. \tag{11.1}$$

Hemos discutido cómo se usa esta ecuación; ahora queremos discutir el mecanismo por el cual se produce polarización cuando existe un campo eléctrico dentro de un material. Empezaremos con el ejemplo más simple —la polarización de gases—. Pero aun los gases ya tienen complicaciones: hay dos tipos. Las moléculas de algunos gases, como el oxígeno, que tiene pares simétricos de átomos en cada molécula, no tienen momento dipolar intrínseco. Pero las moléculas de otros, como el vapor de agua (el cual tiene un arreglo no simétrico de átomos de hidrógeno y oxígeno) trae consigo un momento dipolar permanente. Como señalamos en el capítulo 6, existe en las moléculas de vapor de agua una carga positiva promedio en el átomo de hidrógeno y una carga negativa en el de oxígeno. Como el centro de gravedad de la carga negativa y el centro de gravedad de la carga positiva no coinciden, la distribución de la carga total de las moléculas tiene un momento dipolar. Tal molécula se llama molécula *polar*. En el oxígeno, debido a la simetría de las moléculas, los centros de gravedad de las cargas positivas y negativas coinciden, por lo cual es una molécula *no polar*. No obstante, ésta se convierte en un dipolo cuando se la coloca en un campo eléctrico. Las formas de los dos tipos de moléculas están esbozadas en la figura 11-1.

11-2 La polarización electrónica

Primero discutiremos la polarización de moléculas no polares. Podemos empezar con el caso más simple de un gas monoatómico (helio, por ejemplo). Cuando un átomo de tal gas está en un campo eléctrico, los electrones son atraídos en un sentido por el campo eléctrico, mientras que el núcleo es atraído en el otro, como mostramos en la figura 10-4. Aunque los átomos son muy rígidos respecto a las fuerzas eléctricas que podemos aplicar experimentalmente, existe un ligero desplazamiento neto del centro de carga y se induce un momento dipolar. Para campos pequeños, la magnitud del desplazamiento, lo mismo que el momento dipolar, es proporcional al campo eléctrico. El desplazamiento de la distribución de electrones que produce esta clase de momento dipolar inducido se llama *polarización electrónica*.

Hemos discutido la influencia de un campo eléctrico sobre un átomo en el capítulo 31 del volumen I, cuando estudiamos la teoría del índice de refracción. Si lo piensan un momento observarán que debemos hacer ahora exactamente lo mismo que hicimos entonces. Ahora bien, ahora sólo necesitamos preocuparnos de campos que no varían con el tiempo, mientras que el índice de refracción dependía de campos variables con el tiempo.

Revisar
Volumen 1, capítulo 31,
El origen del índice de refracción
Volumen 1, capítulo 40,
Los principios de la mecánica estadística

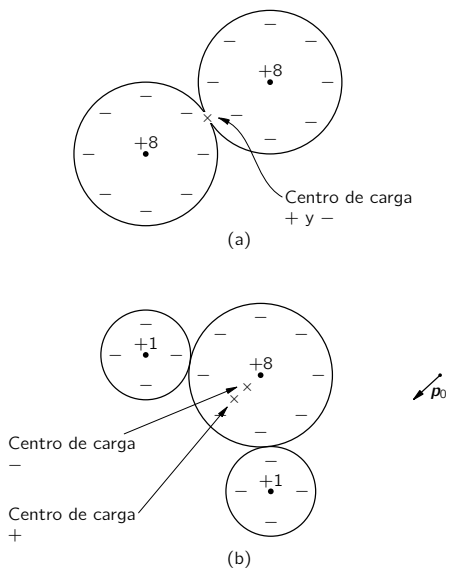


Figura 11-1. (a) Una molécula de oxígeno con momento dipolar cero. (b) La molécula de agua tiene un momento dipolar permanente $\boldsymbol{p}_0$.

En el capítulo 31 del volumen I, consideramos que cuando se coloca un átomo en un campo eléctrico oscilante, el centro de carga de los electrones satisface la ecuación siguiente:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + m\omega_0^2 x = q_e E. \tag{11.2}$$

El primer término es el producto de la masa del electrón por su aceleración y el segundo es la fuerza restauradora, mientras que el segundo miembro es la fuerza debido al campo eléctrico externo. Si el campo eléctrico varía con la frecuencia ω, entonces la ecuación (11.2) tiene la solución:

$$x = \frac{q_e E}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \tag{11.3}$$

la cual tiene una resonancia en $\omega = \omega_0$. Cuando obtuvimos esta solución anteriormente, la interpretamos diciendo que ω_0 era la frecuencia en la cual la luz (en la región óptica o ultravioleta, dependiendo del átomo) era absorbida. Para nuestros fines, sólo estamos interesados en el caso de campos constantes, es decir, para $\omega = 0$, así que podemos omitir el término de aceleración en (11.2) y encontramos que el desplazamiento es:

$$x = \frac{q_e E}{m\omega_0^2}. \tag{11.4}$$

De donde vemos que el momento dipolar p de un solo átomo es

$$p = q_e x = \frac{q_e^2 E}{m\omega_0^2}. \tag{11.5}$$

En esta teoría, el momento dipolar p es realmente proporcional al campo eléctrico.

Generalmente se escribe:

$$\boldsymbol{p} = \alpha\epsilon_0 \boldsymbol{E}. \tag{11.6}$$

(De nuevo se introduce la ϵ_0 por razones históricas.) La constante α se llama polarizabilidad del átomo y tiene las dimensiones de L^3. Es una medida de la facilidad de inducir un momento en un átomo, con un campo eléctrico. Comparando (11.5) con (11.6), nuestra teoría dice que:

$$\alpha = \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m\omega_0^2} = \frac{4\pi e^2}{m\omega_0^2}. \tag{11.7}$$

Si hay N átomos por unidad de volumen, la polarización P —el momento dipolar por unidad de volumen— está dada por:

$$\boldsymbol{P} = N\boldsymbol{p} = N\alpha\epsilon_0 \boldsymbol{E}. \tag{11.8}$$

Juntando (11.1) y (11.8) obtenemos

$$\kappa - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E} = N\alpha \tag{11.9}$$

o, usando (11.7),

$$\kappa - 1 = \frac{4\pi N e^2}{m\omega_0^2}. \tag{11.10}$$

De la ecuación (11.10) predeciríamos que la constante dieléctrica κ de gases diferentes debe depender de la densidad del gas y de la frecuencia ω_0 de su absorción óptica.

Nuestra fórmula es, por supuesto, solamente una aproximación muy burda, debido a que en la ecuación (11.2) tomamos un modelo que ignora las complicaciones de la mecánica cuántica. Por ejemplo, hemos supuesto que un átomo tiene tan sólo una frecuencia de resonancia, cuando realmente tiene muchas. Para calcular la polarizabilidad de átomos α, debemos usar la teoría cuántica completa, pero las ideas clásicas anteriores nos dan una estimación razonable.

Veamos si podemos obtener el orden de magnitud correcto para la constante dieléctrica de alguna sustancia. Tratemos el hidrógeno. Hemos estimado (capítulo 38, volumen I) que la energía necesaria para ionizar el átomo de hidrógeno sería aproximadamente:

$$E \approx \frac{1}{2}\,\frac{me^4}{\hbar^2}. \tag{11.11}$$

Para estimar la frecuencia natural ω_0, podemos hacer esta energía igual a $\hbar\omega_0$ —la energía de un oscilador atómico cuya frecuencia natural es ω_0—. Obtenemos:

$$\omega_0 \approx \frac{1}{2}\,\frac{me^4}{\hbar^3}.$$

Si ahora usamos este valor de ω_0 en la ecuación (11.7) encontramos para la polarizabilidad electrónica:

$$\alpha \approx 16\pi\left[\frac{\hbar^2}{me^2}\right]^3. \tag{11.12}$$

La cantidad $\hbar^2/me^2$ es el radio de la órbita del estado fundamental de un átomo de Bohr (véase el capítulo 38, volumen I) e igual a 0.528 ángstroms. En un gas a presión y temperatura normales (1 atmósfera, 0°C) existen 2.69×10^{19} átomos/cm^3, así que la ecuación (11.9) nos da:

$$\kappa = 1 + (2.69 \times 10^{19})16\pi(0.528 \times 10^{-8})^3 = 1.00020. \tag{11.13}$$

La constante dieléctrica medida para el gas de hidrógeno es:

$$\kappa_{\text{exp}} = 1.00026.$$

Vemos que nuestra teoría es bastante correcta. No esperaríamos mejores resultados, debido a que las mediciones fueron tomadas, naturalmente, con gas de hidrógeno normal, el cual tiene moléculas diatómicas, no átomos simples. No nos debemos sorprender si la polarización de los átomos de una molécula no es la misma que la de los átomos separados. El efecto molecular, sin embargo, no es realmente tan grande. Una determinación cuántica exacta de α para el átomo de hidrógeno, da un resultado de alrededor de 12 % más grande que (11.12) (el 16π se cambia a 18π) y, por lo tanto, predice una constante dieléctrica algo más cercana a la observada. En cualquier caso, está claro que nuestro modelo de un dieléctrico es bastante bueno.

Otra comprobación de nuestra teoría es probar la ecuación (11.17) en átomos que tienen una frecuencia de excitación más alta. Por ejemplo, se necesitan alrededor de 24.6 electronvoltios para arrancar el electrón del átomo de helio, comparado con los 13.6 electronvoltios necesarios para ionizar el hidrógeno. Por lo tanto, sería de esperar que la frecuencia de absorción ω_0 para el helio fuera unas dos veces la del hidrógeno, y que α fuera una cuarta parte. Así, por la ecuación (11.13) es de esperarse que pase lo siguiente:

$$\kappa_{\text{helio}} \approx 1.000050.$$

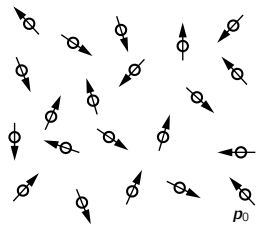
Experimentalmente,

$$\kappa_{\text{helio}} = 1.000068,$$

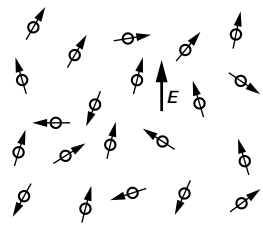
así, como ven, nuestras estimaciones *grosso modo* están en buen camino. Así que hemos comprendido la constante dieléctrica de un gas no polar, pero sólo cualitativamente porque todavía no hemos usado una teoría atómica correcta del movimiento de los electrones atómicos.

11-3 Las moléculas polares. Polarización de orientación

A continuación consideraremos una molécula que tiene un momento dipolar permanente p_0 —como una molécula de agua—. Sin campo eléctrico, los dipolos individuales señalan en direcciones aleatorias, así que el momento por unidad de



(a)



(b)

Figura 11-2. (a) En un gas de moléculas polares, los momentos individuales están orientados aleatoriamente; el momento promedio en un volumen pequeño es cero. (b) Cuando existe un campo eléctrico, hay cierta alineación promedio de las moléculas.

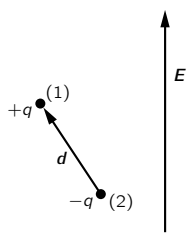


Figura 11-3. La energía de un dipolo $\boldsymbol{p}_0$ en el campo $\boldsymbol{E}$ es $-\boldsymbol{p}_0 \cdot \boldsymbol{E}$.

volumen es cero. Pero cuando se aplica un campo eléctrico, suceden dos cosas: primero, hay un momento dipolar inducido adicional debido a las fuerzas sobre los electrones; esta parte da justamente la clase de polarizabilidad electrónica encontrada en moléculas no polares. Para trabajos muy exactos, se debería incluir este efecto, por supuesto, pero lo desecharemos por el momento. (Se puede agregar al final.) Segundo, el campo eléctrico tiende a alinear los dipolos individuales para producir un momento resultante por unidad de volumen. Si todos los dipolos en un gas se alinearan, habría una polarización muy grande, pero eso no sucede. A temperaturas y campos eléctricos normales, las colisiones de las moléculas en su movimiento les impiden alinearse mucho. Pero hay cierto alineamiento resultante y, por lo tanto, alguna polarización (véase figura 11-2). La polarización que ocurre se puede calcular por los métodos de la mecánica estadística que hemos descrito en el capítulo 40 del volumen I.

Para usar este método, necesitamos conocer la energía de un dipolo en un campo eléctrico. Consideremos un dipolo de momento $\boldsymbol{p}_0$ en un campo eléctrico, como muestra la figura 11-3. La energía de la carga positiva es $q\phi(1)$ y la energía de la carga negativa es $-q\phi(2)$. Entonces, la energía del dipolo es

$$U = q\phi(1) - q\phi(2) = q\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{\nabla}\phi,$$

o sea

$$U = -\boldsymbol{p}_0 \cdot \boldsymbol{E} = -p_0 E \cos\theta, \tag{11.14}$$

donde θ es el ángulo entre $\boldsymbol{p}_0$ y $\boldsymbol{E}$. Como era de esperar, la energía es menor cuando los dipolos están alineados con el campo.

Hallemos ahora cuánto alineamiento se produce, usando los métodos de la mecánica estadística. Obtuvimos en el capítulo 40 del volumen I, que en un estado de equilibrio térmico el número relativo de moléculas con la energía potencial U es proporcional a

$$e^{-U/kT}, \tag{11.15}$$

donde $U(x, y, z)$ es la energía potencial en función de la posición. El mismo razonamiento diría que usando la ecuación (11.14) para la energía potencial en función del *ángulo*, el número de moléculas en θ *por unidad de ángulo sólido* es proporcional a $e^{-U/kT}$.

Sea $n(\theta)$ el número de moléculas por unidad de ángulo sólido en θ, tenemos

$$n(\theta) = n_0 e^{+p_0 E \cos\theta/kT}. \tag{11.16}$$

Para temperaturas y campos normales, el exponente es pequeño, así que podemos aproximar desarrollando la exponencial:

$$n(\theta) = n_0\left(1 + \frac{p_0 E \cos\theta}{kT}\right). \tag{11.17}$$

Podemos encontrar n_0 si integramos (11.17) sobre todos los ángulos; el resultado sería justamente N, el número total de moléculas por unidad de volumen. El valor promedio de $\cos\theta$ sobre todos los ángulos es nulo, así que la integral es justo n_0 por el ángulo sólido total 4π. Obtenemos:

$$n_0 = \frac{N}{4\pi}. \tag{11.18}$$

Vemos que según la ecuación (11.17) habrá más moléculas orientadas en la dirección del campo ($\cos\theta = 1$), que contra el campo ($\cos\theta = -1$). Así, en cualquier volumen pequeño que contenga muchas moléculas habrá un momento dipolar resultante por unidad de volumen —esto es, una polarización P—. Para calcular P, queremos la suma vectorial de todos los momentos moleculares en una unidad de volumen. Como sabemos que el resultado estará en la dirección de $\boldsymbol{E}$, sumaremos simplemente las componentes en esa dirección (la suma de las componentes perpendiculares a $\boldsymbol{E}$ será nula)

$$P = \sum_{\substack{\text{unidad de}\\ \text{volumen}}} p_0 \cos\theta_i.$$

Podemos obtener la suma integrando sobre la distribución angular. El ángulo sólido en θ es $2\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta$, así que

$$P = \int_0^{\pi} n(\theta) p_0 \cos\theta\, 2\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta. \tag{11.19}$$

Sustituyendo $n(\theta)$ dado por la ecuación (11.17), tenemos

$$P = -\frac{N}{2}\int_1^{-1}\left(1 + \frac{p_0 E}{kT}\cos\theta\right) p_0 \cos\theta\, d(\cos\theta),$$

la cual se integra fácilmente dando

$$P = \frac{N p_0^2 E}{3kT}. \tag{11.20}$$

La polarización es proporcional al campo E, así que el comportamiento será como el de un dieléctrico normal. También, como era de esperar, la polarización depende inversamente de la temperatura, porque a temperaturas más altas hay más desalineamiento por colisión. Esta dependencia $1/T$ se llama ley de Curie. El momento permanente p_0 aparece al cuadrado por la siguiente razón: en un campo eléctrico dado, la fuerza de alineamiento depende de p_0 y el momento medio producido por el alineamiento es, a su vez, proporcional a p_0. Así pues, el momento promedio inducido es proporcional a ${p_0}^2$.

Ahora trataremos de ver hasta qué punto la ecuación (11.20) concuerda con los experimentos. Consideremos el caso del vapor. Como no conocemos cuánto vale p_0, no podemos calcular directamente P, pero la ecuación (11.20) predice que $\kappa - 1$ debe variar inversamente a la temperatura y lo debemos comprobar.

De la ecuación (11.20) obtenemos:

$$\kappa - 1 = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{N p_0^2}{3\epsilon_0 kT}, \tag{11.21}$$

así que $\kappa - 1$ variaría directamente proporcional a la densidad N, e inversamente a la temperatura absoluta. La constante dieléctrica ha sido medida a varias presiones y temperaturas diferentes, elegidas de tal manera que el número de moléculas en una unidad de volumen permanezca fijo.* (Nótese que si las mediciones hubieran sido tomadas a presión constante, el número de moléculas por unidad de volumen decrecería linealmente al aumentar la temperatura y $\kappa - 1$ variaría como T^{-2} en lugar de como T^{-1}.) La figura 11-4 representa las observaciones experimentales de $\kappa - 1$ en función de $1/T$. La dependencia predicha por la ecuación (11.21) se cumple muy bien.

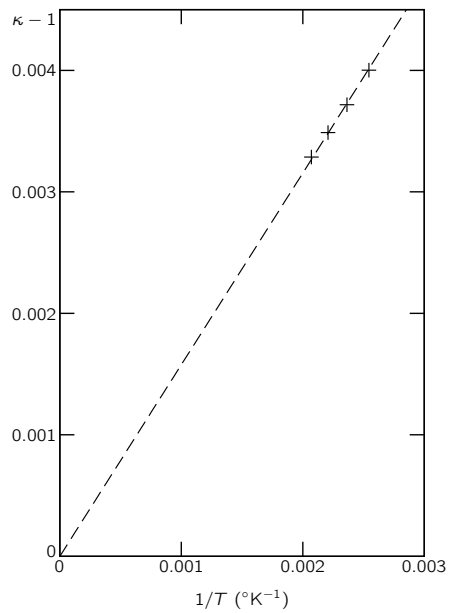


Figura 11-4. Mediciones experimentales de la constante dieléctrica del vapor de agua a varias temperaturas.

Hay otra característica de la constante dieléctrica de las moléculas polares: su variación con la frecuencia del campo aplicado. Debido al momento de inercia de las moléculas, se necesita un cierto tiempo para que las moléculas pesadas giren para ponerse en la dirección del campo. Así, si aplicamos frecuencias en la región de altas microondas o por encima, la contribución polar a la constante dieléctrica empezará a caer porque las moléculas no pueden seguirlas. En contraste con esto, la polarizabilidad electrónica sigue siendo la misma hasta frecuencias ópticas debido a la pequeña inercia en los electrones.

11-4 Los campos eléctricos en cavidades de un dieléctrico

Tratemos ahora un asunto interesante, pero complicado, el problema de la constante dieléctrica en materiales densos. Tomemos por ejemplo el helio líquido, argón líquido o cualquier otro material no polar. Todavía es de esperar que haya polarización electrónica. Sin embargo, en un material denso $\boldsymbol{P}$ puede ser grande, por lo que el campo en un átomo individual será influido por la polarización de los átomos más cercanos. La pregunta es ¿qué campo electrónico actúa en el átomo individual?

* Sänger, Steiger y Gächter, *Helvetica Physica Acta* **5**, 200 (1932).

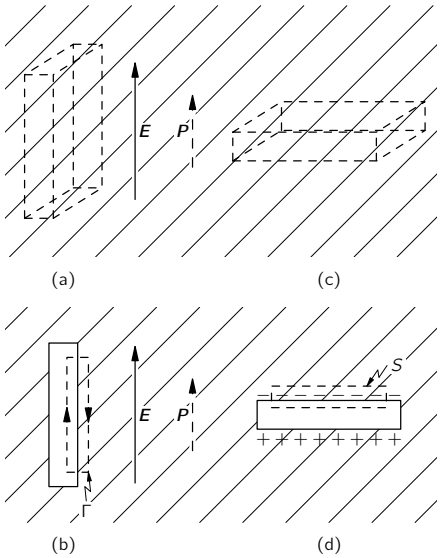


Figura 11-5. El campo en una ranura en un dieléctrico depende de la forma y orientación de la ranura.

Imaginen que se coloca el líquido entre las placas de un condensador. Si las placas están cargadas, producirán un campo eléctrico en el líquido. Pero también hay carga en cada átomo y el campo total $\boldsymbol{E}$ es la suma de ambos efectos. Este campo eléctrico varía muy rápidamente de punto a punto en el líquido. Es muy alto dentro de los átomos —particularmente justo al lado del núcleo— y relativamente pequeño entre átomos. La diferencia de potencial entre las placas es la integral de línea de este campo total. Si ignoramos las variaciones complicadas, podemos pensar en un campo eléctrico *promedio* E, que es simplemente V/d. (Éste es el campo usado en el último capítulo.) Pensaríamos en este campo como el promedio sobre un espacio que contiene muchos átomos.

Ahora bien, podrían pensar que un átomo "promedio" en una posición "promedio" experimentaría este campo promedio. Pero no es tan simple, como podemos mostrar considerando qué sucede si imaginamos cavidades de diferentes formas en un dieléctrico. Por ejemplo, supongan que hacemos una ranura en un dieléctrico polarizado, con la ranura paralela al campo, como muestra la parte (a) de la figura 11-5. Como sabemos que $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$, la integral de línea de $\boldsymbol{E}$ alrededor de la curva Γ que va como se muestra en la parte (b) de la figura, debe ser cero. El campo dentro de la ranura debe dar una contribución que cancele justamente la parte del campo externo. Por consiguiente, el campo E_0 que se encuentra realmente en el centro de una ranura delgada larga es igual a E, el campo eléctrico promedio obtenido en el dieléctrico.

Consideremos ahora otra ranura cuyo lado mayor sea perpendicular a E, como muestra la parte (c) de la figura 11-5. En este caso, el campo E_0 en la ranura no es lo mismo que E, porque aparecen cargas de polarización en la superficie. Si aplicamos la ley de Gauss a una superficie S dibujada como en la parte (d) de la figura, encontramos que el campo E_0 *en la ranura* está dado por:

$$E_0 = E + \frac{P}{\epsilon_0}, \tag{11.22}$$

donde E es nuevamente el campo eléctrico en el dieléctrico. (La superficie gaussiana contiene la carga superficial de polarización $\sigma_{\text{pol}} = P$.) Mencionamos en el capítulo 10 que $\epsilon_0 E + P$ a menudo se llama D, así que $\epsilon_0 E_0 = D_0$ es igual a D en el dieléctrico.

En la historia de la física, cuando se suponía que era muy importante definir todas las cantidades por experimentación directa, la gente estaba encantada de descubrir que podían definir lo que entendían por E y D en un dieléctrico sin tener que pasearse entre los átomos. El campo promedio $\boldsymbol{E}$ es numéricamente igual al campo $\boldsymbol{E}_0$ que se mediría en una ranura cortada paralelamente al campo. Y el campo $\boldsymbol{D}$ se podría medir hallando E_0 en una ranura normal al campo. Pero de todas maneras nadie los mide nunca así, de modo que fue simplemente una de esas lucubraciones filosóficas.

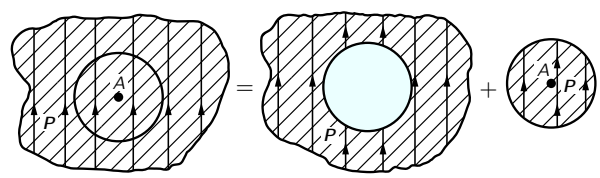


Figura 11-6. El campo en cualquier punto *A* de un dieléctrico se puede considerar como la suma del campo en una cavidad esférica, más el campo debido a un enchufe esférico.

Para la mayoría de los líquidos que no tienen una estructura muy complicada, sería de esperar que un átomo se encontrara, en promedio, circundado por los otros átomos en lo que sería una buena aproximación a una *cavidad esférica*. Y así deberíamos preguntar: ¿cuál sería el campo en una cavidad esférica? Podemos contestar diciendo que si imaginamos hacer una cavidad esférica en un material uniformemente polarizado estamos sacando una esfera de material polarizado. (Debemos imaginar que se "congela" la polarización antes de hacer la cavidad.) Por superposición, no obstante, el campo dentro del dieléctrico es, antes de sacar

la esfera, la suma de los campos de todas las cargas externas al volumen esférico más los campos de las cargas situadas dentro de la esfera polarizada. Esto es, si llamamos E al campo en el dieléctrico uniforme, podemos escribir lo siguiente:

$$E = E_{\text{cav}} + E_{\text{en}}, \tag{11.23}$$

donde E_{cav} es el campo en la cavidad y E_{en}, es el campo dentro de una esfera uniformemente polarizada (véase figura 11-6). La figura 11-7 muestra los campos debido a una esfera uniformemente polarizada. El campo eléctrico dentro de la esfera es uniforme y su valor es

$$E_{\text{en}} = -\frac{P}{3\epsilon_0}. \tag{11.24}$$

Usando (11.23), obtenemos

$$E_{\text{cav}} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}. \tag{11.25}$$

El campo en una cavidad esférica es más grande que el campo promedio en la cantidad $P/3\epsilon_0$ (la cavidad esférica da un campo a 1/3 de camino entre una ranura paralela al campo y una perpendicular al mismo).

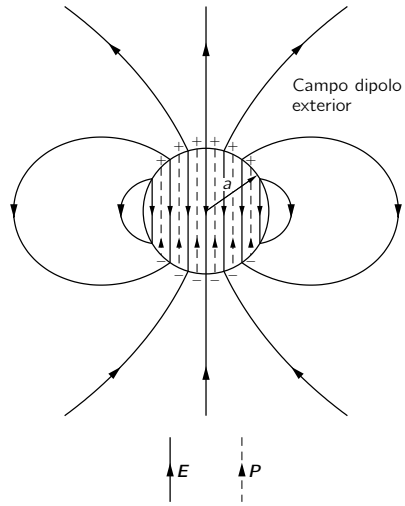


Figura 11-7. El campo eléctrico de una esfera uniformemente polarizada.

11-5 La constante dieléctrica de líquidos; la ecuación de Clausius-Mossotti

En un líquido es de esperar que el campo que polarizará un átomo sea más semejante a E_{cav} que a E. Si usamos el campo E_{cav} de (11.25) para el campo polarizante en la ecuación (11.6), la ecuación (11.8) se transforma en:

$$P = N\alpha\epsilon_0\left(E + \frac{P}{3\epsilon_0}\right), \tag{11.26}$$

o sea

$$P = \frac{N\alpha}{1 - (N\alpha/3)}\,\epsilon_0 E. \tag{11.27}$$

Recordando que $\kappa - 1$ es justamente $P/\epsilon_0 E$, tenemos

$$\kappa - 1 = \frac{N\alpha}{1 - (N\alpha/3)}, \tag{11.28}$$

la cual nos da la constante dieléctrica de un líquido en función de α, la polarizabilidad atómica. Ésta es la llamada ecuación *de Clausius-Mossotti*.

Siempre que $N\alpha$ es muy pequeño, como lo es para un gas (debido a que la densidad N es pequeña), el término $N\alpha/3$ se puede despreciar comparado con 1 y obtenemos nuestro viejo resultado, la ecuación (11.9):

$$\kappa - 1 = N\alpha. \tag{11.29}$$

Comparemos la ecuación (11.28) con algún resultado experimental. Primero es necesario considerar gases para los cuales, usando las mediciones de κ, podamos hallar α con la ecuación (11.29). Por ejemplo, para el sulfuro de carbono a cero grados centígrados la constante dieléctrica es 1.0029, así que $N\alpha$ es 0.0029. Ahora bien, la densidad del gas se obtiene fácilmente y la densidad del líquido se puede encontrar en un manual. A 20°C, la densidad del líquido CS_2 es 381 veces más alta que la densidad del gas a 0°C. Esto significa que N es 381 veces más grande en el líquido que en el gas, de modo que —si hacemos la aproximación de que la polarizabilidad básica atómica del sulfuro de carbono no cambia cuando se condensa en un líquido— $N\alpha$ en el líquido es igual a 381 veces 0.0029, o 1.11. Observen que el término $N\alpha/3$ equivale casi a 0.4, así que es muy significativo. Con estos números predecimos una constante dieléctrica de 2.76, lo cual concuerda razonablemente bien con el valor observado de 2.64.

En la tabla 11-1 damos algunos datos experimentales de varios materiales (tomados del *Handbook of Chemistry and Physics*), junto con la constante dieléctrica calculada con la ecuación (11.28) en la forma descrita. La concordancia

Tabla 11-1

Cálculo de las constantes dieléctricas de líquidos a partir de la constante dieléctrica del gas

	Gas			Líquido				
Sustancia	κ (exp)	$N\alpha$	Densidad	Densidad	Cociente[1]	$N\alpha$	κ (predicho)	κ (exp)
CS_2	1.0029	0.0029	0.00339	1.293	381	1.11	2.76	2.64
O_2	1.000523	0.000523	0.00143	1.19	832	0.435	1.509	1.507
CCl_4	1.0030	0.0030	0.00489	1.59	325	0.977	2.45	2.24
Ar	1.000545	0.000545	0.00178	1.44	810	0.441	1.517	1.54

[1] Cociente = densidad del líquido/densidad del gas

entre la observación y la teoría es mejor para argón y oxígeno que para CS_2 —y no muy buena para tetracloruro de carbono—. En general, los resultados demuestran que la ecuación (11.28) trabaja muy bien.

Nuestra derivación de la ecuación (11.28) es válida solamente para polarización *electrónica* en líquidos. No es correcta para una molécula polar como H_2O. Si hacemos los mismos cálculos para agua, obtenemos 13.2 para $N\alpha$, lo cual significa que la constante dieléctrica para el líquido es *negativa*, mientras que el valor observado de κ es 80. El problema tiene que ver con el tratamiento correcto de los dipolos permanentes, y Onsager ha señalado la forma correcta de hacerlo. No tenemos tiempo de tratar el caso ahora, pero si están interesados, está discutido en el libro de Kittel, *Introduction to Solid State Physics*.

11-6 Los dieléctricos sólidos

Vayamos ahora a los sólidos. El primer hecho interesante acerca de los sólidos es que puede haber una polarización permanente dentro de ellos —que existe aunque no se esté aplicando un campo eléctrico—. Un ejemplo ocurre con un material como la cera, la cual contiene largas moléculas con un momento dipolar permanente. Si funden una cantidad de cera y le aplican un campo eléctrico fuerte cuando está líquida, de modo que los momentos dipolares se alineen parcialmente, entonces éstos se quedarán así cuando el líquido se endurezca. De esta manera, el material sólido tendrá una polarización permanente que quedará al quitar el campo. Tal sólido se llama *electreto*.

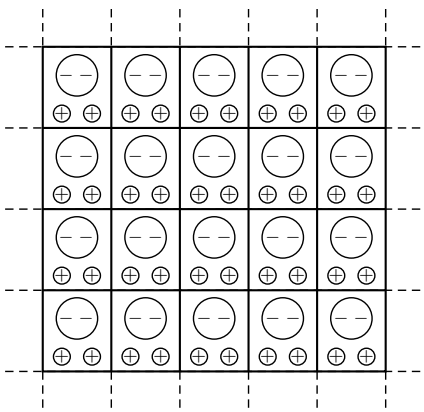


Figura 11-8. Una red cristalina compleja puede tener una polarización intrínseca permanente $\boldsymbol{P}$.

Un electreto tiene cargas de polarización permanente en su superficie. Es la analogía eléctrica de un imán. No es tan útil, sin embargo, porque cargas libres del aire son atraídas a su superficie, cancelando finalmente las cargas de polarización. El electreto se "descarga" y no hay campos externos visibles.

Una polarización permanente interna P también se encuentra naturalmente en algunas sustancias cristalinas. En esos cristales, todas las celdas de la red cristalina tienen un momento dipolar permanente idéntico, como lo muestra la figura 11-8. Todos los dipolos apuntan en la misma dirección, aunque no haya campo eléctrico aplicado. Muchos cristales complicados tienen, en verdad, esa polarización; normalmente no notamos esto porque los campos eléctricos externos están descargados, justamente como para los electretos.

No obstante, si estos momentos dipolares internos de un cristal cambian, aparecen campos externos porque no hay tiempo para que se reúnan cargas sueltas y cancelen las cargas de polarización. Si el dieléctrico está en un condensador, se inducirán cargas libres en los electrodos. Por ejemplo, los momentos pueden cambiar cuando se calienta un dieléctrico, debido a la dilatación térmica. El efecto se llama *piroelectricidad*. Análogamente, si cambiamos las tensiones en un cristal —si lo doblamos, por ejemplo— puede que el momento cambie un poco y se pueda descubrir un efecto pequeño, llamado *piezoelectricidad*.

Para cristales que no tienen un momento permanente, uno puede elaborar una teoría de la constante dieléctrica que incluya la polarizabilidad electrónica de los átomos. Es como para los líquidos. Algunos cristales también tienen dentro

dipolos que pueden rotar y la rotación de estos dipolos también contribuirá a κ. En cristales iónicos, como el NaCl, hay también *polarizabilidad iónica*. El cristal consiste en un tablero de damas de iones positivos y negativos; en un campo eléctrico los iones positivos son arrastrados en un sentido y los negativos en otro; hay un movimiento relativo resultante de las cargas más y menos y, por lo tanto, una polarización de volumen. Podríamos estimar la magnitud de la polarizabilidad iónica a partir de nuestro conocimiento de la rigidez de los cristales de sal, pero no lo haremos aquí.

11-7 Ferroelectricidad; el $BaTiO_3$

Queremos describir ahora una clase especial de cristales que tienen, por accidente casi, un momento permanente dentro de ellos. La situación es tan marginal que si aumentamos la temperatura un poco, ellos pierden completamente el momento permanente. Por otra parte, si son cristales casi cúbicos, de modo que sus momentos puedan ponerse en diferentes direcciones, podemos descubrir un cambio muy grande en el momento cuando varía un campo aplicado. Todos los momentos se reorientan y obtenemos un efecto grande. Las sustancias que tienen esta clase de momento permanente se llaman *ferroeléctricas*, por analogía con los efectos ferromagnéticos correspondientes que fueron descubiertos, primero, en el hierro.

Nos gustaría explicar cómo trabaja la ferroelectricidad, describiendo un ejemplo particular de material ferroeléctrico. La propiedad ferroeléctrica se puede originar de varias maneras; pero tomaremos solamente un caso misterioso: el del titanato de bario, $BaTiO_3$. Este material tiene una red cristalina cuya celda básica se muestra en la figura 11-9. Resulta que por encima de una cierta temperatura, específicamente 118°C, el titanato de bario es un dieléctrico ordinario con una constante dieléctrica enorme. Por debajo de esa temperatura, sin embargo, adquiere repentinamente un momento permanente.

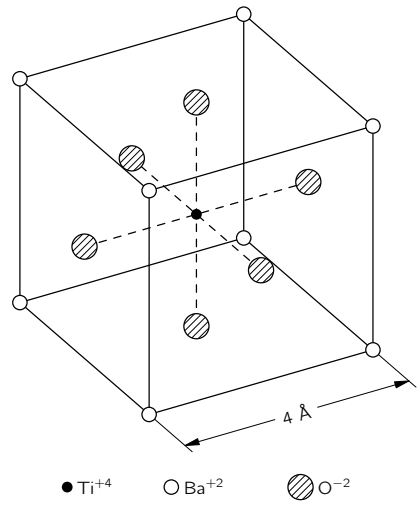


Figura 11-9. La celda unitaria de $BaTiO_3$. Los átomos llenan realmente la mayor parte del espacio; por claridad, solamente se muestra la posición de sus centros.

Al calcular la polarización de materia sólida, primero debemos encontrar cuáles son los campos locales en cada celda unitaria. Debemos incluir los campos provenientes de la polarización misma, como lo hicimos para el caso de un líquido. Pero un cristal no es un líquido homogéneo, por eso no podemos usar para el campo local lo que encontramos en una cavidad esférica. Si investigan un cristal, encontrarán que el factor 1/3 en la ecuación (11.24) se vuelve ligeramente diferente, pero no mucho; para un cristal cúbico simple, es justamente 1/3. Por consiguiente, supondremos para nuestra discusión preliminar que el factor para el $BaTiO_3$ es 1/3.

Ahora bien, cuando escribimos la ecuación (11.28), puede que se hayan preguntado qué sucedería si $N\alpha$ se hiciera mayor que 3. Parece como si κ se volviera negativo. Pero seguramente eso no sería correcto. Veamos qué sucedería si aumentáramos gradualmente α en un cristal particular. A medida que α aumenta, la polarización será mayor, produciendo un campo local mayor. Pero un campo local mayor polarizará más cada átomo, elevando aún más los campos locales. Si los átomos pueden "ceder" lo suficiente, el proceso continuará; existe una especie de retroalimentación que hace que la polarización aumente sin límite —suponiendo que la polarización de cada átomo aumente en proporción al campo—. La condición de "descontrol" ocurre cuando $N\alpha = 3$. Por supuesto, la polarización no se vuelve infinita, debido a que la proporcionalidad entre el momento inducido y el campo eléctrico deja de valer para campos fuertes, por lo que nuestras fórmulas ya no son correctas. Lo que sucede es que la red cristalina "se traba" con una alta polarización interna autogenerada.

En el caso del $BaTiO_3$ hay también, además de una polarización electrónica, una polarización iónica grande, la cual se debe presumiblemente a que los iones titanio pueden moverse un poco en la red cúbica. La red se resiste a grandes movimientos, de modo que después de haber recorrido el titanio un pequeño camino, se atasca y se detiene. Pero entonces la celda cristalina queda con un momento dipolar permanente.

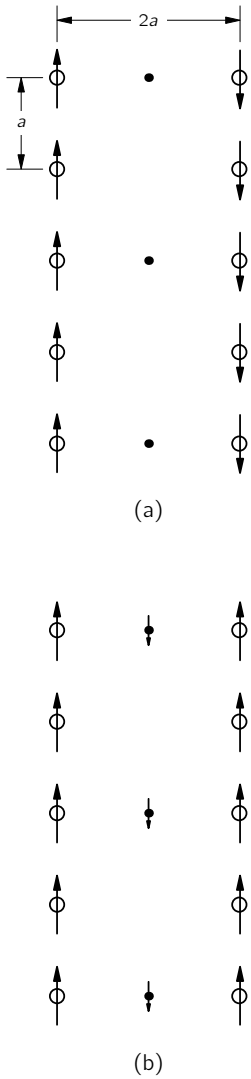


Figura 11-10. Modelos de un ferroeléctrico: (a) corresponde a un antiferroeléctrico y (b) a un ferroeléctrico normal.

En la mayoría de los cristales, realmente ésta es la situación que se puede alcanzar para todas las temperaturas. Lo más interesante del titanato de bario es que existe una condición delicada tal que si se disminuye $N\alpha$ sólo un poco, se "despega". Como N decrece al aumentar la temperatura —debido a la dilatación térmica— podemos variar $N\alpha$ cambiando la temperatura. Por debajo de la temperatura crítica está apenas "atascado", así que es fácil cambiar la polarización —aplicando un campo externo— y trabarla en una dirección diferente.

Veamos si podemos analizar detalladamente lo que sucede. Llamemos T_c a la temperatura crítica para la cual $N\alpha$ es exactamente 3. A medida que la temperatura aumenta, N disminuye un poco debido a la dilatación de la red. Como la dilatación es pequeña, podemos decir que cerca de la temperatura crítica

$$N\alpha = 3 - \beta(T - T_c), \tag{11.30}$$

donde β es una constante pequeña del mismo orden de magnitud que el coeficiente de dilatación térmica, o sea alrededor de 10^{-5} a 10^{-6} por grado centígrado. Ahora bien, si sustituimos esta relación en la ecuación (11.28), obtenemos:

$$\kappa - 1 = \frac{3 - \beta(T - T_c)}{\beta(T - T_c)/3}.$$

Como hemos supuesto que $\beta(T - T_c)$ es pequeño comparado con uno, podemos aproximar esta fórmula con:

$$\kappa - 1 = \frac{9}{\beta(T - T_c)/3}. \tag{11.31}$$

Por supuesto, esta fórmula es correcta solamente para $T > T_c$. Vemos que, justamente, por encima de la temperatura crítica, κ es enorme. Debido a que $N\alpha$ es muy cercano a 3, hay un tremendo efecto de aumento y la constante dieléctrica puede fácilmente estar entre 50 000 y 100 000. También es muy sensible a la temperatura. Para aumentos de temperatura, la constante dieléctrica disminuye inversamente a la temperatura, pero a diferencia del caso de un gas dipolar, para el cual $\kappa - 1$ varía inversamente a la temperatura *absoluta*, en los ferroeléctricos, varía inversamente a la diferencia entre la temperatura absoluta y la temperatura crítica (esta ley se llama ley de Curie-Weiss).

Cuando bajamos la temperatura hasta la temperatura crítica, ¿qué sucede? Si imaginamos una red de celda unitaria como la de la figura 11-9, vemos que es posible elegir cadenas de iones a lo largo de líneas verticales. Una de ellas consiste en iones de oxígeno y de titanio alternados. Existen otras líneas formadas por iones de bario u oxígeno, pero el espaciamiento a lo largo de estas líneas es más grande. Hagamos un modelo sencillo para imitar esta situación imaginando, como muestra la figura 11-10(a), una serie de cadenas de iones. A lo largo de la que llamamos cadena principal, la separación de los iones es a, que es la *mitad* de la constante de la red; la distancia lateral entre cadenas idénticas es $2a$. Hay cadenas menos densas que ignoraremos por el momento. Para hacer el análisis un poco más fácil, también supondremos que todos los átomos de la cadena principal son idénticos. (No es una simplificación seria, porque todos los efectos importantes todavía aparecerán. Éste es uno de los trucos de la física teórica. Uno resuelve un problema diferente porque es más fácil de hacerlo la primera vez —luego, cuando se entiende cómo funcionan las cosas, es posible introducir todas las complicaciones—.)

Intentaremos hallar ahora lo que sucedería con nuestro modelo. Supongamos que el momento dipolar de cada átomo sea p y queremos calcular el campo en uno de los átomos de la cadena. Debemos encontrar la suma de los campos de todos los otros átomos. Primero calcularemos el campo de los dipolos en una cadena vertical solamente; hablaremos de las otras cadenas más adelante. El campo a la distancia r de un dipolo en una dirección según su eje está dado por

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2p}{r^3}. \tag{11.32}$$

En cualquier átomo dado, los dipolos a igual distancia por encima y debajo, darán campos en la misma dirección, así que para toda la cadena tenemos

$$E_{\text{cadena}} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{2}{a^3}\cdot\left(2+\frac{2}{8}+\frac{2}{27}+\frac{2}{64}+\cdots\right) = \frac{p}{\epsilon_0}\,\frac{0.383}{a^3}. \tag{11.33}$$

No es muy difícil demostrar que si nuestro modelo fuese como un cristal completamente cúbico —esto es, si la siguiente línea idéntica estuviese a una distancia a— el número 0.383 cambiaría a 1/3. En otras palabras, si las líneas siguientes estuviesen a una distancia a, solamente contribuirían -0.050 unidades a nuestra suma. Sin embargo, estamos considerando que la siguiente cadena principal está a una distancia $2a$ y, como recuerdan del capítulo 7, el campo de una estructura periódica cae exponencialmente con la distancia. Por lo tanto, la contribución de estas líneas es mucho menor que -0.050 y simplemente podemos ignorar todas las otras cadenas.

Ahora es necesario hallar qué polarizabilidad α se necesita para que funcione el proceso de descontrol. Supongan que el momento inducido p de cada átomo de la cadena es proporcional al campo en él, como en la ecuación (11.6). Obtenemos el campo polarizante en el átomo debido a E_{cadena}, usando la ecuación (11.32). De este modo, tenemos dos ecuaciones

$$p = \alpha\epsilon_0 E_{\text{cadena}}$$

y

$$E_{\text{cadena}} = \frac{0.383}{a^3}\,\frac{p}{\epsilon_0}.$$

Existen dos soluciones: E_{cadena} y p ambos cero, o

$$\alpha = \frac{a^3}{0.383},$$

con E_{cadena} y p ambos finitos. Por lo tanto, si α llega a ser $a^3/0.383$, se establecerá una polarización permanente mantenida por su propio campo. Esta igualdad crítica se tiene que alcanzar para el titanato de bario justamente a la temperatura T_c. (Observen que si α fuese mayor que el valor crítico para campos pequeños, decrecería para campos grandes y en el equilibrio valdría la misma igualdad que hemos encontrado.)

Para el $BaTiO_3$, el espaciamiento a es 2×10^{-8} cm, así que tenemos que esperar $\alpha = 21.8\times10^{-24}$ cm^3. Podemos comparar esto con las polarizabilidades conocidas de los átomos individuales. Para el oxígeno, $\alpha = 30.2\times10^{-24}$ cm^3; ¡andamos por buen camino! Pero para el titanio, $\alpha = 2.4\times10^{-24}$ cm; bastante pequeño. Para usar nuestro modelo deberíamos tomar probablemente el promedio. (Podríamos calcular de nuevo la cadena para átomos alternados, pero el resultado sería más o menos el mismo.) Así pues, $\alpha(\text{promedio}) = 16.3\times10^{-24}$ cm^3, lo cual no es suficientemente alto como para dar una polarización permanente.

¡Pero esperen un poco! Hasta ahora hemos sumado únicamente las polarizabilidades electrónicas. También hay cierta polarizabilidad iónica debido al movimiento de los iones de titanio. Todo lo que necesitamos es una polarizabilidad iónica de 9.2×10^{-24} cm^3. (Un cálculo más preciso, usando átomos alternados, muestra que realmente se necesita 11.9×10^{-24} cm^3.) Además, para entender las propiedades del $BaTiO_3$, tenemos que suponer que existe esa polarización iónica.

No se sabe por qué el ion titanio en titanato de bario debe tener tanta polarizabilidad iónica. Aún más, no está claro por qué, a una temperatura baja, polariza igualmente bien según la diagonal del cubo y según la diagonal de la cara. Si calculamos el verdadero tamaño de las esferas en la figura 11-9 y preguntamos si el titanio está un poquito suelto en la caja formada por los átomos de oxígeno vecinos —que es lo que ustedes esperarían para que se le pudiera cambiar fácilmente— encontramos todo lo contrario. Encaja muy ajustado. Los átomos de *bario* están ligeramente sueltos, pero si hacen que sean ellos los que se mueven, las cosas no funcionan. Ven entonces que el tema no está ciento por ciento claro realmente; hay todavía misterios que quisiéramos comprender.

Volviendo a nuestro modelo sencillo de la figura 11-10(a), vemos que el campo de una cadena tendería a polarizar la cadena vecina en la dirección *contraria*, lo cual significa que aunque cada cadena estaría trabada ¡no habría momento permanente resultante por unidad de volumen! (aún no tendría efectos eléctricos externos, quedan ciertos efectos termodinámicos que se podrían observar). Tales sistemas existen y se llaman antiferroeléctricos. Así pues, lo que hemos explicado es un antiferroeléctrico. Sin embargo, el titanato de bario es realmente como el arreglo de la figura 11-10(b). Las cadenas de oxígeno-titanio están polarizadas en la misma dirección, porque hay cadenas intermedias de átomos entre ellas. Aunque los átomos de estas cadenas no son muy polarizables, o muy densos, se polarizarán un poco en dirección antiparalela a las cadenas de oxígeno-titanio. Los campos pequeños producidos en la siguiente cadena oxígeno-titanio harán que empiece paralelo al primero. Así pues, el $BaTiO_3$ realmente es ferroeléctrico y esto se debe a los átomos intermedios. Ustedes se preguntarán: "pero ¿y el efecto directo entre las dos cadenas de O-Ti?" Recuerden que el efecto directo cae exponencialmente con la separación; el efecto de la cadena de dipolos *fuertes* a $2a$ puede ser menor que el efecto de una cadena de débiles a una distancia a.

Esto completa nuestro informe bastante detallado sobre la comprensión actual de las constantes dieléctricas de gases, de líquidos y de sólidos.

12

Analogías con la electrostática

12-1 Ecuaciones iguales tienen soluciones iguales

12-2 El flujo de calor; la fuente puntual cerca de un contorno plano infinito

12-3 La membrana tensa

12-4 La difusión de neutrones; una fuente esférica uniforme en un medio homogéneo

12-5 El flujo irrotacional de un fluido; el flujo alrededor de una esfera

12-6 Iluminación; el plano alumbrado uniformemente

12-7 La "unidad subyacente" de la naturaleza

12-1 Ecuaciones iguales tienen soluciones iguales

La cantidad total de información que se ha adquirido sobre el mundo físico desde el comienzo del progreso científico es enorme y parece casi imposible que una sola persona pudiera conocer una fracción razonable de la misma. Pero en realidad es completamente posible que un físico tenga un conocimiento amplio del mundo físico en vez de transformarse en un especialista en un área estrecha. Son tres las razones de esto: primero, hay grandes principios que se aplican a todas las clases diferentes de fenómenos —como el principio de conservación de la energía y del momento angular—. Una comprensión profunda de esos principios da una comprensión de muchas cosas a la vez. Segundo, está el hecho de que muchos fenómenos complicados, como el comportamiento de sólidos bajo compresión, en realidad dependen básicamente de fuerzas eléctricas y cuánticas, de modo que si uno comprende las leyes fundamentales de la electricidad y de la mecánica cuántica, hay por lo menos cierta posibilidad de comprender muchos de los fenómenos que ocurren en situaciones complejas. Finalmente, hay una coincidencia notabilísima: *las ecuaciones correspondientes a muchas situaciones físicas diferentes tienen exactamente la misma apariencia.* Por supuesto, los símbolos pueden ser diferentes —se sustituye una letra por otra— pero la forma matemática de las ecuaciones es la misma. Esto significa que, habiendo estudiado un tema, tenemos inmediatamente muchísimo conocimiento directo y preciso sobre las soluciones de las ecuaciones del otro.

Hemos terminado con el tema de la electrostática y pronto seguiremos con el estudio del magnetismo y de la electrodinámica. Pero antes de hacerlo nos gustaría mostrar que al aprender electrostática hemos aprendido simultáneamente muchos otros temas. Encontraremos que las ecuaciones de la electrostática aparecen en diversos lugares de la física. Mediante una traducción directa de las soluciones (por supuesto que ecuaciones matemáticas iguales deben tener soluciones iguales) es posible resolver problemas de otros campos con la misma facilidad —o con la misma dificultad— que en la electrostática.

Como sabemos, las ecuaciones de la electrostática son:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\kappa\boldsymbol{E})=\frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon_0}, \tag{12.1}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=0. \tag{12.2}$$

(Tomamos las ecuaciones de la electrostática con dieléctricos para tener la situación más general.) Se puede expresar la misma física en otra forma matemática:

$$\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{\nabla}\phi, \tag{12.3}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\kappa\,\boldsymbol{\nabla}\phi)=-\frac{\rho_{\text{lib}}}{\epsilon_0}. \tag{12.4}$$

Ahora bien, la cuestión es que hay muchos problemas físicos cuyas ecuaciones matemáticas tienen la misma forma. Hay un potencial (ϕ) cuyo gradiente multiplicado por una función escalar (κ) tiene una divergencia igual a otra función escalar ($-\rho_{\text{lib}}/\epsilon_0$).

Cualquier cosa que sepamos sobre electrostática se puede transferir inmediatamente a ese otro tema y *viceversa* (funciona en ambos sentidos, por supuesto: si el otro tema tiene ciertas características particulares conocidas, podemos aplicar ese conocimiento al problema electrostático correspondiente). Queremos considerar una serie de ejemplos tomados de diferentes temas que producen ecuaciones de esta forma.

12-2 El flujo de calor; la fuente puntual cerca de un contorno plano infinito

Hemos discutido un ejemplo anteriormente (sección 3-4): el flujo de calor. Imaginen un bloque de material, que no necesita ser homogéneo sino que puede consistir de materiales diferentes en distintos lugares, en el cual la temperatura varía de punto a punto. Consecuente con estas variaciones de temperatura, hay un flujo de calor que se puede representar mediante el vector $\boldsymbol{h}$. Representa la cantidad de energía calórica que fluye por unidad de tiempo a través de un área unitaria perpendicular al flujo. Así, la divergencia de $\boldsymbol{h}$ representa la velocidad por unidad de volumen por el cual el calor abandona una región:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h} = \text{velocidad de calor saliente por unidad de volumen.}$$

(Podríamos escribir la ecuación en forma integral —como lo hicimos en electrostática con la ley de Gauss—, la cual diría que el flujo a través de una superficie es igual a la velocidad del cambio de la energía térmica dentro del material. No nos molestaremos en traducir las ecuaciones de aquí para allá entre las formas diferencial e integral, porque ocurre exactamente lo mismo que en la electrostática.)

La velocidad con que se genera o absorbe calor en diversos lugares depende, naturalmente, del problema. Supongan, por ejemplo, que hay una fuente de calor dentro del material (quizá una fuente radiactiva, o un resistor calentado con una corriente eléctrica). Llamemos s a la energía térmica producida por la fuente, por unidad de volumen y por segundo. Puede que también haya pérdidas (o ganancias) de energía térmica hacia otras energías internas dentro del volumen. Si u es la energía interna por unidad de volumen, $-du/dt$ también será una "fuente" de energía térmica. Tenemos, entonces,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h} = s - \frac{du}{dt}. \tag{12.5}$$

No vamos a discutir precisamente ahora la ecuación completa donde las cosas varían en el tiempo, porque estamos haciendo una analogía con la electrostática, donde nada depende del tiempo. Consideraremos únicamente problemas de *flujo estacionario de calor*, en los cuales fuentes constantes han producido un estado de equilibrio. En estos casos

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{h} = s. \tag{12.6}$$

Por supuesto, es necesario tener otra ecuación que describa cómo fluye el calor en diversos lugares. En muchos materiales la corriente de calor es aproximadamente proporcional a la rapidez de variación de la temperatura con la posición: cuanto mayor sea la diferencia de temperatura, mayor será la corriente de calor. Como hemos visto, el *vector* corriente de calor es proporcional al gradiente de temperatura. La constante de proporcionalidad K, que es una propiedad del material, se llama *conductividad térmica*:

$$\boldsymbol{h} = -K\,\boldsymbol{\nabla} T. \tag{12.7}$$

Si las propiedades del material varían de un lugar a otro, se tiene que $K = K(x, y, z)$, es función de la posición. [La ecuación (12.7) no es tan fundamental como la (12.5), que expresa la conservación de la energía térmica, ya que la primera depende de una propiedad especial de la sustancia.] Si ahora sustituimos la ecuación (12.6) por la ecuación (12.7), tenemos:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (K\,\boldsymbol{\nabla} T) = -s, \tag{12.8}$$

que tiene exactamente la misma forma que (12.4). *Los problemas de flujo estacionario de calor y los problemas de electrostática son los mismos.* El vector flujo de calor $\boldsymbol{h}$ corresponde a $\boldsymbol{E}$ y la temperatura T corresponde a ϕ. Ya hemos notado que una fuente puntual de calor produce un campo de temperatura que varía como $1/r$ y un flujo de calor que varía como $1/r^2$. Esto no es nada más que una traducción de los enunciados de la electrostática que dicen: una carga

puntual genera un potencial que varía como $1/r$ y un campo eléctrico que varía como $1/r^2$. En general, podemos resolver los problemas estáticos de calor tan fácilmente como los problemas electrostáticos.

Consideremos un ejemplo simple. Supongan que tenemos un cilindro de radio a a temperatura T_1, mantenida por la generación de calor en el cilindro (podría ser, por ejemplo, un alambre por el que circula corriente, o una cañería dentro de la cual se está condensando vapor). El cilindro está cubierto de una vaina concéntrica de material aislador que tiene una conductividad K. Digamos que el radio exterior de la aislación es b y que se mantiene el exterior a temperatura T_2 [figura 12-1(a)]. Queremos hallar a qué velocidad pierde calor el alambre, o la cañería de vapor, o lo que haya en el centro. Sea G la cantidad total del calor perdido, de un pedazo de longitud L de un tubo; qué es lo que estamos tratando de encontrar.

¿Cómo podemos resolver este problema? Pues bien, tenemos las ecuaciones diferenciales, pero como son iguales a las de la electrostática, en realidad ya hemos resuelto el problema matemático. El problema análogo es el de un conductor de radio a con potencial ϕ_1, separado de otro conductor de radio b con potencial ϕ_2, con una capa concéntrica de material dieléctrico en medio, como se muestra en la figura 12-1(b). Como el flujo de calor $\boldsymbol{h}$ corresponde al campo eléctrico $\boldsymbol{E}$, la cantidad G que queremos encontrar afecta al flujo del campo eléctrico, es decir, resulta la carga eléctrica sobre ϵ_0. Hemos resuelto el problema electrostático empleando la ley de Gauss. Seguiremos el mismo procedimiento en nuestro problema de flujo de calor.

Por la simetría de la situación, sabemos que h sólo depende de la distancia al centro. Por lo tanto, encerramos la cañería dentro de un cilindro gaussiano de longitud L y radio r. Sabemos por la ley de Gauss que el flujo de calor h multiplicado por el área $2\pi rL$ de la superficie debe ser igual a la cantidad total de calor generada dentro, que es lo que estamos llamando G:

$$2\pi rLh = G \qquad \text{o} \qquad h = \frac{G}{2\pi rL}. \tag{12.9}$$

El flujo de calor es proporcional al gradiente de temperatura:

$$\boldsymbol{h} = -K\,\boldsymbol{\nabla} T,$$

o sea que en este caso el módulo de $\boldsymbol{h}$ es

$$h = -K\,\frac{dT}{dr}.$$

Ésta, junto con (12.9), da

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{G}{2\pi KLr}. \tag{12.10}$$

Integrando desde $r = a$ hasta $r = b$, obtenemos

$$T_2 - T_1 = -\frac{G}{2\pi KL}\ln\frac{b}{a}. \tag{12.11}$$

Despejando G, encontramos:

$$G = \frac{2\pi KL(T_1 - T_2)}{\ln(b/a)}. \tag{12.12}$$

Este resultado corresponde exactamente al resultado para la carga sobre un condensador cilíndrico

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{2\pi\kappa L(\phi_1 - \phi_2)}{\ln(b/a)}.$$

Los problemas son iguales y tienen soluciones iguales. Por nuestro conocimiento de electrostática sabemos también cuánto calor pierde un tubo aislado.

Veamos otro ejemplo de flujo de calor. Supongamos que deseamos conocer el flujo de calor en las cercanías de una fuente puntual de calor ubicada un poco por debajo de la superficie de la Tierra, o cerca de la superficie de un gran bloque

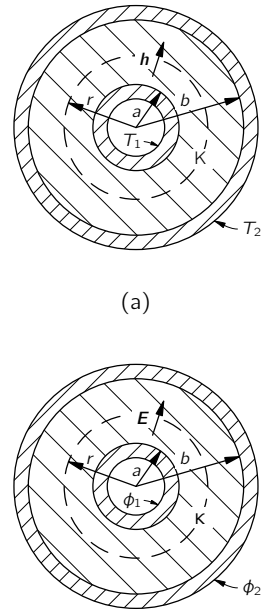


Figura 12-1. (a) El flujo de calor en una geometría cilíndrica. (b) El problema eléctrico correspondiente.

de metal. La fuente de calor localizada podría ser una bomba atómica que fue colocada bajo tierra, dejando una fuente intensa de calor, o podría corresponder a una pequeña fuente radiactiva dentro de un bloque de hierro; hay numerosas posibilidades.

Trataremos el problema idealizado de una fuente puntual de calor de intensidad G a distancia a por debajo de la superficie de un bloque infinito de material uniforme cuya conductividad térmica es K. Y despreciaremos la conductividad térmica del aire fuera del material. En consecuencia, determinaremos la distribución del calor sobre la superficie del bloque. ¿Qué grado de temperatura tendrá encima de la fuente y en diversos lugares de la superficie del bloque?

¿Cómo lo resolveremos? Es como un problema electrostático con dos materiales de coeficientes dieléctricos κ diferentes a ambos lados de un plano de separación. ¡Ajá! Quizá es el análogo de una carga puntual cerca del límite entre un dieléctrico y un conductor, o algo similar. Veamos cuál es la situación cerca de la superficie. La condición física es que la componente normal de $\boldsymbol{h}$ sobre la superficie es *cero*, puesto que hemos supuesto que no hay flujo de calor saliendo del bloque. Tenemos que preguntar: ¿en qué problema electrostático tenemos la condición de que la componente normal del campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ (que es análogo a $\boldsymbol{h}$) sea *cero* en una superficie? ¡No hay ninguno!

Ahora bien, ésa es una de las cosas con las que hay que tener cuidado. Por razones físicas puede haber ciertas restricciones sobre los tipos de condiciones matemáticas que surjan en un tema cualquiera. Así pues, si hemos analizado la ecuación diferencial únicamente en ciertos casos limitados, puede que nos hayamos perdido algunos tipos de soluciones que pueden presentarse en otras situaciones físicas. Por ejemplo, no hay ningún material con una constante dieléctrica que sea cero, mientras que el vacío sí tiene conductividad térmica cero. Por eso no hay ninguna analogía electrostática para un aislador perfecto del calor. Sin embargo, podemos seguir usando los mismos *métodos*. Podemos tratar de *imaginar* lo que ocurriría si la constante dieléctrica *fuera* cero; por supuesto, la constante dieléctrica nunca es cero en ninguna situación real. Pero podría ser que tuviéramos un caso de un material con una constante dieléctrica muy *alta*, de modo que pudiéramos despreciar la constante dieléctrica del aire exterior.

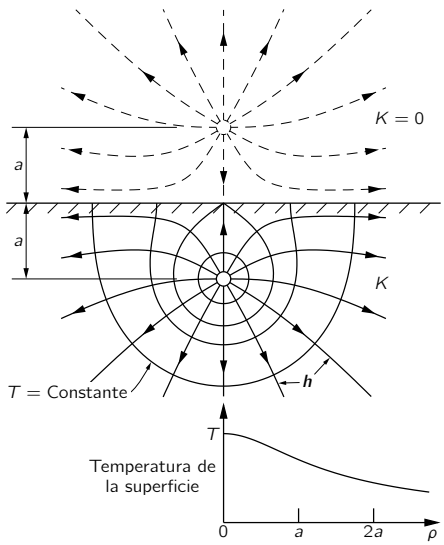


Figura 12-2. Flujo de calor e isotermas cerca de una fuente puntual de calor a una distancia *a* debajo de la superficie de un buen conductor térmico.

¿Cómo hallar un campo eléctrico que *no* tenga componente perpendicular a la superficie, es decir, un campo que siempre sea *tangente* a la superficie? Habrán notado que nuestro problema es opuesto al de una carga puntual cerca de un conductor plano. Ahí queríamos que el campo fuera *perpendicular* a la superficie, porque el conductor estaba todo al mismo potencial. En el problema eléctrico inventamos una solución imaginando una carga puntual detrás de la placa conductora. Podemos usar la misma idea de nuevo. Tratamos de buscar una "fuente imagen" que haga automáticamente el componente normal del campo cero en la superficie. La figura 12-2 muestra la solución. Así, una fuente imagen del *mismo signo* y de la misma intensidad colocada a la distancia a por encima de la superficie hará que el campo siempre sea horizontal en la superficie. Las componentes normales debidas a las dos fuentes se cancelan.

Por lo tanto, nuestro problema de flujo de calor está resuelto. ¡En todo punto la temperatura es igual, por analogía directa, al potencial debido a dos cargas puntuales iguales! La temperatura T a una distancia r de la única fuente puntual G en un medio infinito es:

$$T = \frac{G}{4\pi K r}. \tag{12.13}$$

(Por supuesto, esto es lo análogo a $\phi = q/4\pi\epsilon_0 R$.) Para una fuente puntual junto con su fuente imagen, la temperatura es:

$$T = \frac{G}{4\pi K r_1} + \frac{G}{4\pi K r_2}. \tag{12.14}$$

Esta fórmula nos da la temperatura en cualquier punto del bloque. La figura 12-2 muestra varias superficies isotérmicas. También muestra las líneas de $\boldsymbol{h}$, que se pueden obtener de $\boldsymbol{h} = -K\boldsymbol{\nabla}T$.

En un principio nos interesamos en la distribución de temperatura sobre la superficie. Para un punto de la superficie a una distancia ρ del eje, $r_1 = r_2 = \sqrt{\rho^2 + a^2}$, de modo que

$$T(\text{superficie}) = \frac{1}{4\pi K}\,\frac{2G}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}. \tag{12.15}$$

La figura muestra también esta función. Naturalmente, la temperatura justo por encima de la fuente es mayor que en puntos más lejanos. Éste es el tipo de problema que los geofísicos necesitan resolver frecuentemente. Vemos ahora que es el mismo tipo de cosas que ya hemos estado resolviendo en electricidad.

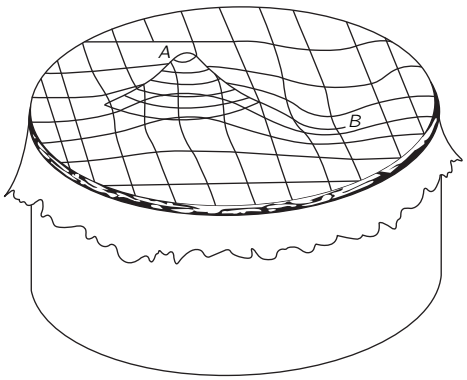


Figura 12-3. Lámina delgada de goma estirada sobre un marco cilíndrico (como en un tambor). Si se empuja la lámina hacia arriba en A y hacia abajo en B, ¿cuál es la forma de la superficie?

12-3 La membrana tensa

Consideremos ahora una situación física completamente diferente que, no obstante, nos da de nuevo las mismas ecuaciones. Consideren una lámina delgada de goma —una membrana— que ha sido estirada sobre un gran marco horizontal (como en un tambor). Supongan ahora que se empuja la membrana hacia arriba en un lugar y hacia abajo en otro, como lo muestra la figura 12-3. ¿Podemos describir la forma de la superficie? Mostraremos cómo se puede resolver el problema cuando las deflexiones de la membrana no son muy grandes.

En la membrana hay fuerzas porque está tensa. Si hiciéramos un pequeño corte en cualquier parte, los dos lados del corte se separarían (véase la figura 12-4). Hay, pues, una *tensión superficial* en la membrana, análoga a la tensión unidimensional en una cuerda tensa. Definimos la magnitud de la tensión superficial τ como la fuerza *por unidad de longitud* necesaria para mantener unidos los dos bordes de un corte como uno de los mostrados en la figura 12-4.

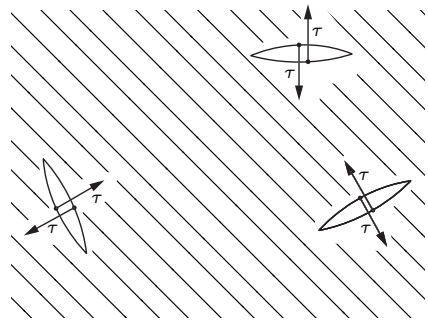


Figura 12-4. La tensión superficial τ de una lámina de goma tensa es la fuerza transversal a una línea por unidad de longitud.

Supongamos ahora que consideramos una sección vertical de la membrana. Aparecerá como una curva, como la que muestra la figura 12-5. Sea u el desplazamiento vertical de la membrana respecto a su posición normal, y x y y las coordenadas en un plano horizontal; la sección transversal mostrada es paralela al eje x.

Consideren un trocito de la superficie de longitud Δx y ancho Δy. Habrá fuerzas sobre el trozo provenientes de la tensión superficial a lo largo de cada lado. La fuerza a lo largo del borde 1 de la figura será $\tau_1 \Delta y$, en dirección tangente a la superficie, o sea, formando un ángulo θ_1 con la horizontal. A lo largo del borde 2 la fuerza será $\tau_2 \Delta y$ a un ángulo θ_2 (habrá fuerzas similares sobre los otros dos bordes del trozo, pero nos olvidaremos de ellas por el momento). La fuerza resultante *hacia arriba* sobre los bordes 1 y 2 del trozo es

$$\Delta F = \tau_2\,\Delta y \operatorname{sen}\theta_2 - \tau_1\,\Delta y \operatorname{sen}\theta_1.$$

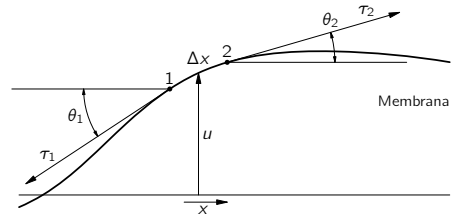


Figura 12-5. Sección transversal de la lámina deflectada.

Nos limitaremos a considerar pequeñas deformaciones de la membrana, es decir, *pequeñas pendientes*; podemos entonces remplazar $\operatorname{sen}\theta$ por $\tan\theta$, la cual se puede escribir como $\partial u/\partial x$. La fuerza es entonces

$$\Delta F = \left[\tau_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2 - \tau_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1\right]\Delta y.$$

La cantidad entre corchetes puede ser bien escrita (para Δx pequeño) como:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x;$$

luego,

$$\Delta F = \frac{\partial}{\partial x}\left(\tau\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x\,\Delta y.$$

Habrá otra contribución a ΔF proveniente de los otros dos bordes; el total es evidentemente:

$$\Delta F = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\tau\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\Delta x\,\Delta y. \tag{12.16}$$

Las deformaciones del diafragma se deben a fuerzas externas. Representemos con f la fuerza *hacia arriba por unidad de área* que ejercen sobre la membrana (una especie de "presión") *las fuerzas externas*. Cuando la membrana está en equilibrio (el caso *estático*), esta fuerza se debe equilibrar con la fuerza interna que acabamos de calcular, ecuación (12.16). Esto es lo siguiente:

$$f = -\frac{\Delta F}{\Delta x\,\Delta y}.$$

La ecuación (12.16) se puede escribir entonces como:

$$f = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\tau\,\boldsymbol{\nabla}u), \tag{12.17}$$

donde $\boldsymbol{\nabla}$ significa el operador gradiente bidimensional $(\partial/\partial x, \partial/\partial y)$. Además, tenemos la ecuación diferencial que relaciona $u(x,y)$ con las fuerzas aplicadas $f(x,y)$ y la tensión superficial $\tau(x,y)$ que, en general, puede variar de un punto a otro de la membrana; las deformaciones de un cuerpo elástico tridimensional también están regidas por ecuaciones similares, pero nos limitaremos a dos dimensiones. Nos ocuparemos únicamente del caso en que la tensión τ es constante en toda la membrana. Entonces podemos escribir la ecuación (12.17) en la forma

$$\nabla^2 u = -\frac{f}{\tau}. \tag{12.18}$$

¡Tenemos otra ecuación igual a la de la electrostática! —sólo que esta vez se limita a dos dimensiones—. El desplazamiento u corresponde a ϕ y f/τ a ρ/ϵ_0. Así pues, todo lo que hemos hecho para hojas cargadas infinitas y planas, o alambres largos y paralelos, o cilindros cargados, se aplica directamente a la membrana tensa.

Supongan que presionamos la membrana en un punto hasta una *altura* determinada —o sea que fijamos los valores de u en algunos puntos—. Es lo análogo a tener un *potencial* determinado en los puntos correspondientes en una situación eléctrica. Así, por ejemplo, podemos hacer un "potencial" positivo empujando hacia arriba la membrana con un objeto que tenga la forma transversal del correspondiente conductor cilíndrico. Por ejemplo, si empujamos la membrana hacia arriba con una varilla redonda, la superficie adoptará la forma mostrada en la figura 12-6. La altura u es lo mismo que el potencial electrostático ϕ de una varilla cilíndrica cargada. Se cae como $\ln 1/r$; la *pendiente*, que corresponde al campo eléctrico E, decrece como $1/r$.

La lámina estirada de goma ha sido usada a menudo para resolver experimentalmente problemas *eléctricos* complicados. ¡Se usa la analogía al revés! Se presiona la lámina con diversas varillas y barras hasta alturas que corresponden a los potenciales de un conjunto de electrodos. Las medidas de la altura dan entonces el potencial eléctrico correspondiente a la situación eléctrica. Se ha llevado aún más allá la analogía. Siempre que se ponen bolas pequeñas sobre la membrana, su movimiento corresponde aproximadamente al movimiento de electrones en el campo eléctrico correspondiente. Así, se puede *ver* realmente a los "electrones" moverse en sus trayectorias. Además, este método fue utilizado para diseñar la geometría complicada de muchos tubos fotomultiplicadores (como los utilizados en los contadores de centelleo y el que se usa para controlar el haz de luz de los faros delanteros en los Cadillacs). Este método aún se utiliza pero su precisión es limitada. En los trabajos más precisos es mejor determinar los campos por métodos numéricos, empleando grandes computadoras electrónicas.

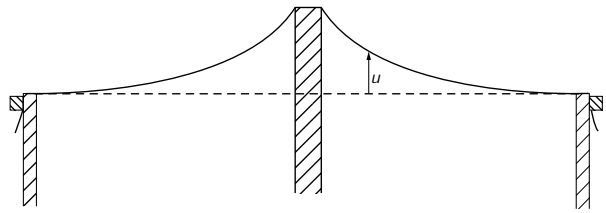


Figura 12-6. Sección transversal de una lámina de goma tensa empujada hacia arriba con una varilla redonda. La función $u(x,y)$ es la misma que el potencial eléctrico $\phi(x,y)$ cerca de una varilla cargada muy larga.

12-4 La difusión de neutrones; una fuente esférica uniforme en un medio homogéneo

Tomemos otro ejemplo que da el mismo tipo de ecuaciones, esta vez relacionado con la difusión. En el capítulo 43 del volumen I consideramos la difusión de iones sólo en un gas y la de un gas a través de otro. Tomemos esta vez un ejemplo diferente; la difusión de neutrones en un material, como el grafito. Escogemos hablar del grafito (una forma pura del carbono) porque el carbono no absorbe neutrones lentos. Los neutrones son libres de vagar por él de un lado a otro. Viajan en línea recta por varios centímetros, en promedio, antes de que un núcleo los disperse y los desvíe en una nueva dirección. Luego, si tenemos un gran bloque —de varios metros de lado— los neutrones que estaban inicialmente en un lugar se difundirán hacia otros lugares. Queremos hallar una descripción de su comportamiento medio; es decir, de su *flujo medio*.

Sea $N(x,y,z)\Delta V$ el número de neutrones en el elemento de volumen ΔV ubicado en el punto (x,y,z). A causa de su movimiento, algunos neutrones estarán saliendo de ΔV, y otros estarán entrando. Si hay más neutrones en una región que en otra cercana, habrá más neutrones que van de la primera región a la segunda que en sentido opuesto; habrá un flujo resultante. Siguiendo los razonamientos hechos en el capítulo 43 del volumen I, describimos el flujo mediante un vector del flujo $\boldsymbol{J}$. Su componente x, J_x, es el número *resultante* de neutrones que pasan por unidad de tiempo a través de un área unitaria perpendicular a la dirección x. Encontramos lo siguiente:

$$J_x = -D\,\frac{\partial N}{\partial x}, \tag{12.19}$$

donde la constante de difusión D está dada en función de la velocidad media v, y el camino libre medio l en medio de dispersiones está dado por:

$$D = \frac{1}{3}\,lv.$$

La ecuación vectorial para $\boldsymbol{J}$ es la siguiente:

$$\boldsymbol{J} = -D\,\boldsymbol{\nabla} N. \tag{12.20}$$

La velocidad con que los neutrones fluyen a través de cualquier elemento de superficie da es $\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}da$ (donde, como de costumbre, $\boldsymbol{n}$ es el vector unitario normal). El flujo resultante que *sale de un elemento de volumen* es entonces (siguiendo el razonamiento gaussiano habitual) $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}dV$. Este flujo daría lugar a una disminución en el tiempo del número que hay en ΔV, a no ser que se creen neutrones en ΔV (por algún proceso nuclear). Si dentro del volumen hay fuentes que generan S neutrones por unidad de tiempo en la unidad de volumen, el flujo resultante que sale de ΔV será igual a $(S - \partial N/\partial t)\Delta V$. Tenemos entonces que

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J} = S - \frac{\partial N}{\partial t}. \tag{12.21}$$

Combinando (12.21) con (12.20) obtenemos la *ecuación de difusión de neutrones*

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(-D\,\boldsymbol{\nabla} N) = S - \frac{\partial N}{\partial t}. \tag{12.22}$$

En el caso estático —en el que $\partial N/\partial t = 0$— ¡tenemos la ecuación (12.4) de nuevo! Podemos emplear nuestro conocimiento de electrostática para resolver problemas sobre la difusión de neutrones. Resolvamos, pues, un problema. (Ustedes se preguntarán: ¿*por qué* resolver otro problema si ya hemos hecho todos los problemas de electrostática? ¡Podemos hacerlo más *rápido* esta vez porque *hemos* resuelto los problemas electrostáticos!)

Supongan que tenemos un bloque de material en el cual se están generando neutrones —digamos que por fisión de uranio— uniformemente en toda una región esférica de radio a (figura 12-7). Nos gustaría saber: ¿cuál es la densidad

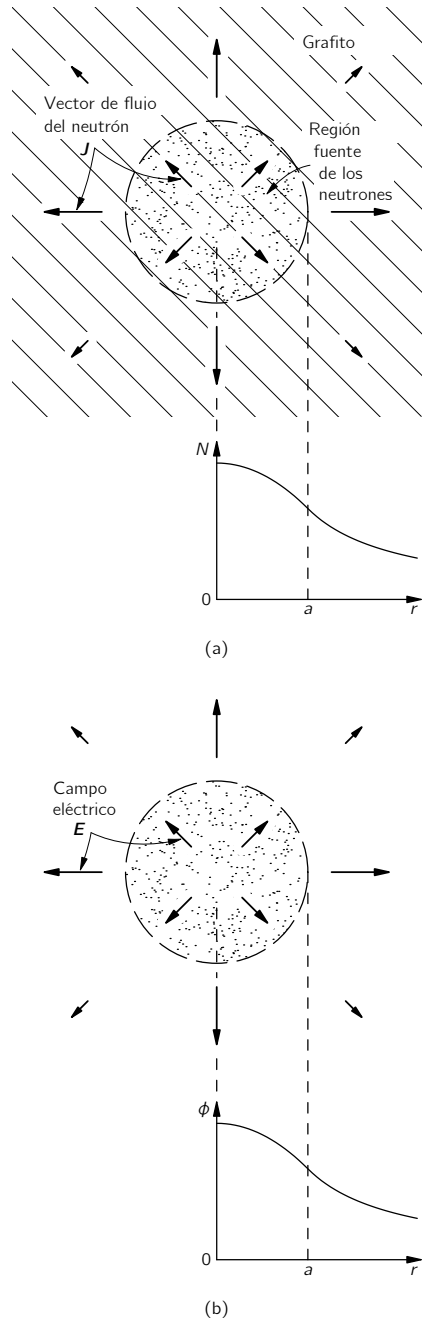


Figura 12-7. (a) Los neutrones producidos uniformemente en toda una esfera de radio a en un gran bloque de grafito se difunden hacia afuera. Se halla la densidad N de neutrones en función de r, la distancia al centro de la fuente. (b) La situación electrostática análoga: una esfera uniforme de carga, donde N corresponde a ϕ y $\boldsymbol{J}$ corresponde a $\boldsymbol{E}$.

de neutrones en todo punto? ¿Hasta dónde es uniforme la densidad de neutrones en la región donde se están generando? ¿Cuál es el cociente entre la densidad de neutrones en el centro y la densidad de neutrones en la superficie de la región de producción? Es fácil encontrar las respuestas. La densidad de la fuente S_0 remplaza a la densidad de carga ρ, así que nuestro problema es lo mismo que el problema de una esfera de densidad de carga uniforme. Hallar N es precisamente como hallar el potencial ϕ. Ya hemos calculado los campos dentro y fuera de una esfera cargada uniformemente; podemos integrarlos para obtener el potencial. Fuera, el potencial es $Q/4\pi\epsilon_0 r$, con la carga total Q dada por $4\pi a^3\rho/3$. Luego,

$$\phi_{\text{fuera}} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r}. \tag{12.23}$$

En los puntos interiores, el campo se debe únicamente a la carga $Q(r)$ dentro de una esfera de radio r, $Q(r) = 4\pi r^3\rho/3$; luego

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}. \tag{12.24}$$

El campo aumenta linealmente con r. Integrando E para obtener ϕ se llega a

$$\phi_{\text{dentro}} = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + \text{una constante}.$$

En el radio a, ϕ_{dentro} debe ser igual a ϕ_{fuera}, así que la constante debe ser $\rho a^2/2\epsilon_0$; estamos suponiendo que ϕ es cero a grandes distancias de la fuente, lo que corresponderá a un N nulo para los neutrones. En consecuencia,

$$\phi_{\text{dentro}} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}\left(\frac{3a^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right). \tag{12.25}$$

Sabemos inmediatamente cuál es la densidad de neutrones en nuestro otro problema. La respuesta es la siguiente:

$$N_{\text{fuera}} = \frac{Sa^3}{3Dr}, \tag{12.26}$$

y

$$N_{\text{dentro}} = \frac{S}{3D}\left(\frac{3a^2}{2} - \frac{r^2}{2}\right). \tag{12.27}$$

La figura 12-7 muestra N en función de r.

¿Y cuál es el cociente entre la densidad en el centro y la densidad en el borde? En el centro ($r = 0$) es proporcional a $3a^2/2$. En el borde ($r = a$) es proporcional a $2a^2/2$, así que el cociente de densidades es $3/2$. Una fuente uniforme no produce una densidad uniforme de neutrones. Ya lo ven, nuestro conocimiento de electrostática nos da un buen inicio para entender la física de reactores nucleares.

Hay muchas situaciones físicas en que la difusión desempeña un papel importante. El movimiento de iones a través de un líquido, o de electrones a través de un semiconductor, obedece a la misma ecuación. Encontramos una y otra vez las mismas ecuaciones.

12-5 El flujo irrotacional de un fluido; el flujo alrededor de una esfera

Consideremos ahora un ejemplo que no es realmente muy bueno, porque las ecuaciones que usaremos no representarán realmente el tema con total generalidad, sino únicamente en una situación idealizada artificial. Tomemos el problema del *flujo de agua*. En el caso de la membrana tensa nuestras ecuaciones eran una aproximación que era correcta sólo para *desviaciones pequeñas*. En nuestra consideración del flujo de agua no haremos ese tipo de aproximación; tenemos que hacer restricciones que de ninguna manera se aplican al agua real. Trataremos únicamente el caso del flujo estacionario de un líquido *incompresible, sin viscosidad*

y sin circulación. Representamos entonces el flujo dando la velocidad $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ en función de la posición $\boldsymbol{r}$. Si el movimiento es estacionario (el único caso para el cual hay una anología electrostática) $\boldsymbol{v}$ es independiente del tiempo. Si ρ es la densidad del fluido, $\rho\boldsymbol{v}$ es la cantidad de masa que pasa por unidad de tiempo a través de un área unitaria. Por la conservación de la materia, la divergencia de $\rho\boldsymbol{v}$ será, en general, la derivada respecto al tiempo de la masa del material por unidad de volumen. Supondremos que no hay ningún proceso de creación o destrucción continua de materia. La conservación de la materia requiere entonces que $\boldsymbol{\nabla}\cdot\rho\boldsymbol{v}=0$. (En general, tendría que ser igual a $-\partial\rho/\partial t$, pero como nuestro fluido es incompresible, ρ no puede variar.) Como ρ es la misma en todo punto, podemos sacarla como factor y eliminarla, y nuestra ecuación es simplemente:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=0.$$

¡Esto está bien! Tenemos electrostática de nuevo (sin cargas); es justamente como $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=0$. ¡No tanto! La electrostática *no* es simplemente $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=0$. Es un *par* de ecuaciones. Pero una ecuación no nos dice lo suficiente; todavía necesitamos una ecuación adicional. Para tener lo mismo que en electrostática, deberíamos tener también que el *rotacional* de $\boldsymbol{v}$ es cero. Pero esto no es válido en general para los líquidos reales. La mayoría de los líquidos comúnmente desarrollan cierto movimiento. Así pues, estamos limitados a la situación en que el fluido no tiene movimiento. Este flujo se llama comúnmente *irrotacionals*. De todas maneras, si hacemos todas nuestras hipótesis, podemos *imaginar* un caso de flujo de fluido que sea análogo a la electrostática. Tomamos entonces

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=0 \tag{12.28}$$

y

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}=0. \tag{12.29}$$

Queremos enfatizar que el número de situaciones en que el flujo de líquido sigue estas ecuaciones está lejos de ser la gran mayoría, pero hay algunas. Tienen que ser casos en los que podemos despreciar la tensión superficial, la compresibilidad y la viscosidad, y en los que podamos suponer que el flujo es irrotacional. Estas suposiciones son tan raramente válidas para el agua real que el matemático John von Neumann dijo que la gente que analiza las ecuaciones (12.28) y (12.29) ¡está estudiando "agua seca"!; en los capítulos 40 y 41 trataremos detalladamente el problema del flujo de fluidos.

Como $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}=0$, la velocidad del "agua seca" se puede escribir como el gradiente de un potencial:

$$\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{\nabla}\psi. \tag{12.30}$$

¿Cuál es el significado físico de ψ? No hay ningún significado que sea muy útil. Se puede escribir la velocidad como el gradiente de un potencial simplemente porque el flujo es irrotacional. Y por analogía con la electrostática, ψ se llama *potencial de velocidades*, pero no está relacionado con una energía potencial como ϕ lo está. Como la divergencia de $\boldsymbol{v}$ es cero, tenemos

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\psi)=\nabla^2\psi=0. \tag{12.31}$$

El potencial de velocidades ψ obedece a la misma ecuación diferencial que el potencial electrostático en el espacio libre ($\rho=0$).

Tomemos un problema de flujo irrotacional y veamos si podemos resolverlo con los métodos que hemos aprendido. Consideren el problema de una bola esférica cayendo a través de un líquido. Si va demasiado lentamente, las fuerzas de viscosidad, que estamos dejando de lado, serán importantes. Si va demasiado rápido, aparecerán pequeños remolinos (turbulencia) en su estela y habrá cierta circulación del agua. Pero si la bola no va ni demasiado rápido ni demasiado lento, es más o menos cierto que el flujo del agua cumple con nuestras suposiciones y podemos describir el movimiento del agua con nuestras ecuaciones simples.

Es conveniente describir lo que ocurre en un sistema de referencia *fijo a la esfera*. En este sistema hacemos la pregunta: ¿cómo fluye el agua alrededor de

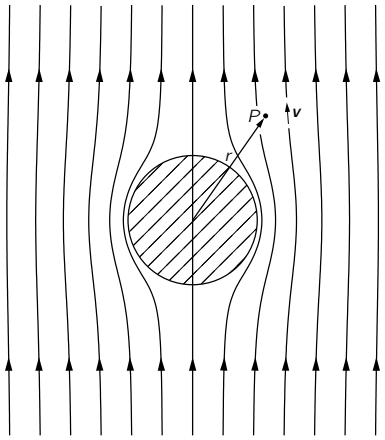


Figura 12-8. El campo de velocidades del flujo irrotacional de un fluido alrededor de una esfera.

una esfera en reposo cuando a grandes distancias el flujo es uniforme? Es decir, cuando lejos de la esfera el flujo es el mismo en todas partes. El flujo cerca de la esfera será como se muestra por medio de las líneas de corriente en la figura 12-8. Estas líneas, siempre paralelas a $\boldsymbol{v}$, corresponden a las líneas de campo eléctrico. Queremos obtener una descripción cuantitativa del campo de velocidades, es decir, una expresión de la velocidad en todo punto P.

Podemos hallar la velocidad a partir del gradiente de ψ, así que calculemos primero el potencial. Queremos un potencial que satisfaga la ecuación (12.31) en todo punto y que también satisfaga dos restricciones: (1) no hay flujo dentro de la región esférica encerrada por la superficie de la bola y (2) el flujo es constante a grandes distancias. Para satisfacer (1) la componente de $\boldsymbol{v}$ normal a la superficie de la esfera debe ser cero. Esto significa que $\partial\psi/\partial r$ es cero para $r = a$. Para satisfacer (2), debemos tener $\partial\psi/\partial z = v_0$ en todos los puntos donde $r \gg a$. Estrictamente hablando, no hay ningún caso electrostático que corresponda exactamente a nuestro problema. En realidad corresponde a tener una esfera de constante dieléctrica *cero* en un campo eléctrico uniforme. Si hubiéramos obtenido la solución del problema de una esfera de constante dieléctrica κ en un campo uniforme, haciendo $\kappa = 0$ tendríamos inmediatamente la solución de este problema.

No hemos resuelto este problema electrostático particular en detalle, pero hagámoslo ahora (podríamos trabajar directamente sobre el problema de fluidos con $\boldsymbol{v}$ y ψ, pero usaremos $\boldsymbol{E}$ y ϕ porque estamos acostumbrados a ellos).

El problema es: hallar una solución de $\nabla^2\phi = 0$ tal que $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$ sea una constante, $\boldsymbol{E}_0$ digamos, para r grande y tal que la componente radial de $\boldsymbol{E}$ sea igual a cero para $r = a$. Esto es,

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=a} = 0. \tag{12.32}$$

En nuestro problema interviene un nuevo tipo de condición de contorno, no aquél donde ϕ es una constante sobre una superficie sino que $\partial\phi/\partial r$ es una constante. Esto es un poco diferente. No es fácil obtener la respuesta inmediatamente. Antes que nada, sin la esfera, ϕ sería $-E_0 z$. Entonces $\boldsymbol{E}$ estaría en la dirección z y tendría en todo punto el módulo constante E_0. Ahora bien, hemos analizado el caso de una esfera que tiene polarización uniforme dentro de ella y encontramos que el campo dentro de tal esfera es un campo uniforme y que fuera es igual al campo de un dipolo puntual ubicado en el centro. Así pues, supongamos que la solución que buscamos es una superposición de un campo uniforme más el campo de un dipolo. El potencial de un dipolo (capítulo 6) es $pz/4\pi\epsilon_0 r^3$. Por lo tanto suponemos lo siguiente:

$$\phi = -E_0 z + \frac{pz}{4\pi\epsilon_0 r^3}. \tag{12.33}$$

Como el campo decrece como $1/r^3$, a grandes distancias tenemos simplemente el campo E_0. Nuestra conjetura satisfará automáticamente la condición (2) enunciada más arriba. ¿Pero qué tomamos para la intensidad p del dipolo? Para hallarla podemos usar la otra condición sobre ϕ, ecuación (12.32). Tenemos que derivar ϕ respecto a r, pero por supuesto tenemos que hacerlo manteniendo el ángulo θ constante, así que es más conveniente expresar primero ϕ en función de r y θ, en lugar de z y r. Como $z = r\cos\theta$, obtenemos

$$\phi = -E_0 r\cos\theta + \frac{p\cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \tag{12.34}$$

La componente radial de $\boldsymbol{E}$ es

$$-\frac{\partial\phi}{\partial r} = +E_0\cos\theta + \frac{p\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}. \tag{12.35}$$

La misma debe ser cero en $r = a$ para todo θ. Esto será cierto si

$$p = -2\pi\epsilon_0 a^3 E_0. \tag{12.36}$$

Observen cuidadosamente que si ambos términos de la ecuación (12.35) no hubieran tenido la misma dependencia de θ, no habría sido posible elegir p de modo que (12.35) resultara nula en $r = a$ para todo ángulo. El que la cosa salga bien significa que hemos hecho una conjetura acertada al escribir la ecuación (12.33). Por supuesto, cuando hicimos la conjetura estábamos pensando en lo que seguiría; sabíamos que necesitaríamos otro término que (a) satisficiera $\nabla^2\phi = 0$ (cualquier campo real lo haría), (b) dependiera de $\cos\theta$ y (c) cayera a cero para r grande. El campo dipolar es el único que satisface las tres.

Utilizando (12.36) nuestro potencial es

$$\phi = -E_0 \cos\theta\left(r + \frac{a^3}{2r^2}\right). \tag{12.37}$$

La solución del problema de flujo de fluido se puede escribir simplemente en la siguiente forma:

$$\psi = -v_0 \cos\theta\left(r + \frac{a^3}{2r^2}\right). \tag{12.38}$$

Es fácil hallar $\boldsymbol{v}$ a partir de este potencial. No seguiremos con el tema.

12-6 Iluminación; el plano alumbrado uniformemente

En esta sección nos dedicaremos a un problema físico completamente diferente —queremos ilustrar la gran variedad de posibilidades—. Esta vez haremos algo que conduce al mismo tipo de *integral* que encontramos en electrostática; siempre y cuando tenegamos un problema matemático que nos da cierta integral, sabemos algo acerca de las propiedades de esa integral si es la misma que teníamos que efectuar para otro problema. Tomamos nuestro ejemplo de la ingeniería de iluminación. Supongan que hay una fuente de luz a una distancia a por encima de una superficie plana. ¿Cuál es la iluminación de la superficie? Es decir, ¿cuál es la energía radiante que llega por unidad de tiempo a una unidad de área de la superficie? (véase figura 12-9). Suponemos que la fuente es esféricamente simétrica, de modo que radia luz igualmente en todas las direcciones. Entonces la cantidad de energía radiante que pasa a través de la unidad de área *perpendicular* al flujo de luz varía con la inversa del cuadrado de la distancia. Es evidente que la intensidad de la luz en dirección normal al flujo está dada por el mismo tipo de fórmula que el campo eléctrico de una fuente puntual. Si los rayos de luz llegan a la superficie formando un ángulo θ con la normal, la energía I_n que llega *por unidad de área* de la superficie está afectada de un factor $\cos\theta$, porque la misma energía llega sobre un área mayor en $1/\cos\theta$. Llamando S a la intensidad de nuestra fuente luminosa, la iluminación I_n de una superficie es

$$I_n = \frac{S}{r^2}\,\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{n}, \tag{12.39}$$

donde $\boldsymbol{e}_r$ es el vector unitario de la fuente y $\boldsymbol{n}$ es el vector unitario normal a la superficie. La iluminación I_n corresponde a la componente normal del campo

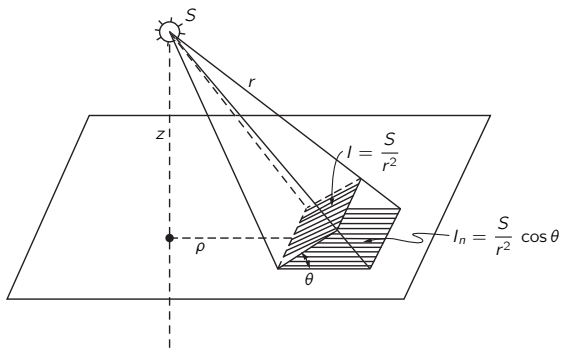


Figura 12-9. La iluminación I_n de una superficie es la energía radiante que llega por unidad de tiempo a una unidad de área de la superficie.

eléctrico de una carga puntual de intensidad $4\pi\epsilon_0 S$. Sabiendo esto, vemos que para cualquier distribución de fuentes de luz podemos encontrar la respuesta resolviendo el correspondiente problema electrostático. Calculamos la componente vertical del campo eléctrico sobre el plano debido a una distribución de carga en la misma forma que para la de las fuentes de luz.*

Consideren el siguiente ejemplo. Para cierta situación experimental especial deseamos disponer las cosas, de modo que la superficie superior de una mesa tenga una iluminación muy uniforme. Disponemos de tubos fluorescentes largos que radian uniformemente según su eje. Podemos iluminar la mesa colocando los tubos fluorescentes en un arreglo regular en el cielorraso, que está a una altura z de la mesa. ¿Cuál es el espacio más amplio b entre tubo y tubo que debemos usar si queremos que la iluminación de la superficie sea uniforme, digamos, dentro de uno en mil, por ejemplo? *Respuesta*: (1) encuentren el campo eléctrico de una red de alambres con espacio b, cargados uniformemente; (2) calculen la componente vertical del campo eléctrico; (3) determinen cuál debe ser el valor b para que las ondulaciones del campo no sean mayores de uno en mil.

En el capítulo 7 vimos que el campo eléctrico de una red de alambres cargados se podía representar como una suma de términos, cada uno de los cuales daba una variación sinusoidal del campo con un periodo de b/n, donde n es un entero. La amplitud de cualquiera de estos términos está dada por la ecuación (7.44):

$$F_n = A_n e^{-2\pi n z/b}.$$

Sólo necesitamos considerar $n = 1$, ya que queremos únicamente el campo en puntos no muy cercanos a la red. Para tener una solución completa, tendríamos que determinar también los coeficientes A_n, lo cual no hemos hecho todavía (aunque es un cálculo directo). Como necesitamos únicamente A_1 podemos estimar que su magnitud es aproximadamente la misma que la del campo medio. El factor exponencial nos daría entonces directamente la amplitud *relativa* de las variaciones. Si queremos que este factor sea 10^{-3}, encontramos que b debe ser $0.91z$. Si hacemos que el espaciamiento de los tubos fluorescentes sea 3/4 de la distancia al cielorraso, el factor exponencial es 1/4 000 y consideramos un factor 4 de seguridad, así que estamos bien seguros que tendremos la iluminación constante a menos de uno en mil (un cálculo exacto muestra que A_1 es realmente el doble del campo medio, entonces podemos decir que $b \approx 0.83z$). Es algo sorprendente que para esa uniformidad de iluminación la separación permitida de los tubos resultara tan grande.

12-7 La "unidad subyacente" de la naturaleza

En este capítulo, hemos querido mostrar que al aprender electrostática han aprendido al mismo tiempo cómo manejar muchos temas en física, y que teniendo esto en mente es factible aprender casi todos los temas de la física en un número limitado de años.

Sin embargo, es seguro que una pregunta se sugiere al final de esta discusión: *¿por qué son tan similares las ecuaciones de fenómenos diferentes?* Podríamos decir: "es la unidad subyacente de la naturaleza". Pero ¿qué significa eso? ¿Qué *podría* significar un enunciado como ése? Podría significar simplemente que las ecuaciones son similares para fenómenos diferentes; pero entonces no hemos dado, por supuesto, ninguna explicación. La "unidad subyacente" podría significar que todo está hecho de la misma materia prima y que, por lo tanto, obedece las mismas ecuaciones. Esto suena como una buena explicación, pero pensemos un poco. El potencial electrostático, la difusión de neutrones, el flujo de calor, ¿nos estamos realmente ocupando de la misma materia prima? ¿Podemos realmente imaginar que el potencial electrostático es *físicamente* idéntico a la temperatura

* Como estamos hablando de fuentes *incoherentes* cuyas *intensidades* siempre se suman linealmente, las cargas eléctricas análogas siempre tendrán el mismo signo. Además, nuestra analogía sirve únicamente para la energía luminosa que llega a la parte de arriba de una superficie opaca, de modo que tenemos que incluir en nuestra integral sólo las fuentes que brillan sobre la superficie (¡y no fuentes ubicadas debajo de la superficie!).

o a la densidad de partículas? Ciertamente, ϕ no es *exactamente lo mismo* que la energía térmica de partículas. El desplazamiento de una membrana *no* es ciertamente como una temperatura. ¿Por qué hay, entonces, una "unidad subyacente"?

Un examen más detallado de la física de los diferentes temas muestra, en verdad, que las ecuaciones no son realmente idénticas. La ecuación que encontramos para la difusión de neutrones es sólo una aproximación que es buena cuando la distancia sobre la cual estamos trabajando es grande frente al camino libre promedio. Siempre y cuando miremos de cerca, veríamos los neutrones individuales corriendo de un lado al otro. Ciertamente, el movimiento de un solo neutrón es algo completamente diferente de la variación continua que obtenemos resolviendo la ecuación diferencial. La ecuación diferencial es una aproximación porque suponemos que los neutrones están distribuidos de manera continua en el *espacio*.

¿Es posible que *ésta* sea la clave? ¿Que lo común a todos los fenómenos es el *espacio*, el armazón donde se pone la física? En tanto que las cosas sean razonablemente continuas en el espacio, las cosas importantes que intervendrán serán las derivadas de las cantidades respecto a la posición en el espacio. Es por eso que siempre obtenemos una ecuación con un gradiente. Las derivadas *tienen* que aparecer en forma de gradiente o de divergencia; como las leyes de la física son *independientes de la dirección* tienen que ser expresables en forma vectorial. Las ecuaciones de la electrostática son las ecuaciones vectoriales más simples que se pueden obtener únicamente con derivadas espaciales de cantidades. Cualquier otro problema *simple* —o simplificación de un problema complicado— tiene que parecerse a la electrostática. Lo común a todos nuestros problemas es que en ellos interviene el *espacio* y que hemos *imitado* lo que en realidad es un fenómeno complicado por medio de una ecuación diferencial simple.

Esto nos lleva a otra pregunta interesante. ¿Es quizá el mismo enunciado válido también para las ecuaciones *electrostáticas*? ¿Son también correctas únicamente como imitación continua de un mundo microscópico realmente mucho más complicado? ¿No será que el mundo real consiste en minúsculos X-ones que sólo se pueden ver a distancias *pequeñísimas*? ¿Y que en nuestras medidas siempre observamos en una escala tan grande que no podemos ver estos X-ones minúsculos y es por eso que obtenemos las ecuaciones diferenciales?

Nuestra teoría más reciente y completa de la electrodinámica tiene, por cierto, sus dificultades a distancias muy cortas. Así, en principio es posible que esas ecuaciones sean versiones continuas de algo. Se presentan como correctas hasta distancias de unos 10^{-14} cm, pero luego comienzan a parecer incorrectas. Es posible que haya alguna "maquinaria" subyacente no descubierta todavía, y que los detalles de la complejidad subyacente estén escondidos en las ecuaciones de aspecto continuo —como en la difusión "continua" de neutrones—. Pero nadie ha formulado todavía una teoría exitosa que funcione de esta manera.

Y lo más extraño es que (por razones que no comprendemos en absoluto) la combinación de la relatividad y la mecánica cuántica, como la conocemos, parece *prohibir* la invención de una ecuación que sea fundamentalmente diferente de la ecuación (12.4) y que al mismo tiempo no lleve a algún tipo de contradicción. O sea, no simplemente una discrepancia con los experimentos, sino una *contradicción interna*. Como, por ejemplo, la predicción de que la suma de las probabilidades de todos los sucesos posibles no sea igual a la unidad, o que a veces las energías resulten en números complejos, o cualquier idiotez de ésas. Nadie ha construido todavía una teoría de la electricidad para la cual se entienda $\nabla^2\phi = -\rho\epsilon_0$ como una aproximación continua a un mecanismo más básico, y que al mismo tiempo no lleve a la larga a algún tipo de absurdo. Pero se debe añadir que también es cierto que la hipótesis de que $\nabla^2\phi = -\rho\epsilon_0$ es válida para toda la distancia, sea como sea de pequeña, lleva a sus propios absurdos (la energía eléctrica de un electrón es infinita) —absurdos para los cuales nadie conoce todavía una escapatoria—.

13

Magnetostática

13-1 El campo magnético

13-2 La corriente eléctrica; conservación de la carga

13-3 La fuerza magnética sobre una corriente

13-4 El campo magnético de las corrientes estacionarias; ley de Ampère

13-5 El campo magnético de un alambre rectilíneo y de un solenoide; las corrientes atómicas

13-6 La relatividad de los campos magnético y eléctrico

13-7 La transformación de las corrientes y de las cargas

13-8 Superposición; la regla de la mano derecha

13-1 El campo magnético

La fuerza sobre una carga eléctrica depende no solamente de dónde se encuentra ésta, sino también de la velocidad con que se desplaza. Además, todo punto del espacio está caracterizado por dos cantidades vectoriales que determinan la fuerza sobre cada carga. La primera es la *fuerza eléctrica* que da una componente de la fuerza que es independiente del movimiento de la carga. La describimos por medio del campo eléctrico $\boldsymbol{E}$. La segunda es una componente adicional de la fuerza que se llama *fuerza magnética* y que depende de la velocidad de la carga. La dirección de esta fuerza magnética tiene un carácter extraño: en cualquier punto particular del espacio, la *dirección* y el *módulo* de la fuerza dependen, los dos, de la dirección en que se mueve la partícula; en todo instante la fuerza es invariablemente perpendicular al vector velocidad; además, en todo punto, la fuerza es siempre forma un ángulo recto con la *dirección fija en el espacio* (véase la figura 13-1); y finalmente, el módulo de la fuerza es proporcional a la *componente* de la velocidad perpendicular a esta dirección única. Es posible describir todo este comportamiento definiendo el vector campo magnético $\boldsymbol{B}$, que especifica simultáneamente la dirección única en el espacio y la constante de proporcionalidad con la velocidad, y nos permite también escribir la fuerza magnética como $q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$. Entonces la fuerza total electromagnética sobre una carga se puede escribir en la forma

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}). \tag{13.1}$$

Esta fuerza se llama *fuerza de Lorentz.*

Puede ponerse fácilmente en evidencia la fuerza magnética acercando un imán a un tubo de rayos catódicos. La desviación del haz de electrones muestra que la presencia del imán produce fuerzas sobre los electrones que actúan perpendicularmente a la dirección de movimiento, como lo hemos descrito en el capítulo 12 del volumen I.

La unidad de campo magnético $\boldsymbol{B}$ es evidentemente un newton · segundo por coulomb-metro. La misma unidad es también un voltio · segundo por metro^2. También se la llama un *weber por metro cuadrado.*

Revisar
Volumen I, capítulo 15,
Teoría especial de la relatividad

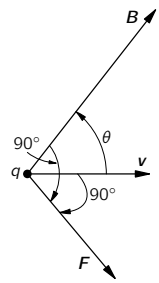


Figura 13-1. La componente dependiente de la velocidad de la fuerza que actúa sobre una carga en movimiento es perpendicular a $\boldsymbol{v}$ y a la dirección de $\boldsymbol{B}$. Además, es perpendicular a $\boldsymbol{B}$ y es proporcional a la componente de $\boldsymbol{v}$; o sea, a $v \operatorname{sen} \theta$.

13-2 La corriente eléctrica; conservación de la carga

Primeramente consideraremos cómo podemos comprender la fuerza magnética actuando sobre un alambre con corriente eléctrica. Para ello definamos qué se entiende por densidad de corriente. Las corrientes eléctricas son electrones u otras cargas en movimiento y con un desplazamiento global o flujo neto. Así, podemos representar el flujo de cargas por medio de un vector que nos indique la cantidad de carga que pasa por unidad de superficie y por unidad de tiempo a través de un elemento de superficie perpendicular al flujo (como hicimos en el caso de la propagación del calor). Llamaremos a esto *densidad de corriente* y la representaremos por el vector $\boldsymbol{j}$. Está dirigido en la dirección del movimiento de las cargas. Siempre que consideramos un área pequeña ΔS en un lugar determinado del material, la cantidad de cargas que fluyen a través de esta superficie en la unidad de tiempo es

$$\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{n}\, \Delta S, \tag{13.2}$$

donde $\boldsymbol{n}$ es el vector unitario y normal a ΔS.

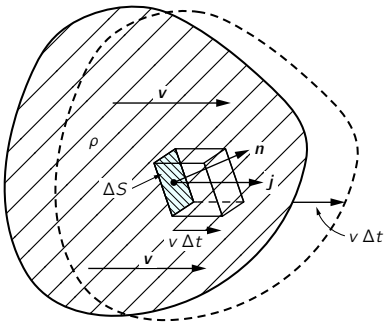


Figura 13-2. Si una distribución de cargas de densidad ρ se desplaza a velocidad $\boldsymbol{v}$, la carga que atraviesa ΔS por unidad de tiempo es $\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\Delta S$.

La densidad de corriente está relacionada con la velocidad del flujo medio de las cargas. Supongan que tenemos una distribución de cargas cuyo movimiento medio sea una traslación a velocidad $\boldsymbol{v}$. Cuando esta distribución pasa a través de un elemento de superficie ΔS, la carga Δq que pasa a través del elemento de superficie en un tiempo Δt es igual a la carga contenida en un paralelepípedo cuya base es ΔS y cuya altura es $v\,\Delta t$ como se muestra en la figura 13-2. El volumen del paralelepípedo es el producto de la proyección de ΔS normal a $\boldsymbol{v}$ por $v\,\Delta t$, el cual, multiplicado por la densidad de carga ρ nos da Δq. Luego,

$$\Delta q = \rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\,\Delta S\,\Delta t.$$

La carga por unidad de tiempo es entonces $\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\;\Delta S$, de lo cual obtenemos

$$\boldsymbol{j} = \rho\boldsymbol{v}. \tag{13.3}$$

Siempre que la distribución de cargas está constituida por cargas individuales, digamos electrones, cada uno con la carga q y moviéndose con la velocidad media $\boldsymbol{v}$, entonces la densidad de corriente es

$$\boldsymbol{j} = Nq\boldsymbol{v}. \tag{13.4}$$

donde N es el número de cargas por unidad de volumen.

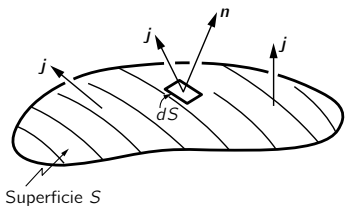


Figura 13-3. La corriente I a través de la superficie S es $\int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$.

La carga total que atraviesa por unidad de tiempo cualquier superficie S se llama *corriente eléctrica*, I. Es igual a la integral de la componente normal del flujo a través de todos los elementos de superficie:

$$I = \int_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \tag{13.5}$$

(véase la figura 13-3).

La corriente I que sale de una superficie cerrada S representa la rapidez con que la carga abandona el volumen V encerrado por S. Una de las leyes básicas de la física es que la *carga eléctrica es indestructible*; es decir, nunca se pierde o se crea. Las cargas eléctricas se pueden mover de un lugar a otro pero nunca aparecer de la nada. Decimos que *la carga se conserva*. Si hay una corriente neta saliendo de una superficie cerrada, la cantidad de carga en el interior debe disminuir en la cantidad correspondiente (figura 13-4). Podemos entonces escribir la ley de la conservación de la carga como

$$\int_{\substack{\text{cualquier superficie}\\ \text{cerrada}}} \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = -\frac{d}{dt}(Q_{\text{dentro}}). \tag{13.6}$$

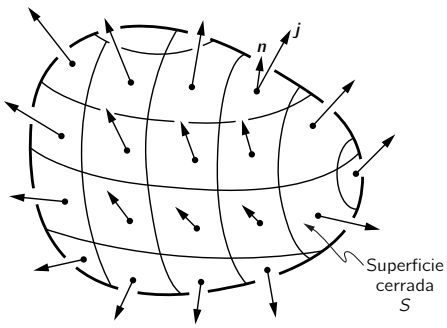


Figura 13-4. La integral de $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}$ sobre una superficie cerrada es menos la variación de la carga total Q dentro de S.

La carga en el interior se puede escribir como la integral de volumen de la densidad de carga:

$$Q_{\text{dentro}} = \int_{\substack{V\\ \text{dentro } S}} \rho\,dV. \tag{13.7}$$

Si aplicamos (13.6) a un pequeño volumen ΔV, sabemos que la integral del primer término es $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}\Delta V$. La carga en el interior es $\rho\,\Delta V$, y entonces la conservación de carga se puede escribir también en la forma

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j} = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{13.8}$$

(¡Matemática de Gauss una vez más!)

13-3 La fuerza magnética sobre una corriente

Vamos ahora a encontrar la fuerza actuante sobre un alambre por el que circula corriente dentro de un campo magnético. La corriente está constituida

por partículas cargadas en movimiento a lo largo del alambre con velocidad $\boldsymbol{v}$. Cada carga sufre una fuerza transversal

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

(figura 13-5a). Si hay N de tales cargas por unidad de volumen, el número en un pequeño volumen ΔV del alambre es $N\,\Delta V$. La fuerza magnética total $\Delta \boldsymbol{F}$ sobre el volumen ΔV es la suma de las fuerzas sobre las cargas individuales, esto es

$$\Delta \boldsymbol{F} = (N\,\Delta V)(q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}).$$

Pero $Nq\boldsymbol{v}$ es justamente $\boldsymbol{j}$, así

$$\Delta \boldsymbol{F} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}\,\Delta V \tag{13.9}$$

(figura 13-5b). La fuerza por unidad de volumen es $\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}$.

Si la corriente es uniforme en un alambre cuya sección cruzada tiene área A, podemos tomar como elemento de volumen un cilindro, cuya base tiene área A y cuya longitud es ΔL. Entonces decimos que:

$$\Delta \boldsymbol{F} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} A\,\Delta L. \tag{13.10}$$

Podemos ahora llamar $\boldsymbol{j}A$ al vector corriente $\boldsymbol{I}$ en el alambre. (Su módulo es la intensidad de la corriente eléctrica en el alambre y su dirección es la del alambre.) Entonces podemos escribir:

$$\Delta \boldsymbol{F} = \boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}\,\Delta L. \tag{13.11}$$

La fuerza por unidad de longitud sobre el alambre es $\boldsymbol{I} \times \boldsymbol{B}$.

Esta ecuación da el importante resultado de que la fuerza magnética sobre un alambre, debida al movimiento de las cargas en él, depende solamente de la corriente total y no de la cantidad de carga transportada por cada partícula —¡ni tampoco de su signo!—. Además, la fuerza magnética sobre un alambre cercano a un imán se evidencia fácilmente si se observa su desviación cuando se establece una corriente en él, como lo describimos en el capítulo 1 (véase figura 1-6).

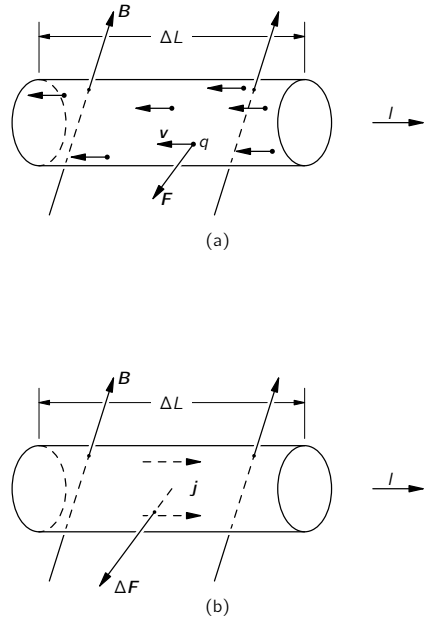


Figura 13-5. La fuerza magnética sobre un alambre por el que circula corriente es la suma de las fuerzas sobre las cargas individuales en movimiento.

13-4 El campo magnético de las corrientes estacionarias; ley de Ampère

Hemos visto que se ejerce una fuerza sobre un alambre en presencia de un campo magnético producido, digamos, por un imán. Así pues, por el principio de que la acción debe ser igual a la reacción, tenemos que esperar que se produzca una fuerza sobre la fuente del campo magnético, como, por ejemplo el imán, cuando hay una corriente en el cable.* Existen tales fuerzas, como se ve por el desplazamiento de la aguja de una brújula colocada cerca de un alambre por el que circula corriente. Ahora, sabemos que los imanes experimentan fuerzas producidas por otros imanes, así que eso significa que cuando hay corriente en un alambre, éste genera un campo magnético. Las cargas en movimiento *producen* entonces un campo magnético. Ahora bien, trataremos de descubrir las leyes que determinan de qué manera son creados tales campos magnéticos. La pregunta es: dada una corriente, ¿qué campo magnético se produce? La respuesta a esta pregunta se logró experimentalmente con tres experimentos críticos y una explicación teórica brillante dada por Ampère. Pasaremos por sobre el interesante desarrollo histórico y diremos simplemente que un gran número de experimentos han demostrado la validez de las ecuaciones de Maxwell. Tomémoslas como punto de partida. Si en estas ecuaciones dejamos de lado los términos que contienen las derivadas respecto al tiempo, tenemos las ecuaciones de la *magnetostática*:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{13.12}$$

y

$$c^2 \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0}. \tag{13.13}$$

* Veremos más adelante, sin embargo, que ¡tal suposición no es, en general, correcta para las fuerzas electromagnéticas!

Estas ecuaciones son válidas solamente si todas las densidades de carga eléctrica son constantes y todas las corrientes son estacionarias, por lo cual los campos eléctricos y magnéticos no están cambiando con tiempo; todos los campos son "estáticos".

Debemos recalcar que es muy peligroso pensar que pueda existir una cosa como una situación magnética estática, porque es necesario que haya corrientes para la creación de un campo magnético —y las corrientes provienen sólo de las cargas en movimiento—. La "magnetostática" es entonces una aproximación. Así pues, se refiere a un caso especial de situación dinámica con *gran cantidad* de cargas en movimiento que se pueden aproximar por un flujo *estacionario* de cargas. Sólo entonces podemos hablar de una densidad de corriente $\boldsymbol{j}$ que no cambia en el tiempo. El tema debería llamarse, más precisamente, estudio de las de corrientes estáticas. Si todos los campos son constantes podemos eliminar todos los términos del tipo $\partial\boldsymbol{E}/\partial t$ y $\partial\boldsymbol{B}/\partial t$ de las ecuaciones completas de Maxwell, ecuación (2.41) y obtener las dos ecuaciones (13.12) y (13.13). Observemos también que si la divergencia del rotacional de cualquier vector es necesariamente cero, la ecuación (13.13) requiere que $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}=0$. Esto es cierto, por la ecuación (13.8) solamente si $\partial\rho/\partial t$ es cero. Pero debe ser así si $\boldsymbol{E}$ no cambia con el tiempo y entonces nuestra hipótesis es correcta.

La condición $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}=0$ significa que puede haber solamente cargas que describen trayectorias cerradas de manera que vuelven al lugar en que estaban antes. Por ejemplo, pueden fluir por alambres que formen lazos cerrados —llamados circuitos—. Por supuesto, los circuitos pueden contener generadores o baterías que hagan fluir a las cargas. Pero no pueden incluir condensadores que se estén cargando o descargando. (Por supuesto, más adelante extenderemos esta teoría para incluir los campos dinámicos, pero por el momento nos referiremos solamente a los casos simples de las corrientes estacionarias.)

Examinemos ahora las ecuaciones (13.12) y (13.13) para ver lo que significan. La primera dice que la divergencia de $\boldsymbol{B}$ es cero. Comparándola con la ecuación análoga electrostática, que dice que $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=-\rho/\epsilon_0$ podemos concluir que no hay nada magnético análogo a la carga eléctrica. *No* hay *cargas magnéticas* desde donde puedan salir las líneas de $\boldsymbol{B}$. Si pensamos en términos de "líneas" del campo vectorial $\boldsymbol{B}$ las mismas nunca podrán empezar o detenerse en algo. ¿De dónde provienen entonces? Los campos magnéticos "aparecen" *en presencia de* corrientes; tienen un *rotacional* proporcional a la densidad de corriente. En todo lugar donde haya corriente habrá líneas de campo magnético formando lazos alrededor de las corrientes. Como las líneas de $\boldsymbol{B}$ no comienzan ni terminan, se cierran sobre sí mismas formando lazos cerrados. Pero puede haber también casos complicados en los cuales las líneas no son simples lazos cerrados. Pero lo que debemos decir es que ellas nunca divergen de un punto. Nunca han sido descubiertas cargas magnéticas, así que $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0$. Todo esto no es solamente válido para la magnetostática, es válido *siempre* —también para los campos dinámicos—.

La relación entre el campo $\boldsymbol{B}$ y las corrientes está contenida en la ecuación (13.13). Aquí tenemos una nueva situación que es muy diferente de la electrostática, donde teníamos $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=0$. Aquella ecuación significaba que la integral de línea de $\boldsymbol{E}$ a lo largo de un camino cerrado es cero:

$$\oint_{\text{lazo}}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}=0.$$

Obtuvimos aquel resultado del teorema de Stokes, que dice que la integral de cualquier campo vectorial a lo largo de *cualquier* camino cerrado era igual a la integral de superficie de la componente normal del rotacional del vector (tomado sobre cualquier superficie que tenga un lazo cerrado como contorno). Aplicando el mismo teorema al vector de campo magnético y utilizando los símbolos mostrados en la figura 13-6 obtenemos lo siguiente:

$$\oint_{\Gamma}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_{S}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{n}\,dS. \tag{13.14}$$

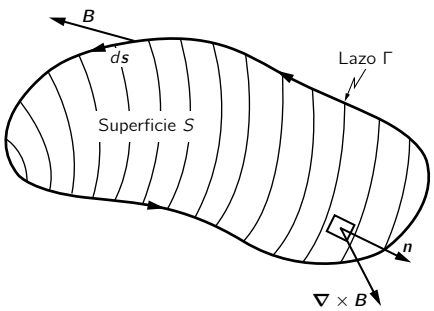


Figura 13-6. La integral de línea de la componente tangencial de $\boldsymbol{B}$ es igual a la integral de superficie de la componente normal de $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}$.

Tomando el rotacional de $\boldsymbol{B}$ de la ecuación (13.13) tenemos

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\int_S \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\,dS. \tag{13.15}$$

De acuerdo con (13.5), la integral sobre S es la corriente total I a través de la superficie S. Puesto que para las corrientes estacionarias la corriente a través de S es independiente de la forma de S, en tanto esté limitada por la curva Γ, comúnmente hablamos de "la corriente a través del lazo Γ". Tenemos entonces una ley general: la circulación de $\boldsymbol{B}$ a lo largo de cualquier curva cerrada es igual a la corriente I a través del lazo, dividida entre $\epsilon_0 c^2$:

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} = \frac{I_{\text{a lo largo de }\Gamma}}{\epsilon_0 c^2}. \tag{13.16}$$

Esta ley —llamada *ley de Ampère*— desempeña el mismo papel en magnetostática que la ley de Gauss en electrostática. La ley de Ampère sola no determina $\boldsymbol{B}$ a partir de las corrientes; es necesario en general utilizar también $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0$. Pero como veremos en la próxima sección, puede servir para determinar el campo en circunstancias especiales que representan ciertas simetrías simples.

13-5 El campo magnético de un alambre rectilíneo y de un solenoide; las corrientes atómicas

Podemos ilustrar el uso de la ley de Ampère encontrando el campo magnético cerca de un alambre. Preguntamos: ¿cuál es el campo en el exterior de un alambre largo que tiene la forma de un cilindro circular? Supondremos algunas cosas que no son del todo evidentes, pero que no obstante son verdaderas: que las líneas de campo de $\boldsymbol{B}$ rodean al alambre en círculos cerrados. Si hacemos esta suposición, la ley de Ampère, ecuación (13.16), nos da la intensidad del campo. Por la simetría del problema, $\boldsymbol{B}$ tiene el mismo módulo en todos los puntos sobre un círculo concéntrico con el alambre (véase figura 13-7). Podemos calcular entonces fácilmente la integral de línea de $\boldsymbol{B}\cdot ds$; es simplemente igual al producto de la magnitud de $\boldsymbol{B}$ por la circunferencia. Si r es el radio del círculo, entonces tenemos lo siguiente:

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot ds = B\cdot 2\pi r.$$

La corriente total a través del lazo es precisamente la corriente I en el alambre, así que tenemos

$$B\cdot 2\pi r = \frac{I}{\epsilon_0 c^2},$$

o sea

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{2I}{r}. \tag{13.17}$$

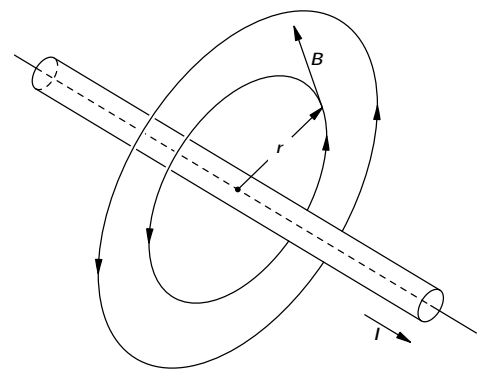


Figura 13-7. El campo magnético en el exterior de un alambre largo que transporta la corriente I.

La intensidad del campo magnético disminuye como la inversa de r, la distancia al eje del alambre. Podemos, si lo deseamos, escribir la ecuación (13.17) en forma vectorial. Recordando que $\boldsymbol{B}$ es perpendicular a $\boldsymbol{I}$ y a $\boldsymbol{r}$, tenemos

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{2\boldsymbol{I}\times\boldsymbol{e}_r}{r}. \tag{13.18}$$

Hemos separado el factor $1/4\pi\epsilon_0 c^2$ porque aparece frecuentemente. Es bueno recordar que es igual a 10^{-7} (en el sistema mks) ya que se utiliza una ecuación como en (13.17) para *definir* la unidad de corriente, el ampere. Además, a un metro de una corriente de un ampere, el campo magnético es de 2×10^{-7} webers por metro cuadrado.

Como una corriente crea un campo magnético, éste ejercerá una fuerza sobre un alambre cercano por el que circule corriente. En el capítulo 1 describimos una

simple demostración para poner en evidencia las fuerzas que actúan entre dos alambres por los que circula corriente. Si los alambres son paralelos, cada uno es normal al campo $\boldsymbol{B}$ del otro; cada alambre debe ser atraído o repelido por el otro. Cuando las corrientes están en el mismo sentido, los alambres se atraen; cuando las corrientes se mueven en sentido opuesto, los alambres se repelen.

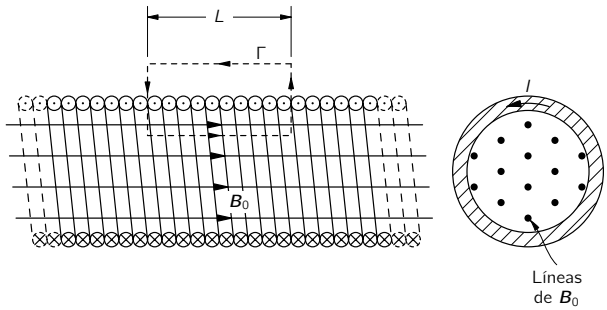


Figura 13-8. El campo magnético de un solenoide largo.

Tomemos otro ejemplo que se puede analizar con la ley de Ampère si agregamos algo que sepamos sobre el campo. Supongan que tenemos una bobina larga enrollada en una espiral bien cerrada, como muestra el corte en la figura 13-8. Se llama *solenoide* a tal tipo de bobina. Se observa experimentalmente que cuando un solenoide es muy largo comparado con su diámetro, el campo externo es muy pequeño comparado con el campo interno. Utilizando sólo este hecho, junto con la ley de Ampère, podemos calcular la intensidad del campo en el interior.

Como el campo está *localizado* en el interior (y tiene una divergencia nula), sus líneas deben ser paralelas al eje, como muestra la figura 13-8. En este caso, podemos aplicar la ley de Ampère a la "curva" rectangular Γ que se muestra en la figura. Este lazo recorre la distancia L dentro del solenoide, donde el campo es, digamos $\boldsymbol{B}_0$, luego continúa perpendicularmente al campo y finalmente retorna por la parte externa donde el campo es despreciable. La integral de línea de $\boldsymbol{B}$ sobre esta curva es precisamente B_0L, y debe ser igual a $1/\epsilon_0c^2$ veces la corriente total a través de Γ, o sea NI si hay N vueltas en la longitud L del solenoide. Tenemos lo siguiente:

$$B_0L = \frac{NI}{\epsilon_0c^2}.$$

O sea, que llamando n al número de vueltas *por unidad de longitud* del solenoide (es decir, $n = N/L$) obtenemos

$$B_0 = \frac{nI}{\epsilon_0c^2}. \tag{13.19}$$

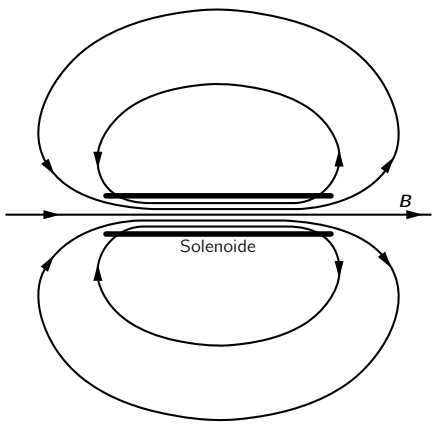


Figura 13-9. El campo magnético en el exterior de un solenoide.

¿Qué les sucede a las líneas de $\boldsymbol{B}$ cuando llegan al extremo del solenoide? Es posible que se dispersen de alguna forma en el exterior y que regresen para entrar por el otro extremo del solenoide como se esquematizó en la figura 13-9. Un campo tal es exactamente el que se observa en el exterior de una barra magnética. Pero, después de todo, ¿qué *es* un imán? Nuestras ecuaciones dicen que $\boldsymbol{B}$ se origina en presencia de corrientes. Por otra parte, sabemos que las barras ordinarias de hierro (sin baterías ni generadores) también crean campos magnéticos. Podrían pensar que debería haber otros términos en el segundo miembro de (13.12) o de la (13.13) para representar "la densidad de hierro magnético" o alguna magnitud similar. Pero no hay tales términos. Nuestra teoría dice que los efectos magnéticos del hierro provienen de corrientes internas que ya han sido anteriormente tenidas en cuenta en el término $\boldsymbol{j}$.

La materia es muy compleja cuando se la mira desde un punto de vista fundamental —como lo vimos cuando tratábamos de comprender los dieléctricos—. A fin de no interrumpir nuestra discusión, esperaremos para desarrollar en detalle más adelante el conocimiento de los mecanismos internos de los materiales magnéticos como el hierro. Deberán aceptar por el momento que todo el magnetismo

es producido por corrientes y que en un imán permanente hay corrientes internas permanentes. En el caso del hierro esas corrientes provienen de la rotación de los electrones alrededor de sus propios ejes. Cada electrón tiene una rotación de este tipo, llamada espín, que equivale a la circulación de una pequeña corriente. Por supuesto, un solo electrón no produce mucho campo magnético pero un trozo ordinario de materia contiene billones y billones de electrones. Normalmente los espines están orientados en todas direcciones de manera que no hay un efecto resultante. El milagro es que en muy pocas sustancias, como el hierro, una gran parte de los electrones giran con sus ejes orientados en la misma dirección —para el hierro, dos electrones de cada átomo toman parte en este movimiento colectivo—. En una barra imantada hay gran cantidad de electrones que giran en la misma dirección y, como veremos, el efecto total es equivalente a una circulación de corriente en la superficie de la barra. (Esto es algo análogo a lo que encontramos para los dieléctricos —que un dieléctrico uniformemente polarizado es equivalente a una distribución de cargas en su superficie—.) No es entonces accidental que una barra magnética sea equivalente a un solenoide.

13-6 La relatividad de los campos magnético y eléctrico

Cuando dijimos que la fuerza magnética sobre una carga era proporcional a su velocidad podrían haber pensado ¿qué velocidad? ¿respecto a qué sistema de referencia? En efecto, es claro que a partir de la definición de $\boldsymbol{B}$ que hemos dado al iniciar este capítulo que lo que este vector es dependerá del sistema de referencia que hayamos elegido para especificar la velocidad de las cargas. Pero no hemos dicho nada respecto a cuál es el sistema de referencia conveniente para especificar el campo magnético.

Se encuentra que *cualquier* sistema inercial es conveniente. Veremos igualmente que el magnetismo y la electricidad no son cosas independientes —que deben ser considerados siempre en conjunto, como *un* campo electromagnético completo—. Aunque en el caso estático las ecuaciones de Maxwell se separan en dos pares distintos, un par para la electricidad y otro par para el magnetismo, con ninguna conexión aparente entre los dos campos, en la naturaleza misma hay una relación muy íntima entre ellos que proviene del principio de relatividad. Históricamente, el principio de relatividad fue descubierto después de las ecuaciones de Maxwell. Fue en efecto el estudio de la electricidad y el magnetismo lo que condujo finalmente a Einstein a descubrir su principio de relatividad. Pero veamos qué nos puede decir nuestro conocimiento de la relatividad respecto a las fuerzas magnéticas, si suponemos que el principio de relatividad es aplicable —como lo es— al electromagnetismo.

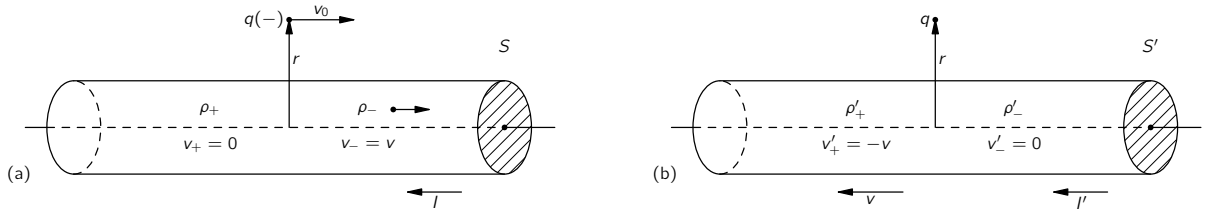


Figura 13-10. La interacción entre un alambre por el que circula corriente y una partícula de carga q vista desde dos sistemas de referencia. En el sistema S (parte a), el alambre está en reposo; en el sistema S' (parte b), la carga está en reposo.

Supongan que queremos saber qué sucede cuando una carga negativa se mueve con velocidad v_0 paralelamente a un alambre por el que circula corriente, como en la figura 13-10. Trataremos de comprender qué es lo que sucede en los dos sistemas de referencia: uno fijo respecto al alambre, como en el caso (a) de la figura, y otro fijo respecto a la partícula, como en el caso (b). Llamaremos S al primer sistema y S' al segundo.

En el sistema S se ve claramente que existe una fuerza sobre la partícula. La fuerza está dirigida hacia el alambre, de tal manera que si la carga se está moviendo libremente, podemos ver que curva su trayectoria hacia el alambre. Pero en el sistema S' no puede haber fuerza magnética sobre la partícula puesto que su velocidad es nula. Se queda, en consecuencia, ¿dónde está? ¿Veríamos suceder cosas diferentes en los dos sistemas? El principio de relatividad nos dice que en S' también debemos ver que la partícula se acerca al alambre. Tratemos de comprender por qué sucede esto.

Retornemos a nuestra descripción atómica de un alambre que lleva corriente. En un conductor normal, digamos en el cobre, las corrientes eléctricas provienen del movimiento de algunos de los electrones negativos —llamados los electrones de conducción— mientras que las cargas nucleares positivas y el resto de electrones permanecen fijos en el cuerpo del material. Sea ρ_- la densidad de carga de los electrones de conducción y $\boldsymbol{v}$ su velocidad en el sistema S. La densidad de carga en reposo en el sistema S es ρ_+ que debe ser igual a menos ρ_-, puesto que hemos considerado un alambre no cargado. No existe entonces campo eléctrico fuera del alambre y la fuerza sobre una partícula en movimiento es simplemente

$$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{B}.$$

Utilizando el resultado que encontramos en la ecuación (13.18) para el campo magnético a la distancia r del eje del alambre, concluimos que la fuerza sobre la partícula está dirigida hacia fuera del alambre y su módulo es

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{2Iqv_0}{r}.$$

Utilizando las ecuaciones (13.3) y (13.5), la corriente I se puede escribir como $\rho_- vA$, donde A es la sección del alambre. Entonces tenemos

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \cdot \frac{2q\rho_- Avv_0}{r}. \tag{13.20}$$

Podemos continuar y tratar el caso general donde v y v_0 son dos velocidades arbitrarias, pero es muy interesante considerar el caso particular en que la velocidad v_0 de la partícula es igual a la velocidad v de los electrones de conducción. Escribimos entonces $v_0 = v$, y la ecuación (13.20) se transforma en

$$F = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho_- A}{r} \frac{v^2}{c^2}. \tag{13.21}$$

Veamos ahora, qué sucede en S' donde la partícula está en reposo y el alambre se desplaza (hacia la izquierda en la figura) con velocidad v. Ahora bien, la carga positiva que se desplaza con el alambre puede crear un campo magnético $\boldsymbol{B'}$ en la partícula. Pero la partícula está ahora en *reposo*, ¡es decir que no hay fuerza *magnética* actuando sobre ella! Si hay alguna fuerza actuando sobre la partícula debe provenir de un campo eléctrico. Es necesario que el alambre en movimiento haya producido un campo eléctrico. Pero esto puede ocurrir solamente si aparece *cargado* —es preciso, entonces, que un alambre neutro con corriente esté cargado cuando se lo pone en movimiento—.

Tenemos que estudiar esto. Tenemos que calcular la densidad de carga en el alambre en S' a partir de lo que sabemos en S. En principio se puede pensar que es lo mismo; pero sabemos que las longitudes son diferentes en S y S' (véase capítulo 15, volumen I), y entonces el volumen también cambia. Como las *densidades* de carga dependen del volumen ocupado por las cargas, las densidades deben cambiar también.

Antes de precisar las *densidades* de carga en S', tenemos que saber qué sucede con la *carga* eléctrica de un montón de electrones cuando las cargas se desplazan. Sabemos que la masa aparente de una partícula está multiplicada por $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$. ¿Ocurre algo similar con la carga? ¡No! Las *cargas* son siempre las *mismas*, estén o no en movimiento. En caso contrario no observaríamos siempre que la carga total se conserva.

Supongan que tomamos un bloque de material, digamos un conductor que inicialmente está descargado. Ahora lo calentamos. Debido a que los electrones tienen masa diferente que los protones, las velocidades de los electrones y de los protones cambiarán en cantidades diferentes. Si la carga de una partícula dependiera de la velocidad de la partícula que la lleva, las cargas de los electrones y de los protones no se compensarían más en el bloque calentado. Un bloque se cargaría entonces al calentarlo. Anteriormente vimos un cambio de una fracción muy pequeña en la carga de los electrones en un bloque puede dar lugar a campos eléctricos enormes. Nunca ha sido observado tal efecto.

Además, podemos señalar que la velocidad media de los electrones en la materia depende de su composición química. Siempre que la carga de un electrón cambiara con la velocidad, la carga neta de un trozo de material debería cambiar durante una reacción química. Nuevamente un cálculo fácil muestra que una muy pequeña dependencia de la velocidad en la carga daría origen a campos enormes a partir de las más simples reacciones químicas. No ha sido observado tal efecto y concluimos que la carga eléctrica de una partícula única es independiente de su estado de movimiento.

Ahora bien, la carga q de una partícula es una cantidad escalar invariante, independiente del sistema de referencia. Esto quiere decir que en cualquier sistema la densidad de carga de una distribución de electrones es directamente proporcional al número de electrones por unidad de volumen. Necesitamos solamente preocuparnos del hecho de que el volumen *puede* cambiar debido a la contracción relativista de las distancias.

Aplicaremos ahora estos conceptos a nuestro alambre en movimiento. Si tomamos una longitud L_0 del alambre, en el cual hay una densidad de carga ρ_0 de cargas *estáticas*, contendrá la carga total $Q = \rho_0 L_0 A_0$. Si se observa la misma carga en un sistema diferente que se mueve con velocidad v, estará contenida en un trozo de material de longitud *más corta*

$$L = L_0\sqrt{1 - v^2/c^2}, \tag{13.22}$$

pero con la misma superficie A_0 (puesto que las dimensiones transversales a la dirección del movimiento no cambian). Véase la figura 13-11.

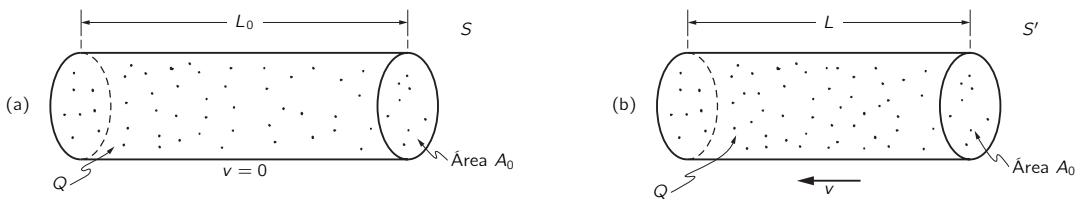


Figura 13-11. Si una distribución de partículas cargadas en reposo tiene la densidad de carga ρ_0, las mismas cargas tendrán la densidad $\rho = \rho_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ cuando se las mira desde un sistema que se mueve con una velocidad relativa v.

Si llamamos ρ a la densidad de cargas en el sistema en que se están moviendo, la carga total Q debe ser $\rho L A_0$. Ésta debe ser igual a $\rho_0 L_0 A_0$, puesto que la carga es la misma en cualquier sistema, así que $\rho L = \rho_0 L_0$ o sea, según (13.22),

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{13.23}$$

La *densidad* de carga de una *distribución* de cargas en movimiento varía en la misma forma que la masa relativista de una partícula.

Usaremos ahora este resultado general para la densidad de carga positiva ρ_+ de nuestro alambre. Estas cargas están en reposo en el sistema S. En S', sin embargo, donde el alambre se mueve con velocidad v, la densidad de carga positiva será

$$\rho'_+ = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{13.24}$$

Las cargas *negativas* están en reposo en S'. Tienen la "densidad en reposo" ρ_0 en este sistema. En la ecuación (13.23) $\rho_0 = \rho'_-$, puesto que se tienen que la densidad ρ_- cuando el *alambre* está en reposo, es decir, en el sistema S donde la velocidad de las cargas negativas es v. Para los electrones de conducción tenemos lo siguiente:

$$\rho_- = \frac{\rho'_-}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{13.25}$$

o sea

$$\rho'_- = \rho_- \sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{13.26}$$

Ahora podemos ver por qué hay campos eléctricos en S'; porque en este sistema el alambre tiene la densidad de carga neta ρ' dada por

$$\rho' = \rho'_+ + \rho'_-.$$

Utilizando (13.24) y (13.26) tenemos

$$\rho' = \frac{\rho_+}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \rho_- \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Como el alambre estático es neutro, $\rho_- = -\rho_+$ y tenemos

$$\rho' = \rho_+ \frac{v^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{13.27}$$

Nuestro alambre en movimiento está cargado positivamente y producirá un campo eléctrico E' en la partícula externa inmóvil. Hemos resuelto el problema electrostático de un cilindro uniformemente cargado. El campo eléctrico a la distancia r del eje del cilindro es

$$E' = \frac{\rho' A}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho_+ A v^2/c^2}{2\pi\epsilon_0 r \sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{13.28}$$

La fuerza sobre la partícula cargada negativamente es hacia el alambre. Tenemos, por lo menos, una fuerza en el mismo sentido desde los dos puntos de vista; la fuerza eléctrica en S' tiene el mismo sentido que la fuerza magnética en S.

La intensidad de la fuerza en S' es

$$F' = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{\rho_+ A}{r} \frac{v^2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{13.29}$$

Comparando este resultado para F' con nuestro resultado para F en la ecuación (13.21) vemos que la intensidad de las fuerzas son casi iguales desde los dos puntos vista. De hecho

$$F' = \frac{F}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{13.30}$$

y para las pequeñas velocidades que consideramos, las dos fuerzas son iguales. Podemos decir que para bajas velocidades por lo menos, comprendemos que magnetismo y electricidad son simplemente "dos formas de ver la misma cosa".

Pero las cosas son aún mejores. Si tomamos en cuenta además el hecho de que las *fuerzas* también se transforman cuando pasamos de un sistema a otro, encontramos que las dos formas de ver lo que sucede conduce al mismo resultado *físico* para cualquier velocidad.

Una manera de ver esto es hacer una pregunta como: ¿qué momentum transversal debe tener la partícula después que la fuerza haya actuado por cierto tiempo? Sabemos por el capítulo 16 del volumen I que el momentum transversal de una partícula debe ser el mismo en ambos sistemas S y S'. Llamando y a la coordenada transversal, vamos a comparar Δp_y y $\Delta p'_y$. Utilizando la ecuación de movimiento relativistamente correcta, $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$, es de esperar que después del

tiempo Δt nuestra partícula tenga un momentum transversal Δp_y en el sistema S dado por

$$\Delta p_y = F\,\Delta t. \tag{13.31}$$

En el sistema S', el momentum transversal será

$$\Delta p'_y = F'\,\Delta t'. \tag{13.32}$$

Por supuesto, tenemos que comparar Δp_y y $\Delta p'_y$ para los intervalos de tiempo correspondientes Δt y $\Delta t'$. Hemos visto en el capítulo 15 del volumen I que los intervalos de tiempo referidos a una partícula en *movimiento* aparecían *más largos* que los medidos en el sistema de la partícula en reposo. Como nuestra partícula está inicialmente en reposo en S', es de esperar que, para Δt pequeño,

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{13.33}$$

y así todo marcha bien. De (13.31) y (13.32) obtenemos

$$\frac{\Delta p'_y}{\Delta p_y} = \frac{F'\,\Delta t'}{F\,\Delta t},$$

que es precisamente $= 1$ si combinamos (13.30) con (13.33).

Hemos encontrado que obtenemos el mismo resultado físico cuando analizamos el movimiento de una partícula que se mueve a lo largo de un alambre en un sistema de coordenadas en reposo respecto al alambre, o en un sistema en reposo respecto a la partícula. En el primer caso, la fuerza era puramente "magnética" y, en el segundo, puramente "eléctrica". Los dos puntos de vista están ilustrados en la figura 13-12 (aunque hay todavía un campo magnético $\boldsymbol{B}'$ en el segundo sistema, no produce fuerza sobre la partícula inmóvil).

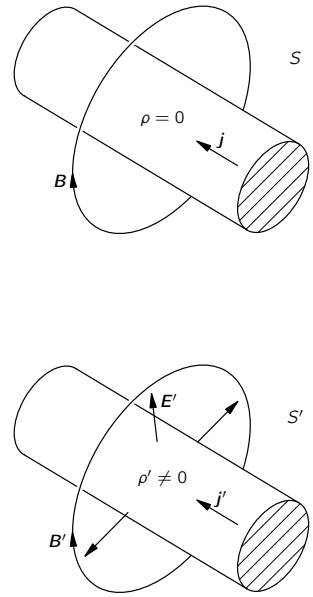


Figura 13-12. En el marco de referencia S la densidad de carga es cero y la densidad de corriente es $\boldsymbol{j}$. Hay solamente un campo magnético. En el sistema S', hay una densidad de carga ρ' y una densidad de corriente diferente $\boldsymbol{j}'$. El campo magnético $\boldsymbol{B}'$ es diferente y hay un campo eléctrico $\boldsymbol{E}'$.

Si hubiéramos tomado otro sistema de coordenadas, habríamos encontrado una mezcla diferente de los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$. Las fuerzas eléctricas y magnéticas son parte de *un* fenómeno físico —la interacción electromagnética de las partículas—. La separación de esta interacción en partes eléctrica y magnética depende enormemente del sistema de referencia tomado para la descripción. Pero una descripción electromagnética completa es invariante; electricidad y magnetismo tomados juntos son compatibles con la relatividad de Einstein.

Como los campos eléctricos y magnéticos aparecen en diferentes mezclas, si cambiamos nuestro sistema de referencia debemos tener cuidado respecto a la forma de considerar los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$. Por ejemplo, si pensamos en "líneas" de $\boldsymbol{E}$ o $\boldsymbol{B}$ no debemos asignarles demasiada realidad. Las líneas pueden desaparecer si tratamos de observarlas desde otro sistema de coordenadas. En particular, en el sistema S' hay líneas de campo eléctrico, que *no* encontramos "pasando delante de nosotros a velocidad v en el sistema S". ¡En el sistema S no hay ninguna línea de campo eléctrico! Por consiguiente, no tiene ningún sentido expresar cosas como: cuando muevo un imán, lleva su campo con él y, por lo tanto, las líneas de campo de $\boldsymbol{B}$ también se desplazan. En general, no hay medio de dar un sentido a la idea de "velocidad de las líneas de campo en movimiento". Así pues, los campos son nuestro camino para describir lo que sucede en un punto del espacio. En particular, $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ nos indican las fuerzas que actuarán sobre una partícula en movimiento. La pregunta "¿cuál es la fuerza que un campo magnético en *movimiento* ejerce sobre una carga?" no representa nada preciso. La fuerza está dada por los valores de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ en el punto donde se encuentra la carga, y la fórmula (13.1) no se debe alterar si la *fuente* de $\boldsymbol{E}$ o $\boldsymbol{B}$ se mueve (son los valores de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ que se modificarán por el movimiento). Nuestra descripción matemática se refiere solamente a los campos en función de x, y, z y t *respecto a algún sistema inercial*.

Hablaremos más adelante de "una *onda* de campos eléctricos y magnéticos propagándose a través del espacio", como por ejemplo una onda de luz. Pero eso es como hablar de una *onda* que se propaga a lo largo de una cuerda. No quiere decir que alguna parte de la *cuerda* se mueva en la dirección de la onda, significa

que el *desplazamiento* de ésta aparece primero en un lugar y después en otro. Análogamente, en una onda electromagnética la *onda* se propaga, sin embargo la intensidad del campo *varía*. Así pues, en el futuro, cuando nosotros —o cualquier otro— hable del campo "en movimiento" podrá interpretarse como una forma práctica, abreviada de describir un campo variable en ciertas condiciones.

13-7 La transformación de las corrientes y de las cargas

Puede que les haya preocupado la simplificación que hemos hecho al tomar la misma velocidad v para las partículas y para los electrones de conducción en el alambre. Podemos volver a ello y rehacer el análisis para dos velocidades diferentes, pero es más fácil observar simplemente que la densidad de carga y la de corriente son las componentes de un vector de dimensión cuatro (véase el capitulo 17, volumen I).

Hemos visto que si ρ_0 es la densidad de las cargas en su sistema en reposo, entonces en un sistema en el cual tienen velocidad $\boldsymbol{v}$, la densidad es

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

En este sistema la densidad de corriente es

$$\boldsymbol{j} = \rho\boldsymbol{v} = \frac{\rho_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{13.34}$$

Ahora bien, sabemos que la energía U y el momentum $\boldsymbol{p}$ de una partícula que se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}$ están dados por

$$U = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \boldsymbol{p} = \frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

donde m_0 es la masa en reposo. Además, sabemos también que U y $\boldsymbol{p}$ constituyen un vector relativista de cuatro dimensiones. Como ρ y $\boldsymbol{j}$ dependen de la velocidad $\boldsymbol{v}$ de la misma forma que U y $\boldsymbol{p}$, concluimos que ρ y $\boldsymbol{j}$ son *también* las componentes de un vector relativista de dimensión cuatro. Esta propiedad es la clave para un análisis general del campo de un alambre que se mueve con cualquier velocidad, que es lo que necesitamos si queremos resolver el problema con la velocidad $\boldsymbol{v}_0$ de la partícula diferente de la velocidad de los electrones de conducción.

Si deseamos transformar ρ y $\boldsymbol{j}$ a un sistema de coordenadas que se mueve con una velocidad u en la dirección x, sabemos que se transforman como t y (x, y, z), de manera que tenemos (véase el capítulo 15 del volumen I)

$$\begin{aligned}
x' &= \frac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, & j'_x &= \frac{j_x - u\rho}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\
y' &= y, & j'_y &= j_y, \\
z' &= z, & j'_z &= j_z, \\
t' &= \frac{t - ux/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, & \rho' &= \frac{\rho - uj_x/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.
\end{aligned} \tag{13.35}$$

Así, con estas ecuaciones podemos relacionar las medidas de las cargas y las corrientes en un sistema con las medidas en otro. Por consiguiente, tomando las cargas y corrientes en uno de estos sistemas podemos resolver el problema electromagnético en el mismo sistema utilizando nuestras ecuaciones de Maxwell. El resultado que obtengamos *para el movimiento de partículas* será el mismo, cualquiera que sea el sistema que elijamos. Volveremos más adelante a las transformaciones relativistas de los campos electromagnéticos.

13-8 Superposición; la regla de la mano derecha

Concluiremos este capítulo señalando dos puntos más relativos al tema de la magnetostática. Primero, nuestras ecuaciones básicas para el campo magnético

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0,\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{j}/c^2\epsilon_0,$$

son lineales en $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{j}$. Esto quiere decir que el principio de superposición también aplica a los campos magnéticos. En particular, el campo producido por dos corrientes estáticas diferentes es igual a la suma de los campos individuales de cada corriente actuando sola. Nuestro segundo punto a señalar se refiere a la regla de la mano derecha con la que nos hemos encontrado (como la regla de la mano derecha para el campo magnético producido por una corriente). Hemos observado además que la magnetización de un imán de hierro se comprende a partir del espín de los electrones en el material sobre sí mismos. El sentido del campo magnético de los electrones que rotan está relacionado con el eje de rotación por la misma regla de la mano derecha. Como $\boldsymbol{B}$ se determina por una regla "de mano" —implicando un producto vectorial o un rotacional— se lo llama vector *axial*. (Los vectores cuyo sentido en el espacio no depende de una referencia a la mano derecha o izquierda se llaman vectores *polares*. Desplazamiento, velocidad, fuerza y $\boldsymbol{E}$, por ejemplo, son vectores polares.)

Las cantidades *físicas observables* en electromagnetismo *no* son, de mano derecha (o izquierda). Las interacciones electromagnéticas son simétricas frente a reflexiones (véase el capítulo 52 del volumen I). Siempre que se calculen fuerzas magnéticas entre dos sistemas de corrientes, el resultado es invariante respecto a un cambio en la convención de las manos. Nuestras ecuaciones conducen, independientemente de la convención de la mano derecha, hasta el resultado final de que corrientes paralelas se atraen o que corrientes en sentido opuesto se repelen. (Traten de calcular la fuerza utilizando "reglas de la mano izquierda".) Una atracción o una repulsión es un vector polar. Esto sucede porque al describir cualquier interacción completa, utilizamos la regla de la mano derecha dos veces —una para hallar $\boldsymbol{B}$ a partir de las corrientes y nuevamente para encontrar la fuerza que $\boldsymbol{B}$ produce sobre una segunda corriente—. Usar la regla de la mano derecha dos veces es lo mismo que hacerlo dos veces con la izquierda. Si cambiáramos nuestras convenciones a un sistema de mano izquierda, todos nuestros campos $\boldsymbol{B}$ se invertirían, pero todas las fuerzas —o lo que es quizás más importante, las aceleraciones observadas de los objetos— no cambiarían.

Aunque los físicos han descubierto recientemente y para su gran sorpresa que *todas* las leyes de la naturaleza no son siempre invariantes frente a reflexiones en un espejo, las leyes del electromagnetismo tienen esa simetría básica.

14

El campo magnético en diversas situaciones

14-1 El potencial vectorial
14-2 El potencial vectorial de corrientes conocidas
14-3 Un alambre recto
14-4 Un solenoide largo
14-5 El campo de un lazo pequeño; el dipolo magnético
14-6 El potencial vectorial de un circuito
14-7 La ley de Biot y Savart

14-1 El potencial vectorial

En este capítulo continuaremos nuestra discusión acerca de los campos magnéticos asociados con corrientes continuas —el tema de magnetostática—. El campo magnético está relacionado con corrientes eléctricas por nuestras ecuaciones básicas

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0, \tag{14.1}$$

$$c^2\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0}. \tag{14.2}$$

Ahora bien, queremos resolver estas ecuaciones matemáticamente en una forma *general*, esto es, sin requerir ninguna simetría especial o conjetura intuitiva. En electrostática, había un procedimiento sencillo para encontrar el campo cuando se conocía la posición de todas las cargas eléctricas: uno simplemente calculaba el potencial escalar ϕ tomando una integral sobre las cargas —como en la ecuación (4.25)—. Luego, si uno desea el campo eléctrico, lo obtiene de las derivadas de ϕ. Ahora demostraremos que hay un procedimiento correspondiente para hallar el campo magnético $\boldsymbol{B}$ si conocemos la densidad de corriente $\boldsymbol{j}$ de todas las cargas en movimiento.

En electrostática vimos que (debido a que el rotacional de $\boldsymbol{E}$ era siempre cero) era posible representar $\boldsymbol{E}$ como el gradiente de un campo escalar ϕ. Ahora bien, el rotacional de $\boldsymbol{B}$ *no* siempre es cero y así, en general, no es posible representarlo como un gradiente. Sin embargo, la *divergencia* de $\boldsymbol{B}$ siempre es cero y esto significa que en todo caso podemos representar $\boldsymbol{B}$ como el *rotacional* de otro campo vectorial. Como vimos en la sección 2-7, la divergencia de un rotacional siempre es cero. Entonces siempre podemos relacionar $\boldsymbol{B}$ con un campo que llamaremos $\boldsymbol{A}$ por

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}. \tag{14.3}$$

O, escribiendo las componentes,

$$\begin{aligned}
B_x&=(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z},\\
B_y&=(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})_y=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x},\\
B_z&=(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})_z=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{14.4}$$

Escribiendo $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ garantiza que se satisface la ecuación (14.1) ya que, necesariamente,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})=0.$$

El campo $\boldsymbol{A}$ se llama *potencial vectorial*.

Recordarán que el potencial escalar ϕ no estaba completamente especificado por su definición. Si hemos encontrado ϕ para algún problema, siempre podemos encontrar otro potencial ϕ' que es igualmente bueno sumando una constante:

$$\phi'=\phi+C.$$

El nuevo potencial ϕ' da los mismos campos eléctricos, puesto que el gradiente $\boldsymbol{\nabla}C$ es cero; ϕ y ϕ' representan la misma física.

Análogamente, podemos tener diferentes potenciales vectoriales $\boldsymbol{A}$ que den los mismos campos magnéticos. Aquí también, debido a que $\boldsymbol{B}$ se obtiene de $\boldsymbol{A}$ por derivación, sumando una constante a $\boldsymbol{A}$, no cambia nada físico. Pero hay aún más libertad para $\boldsymbol{A}$. Podemos sumar a $\boldsymbol{A}$ cualquier campo escalar, sin cambiar lo físico. Podemos demostrar esto como sigue. Supongan que tenemos un $\boldsymbol{A}$ que da correctamente el campo magnético $\boldsymbol{B}$ para alguna situación real, y preguntamos en qué circunstancia algún otro campo vectorial $\boldsymbol{A}'$ dará el *mismo* campo $\boldsymbol{B}$ si se sustituye en (14.3). Entonces $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{A}'$ deben tener el mismo rotacional:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}.$$

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}' - \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{A}' - \boldsymbol{A}) = 0.$$

Pero si el rotacional de un vector es cero, debe ser el gradiente de algún campo escalar, digamos ψ, así que $\boldsymbol{A}' - \boldsymbol{A} = \boldsymbol{\nabla}\psi$. Eso significa que si $\boldsymbol{A}$ es un potencial vectorial satisfactorio para un problema entonces, para cualquier ψ

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\psi \tag{14.5}$$

será un potencial vectorial igualmente satisfactorio, que lleva al mismo campo $\boldsymbol{B}$.

Generalmente es conveniente quitar algo de la "libertad" de $\boldsymbol{A}$ aplicando arbitrariamente otra condición en él (en forma muy parecida a cuando encontramos conveniente —a menudo— hacer el potencial ϕ cero a una gran distancia). Por ejemplo, podemos restringir $\boldsymbol{A}$ escogiendo arbitrariamente cuál debe ser la divergencia de $\boldsymbol{A}$. Siempre podemos hacer esto sin afectar $\boldsymbol{B}$. Esto se debe a que, a pesar de que $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{A}'$ tienen el mismo rotacional y dan el mismo $\boldsymbol{B}$, no necesitan tener la misma divergencia. En realidad $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} + \nabla^2\psi$, y escogiendo ψ en forma apropiada podemos hacer $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}'$ lo que queramos.

¿Qué debemos escoger para $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}$? Se debe escoger de modo que se obtenga la mejor conveniencia matemática y ello dependerá del problema que estemos resolviendo. Para la *magnetostática*, escogeremos simplemente

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0. \tag{14.6}$$

(Más tarde, cuando veamos electrodinámica, cambiaremos nuestra elección.) Nuestra definición* completa de $\boldsymbol{A}$ es, entonces, por el momento, $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0$.

Para obtener alguna experiencia con el potencial vectorial, consideremos primero cuál es para un campo magnético uniforme $\boldsymbol{B}_0$. Tomando nuestro eje z en la dirección de $\boldsymbol{B}_0$, debemos tener

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0, \\ B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0, \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B_0. \end{aligned} \tag{14.7}$$

Por inspección, vemos que una solución *posible* de estas ecuaciones es

$$A_y = xB_0, \qquad A_x = 0, \qquad A_z = 0.$$

Podríamos tomar igualmente

$$A_x = -yB_0, \qquad A_y = 0, \qquad A_z = 0.$$

* Sin embargo, nuestra definición no determina $\boldsymbol{A}$ de manera *única*. Para una especificación de manera *única*, también tendríamos que decir algo acerca de cómo el campo $\boldsymbol{A}$ se comportaría en alguna frontera, o a gran distancia. Es conveniente algunas veces, por ejemplo, escoger un campo que vaya a cero a gran distancia.

También es otra solución una combinación lineal de las dos:

$$A_x = -\tfrac{1}{2}yB_0, \qquad A_y = \tfrac{1}{2}xB_0, \qquad A_z = 0. \tag{14.8}$$

Está claro que para cualquier campo particular $\boldsymbol{B}$, el potencial vectorial $\boldsymbol{A}$ no es único; hay muchas posibilidades.

La tercera solución, ecuación (14.8), tiene algunas propiedades interesantes. Como la componente x es proporcional a $-y$ y la componente y es proporcional a $+x$, $\boldsymbol{A}$ debe ser perpendicular al vector desde el eje z, que llamaremos $\boldsymbol{r}'$ (la "prima" es para recordar que el vector desplazamiento *no* es desde el origen). Además, el módulo de $\boldsymbol{A}$ es proporcional a $\sqrt{x^2+y^2}$ y, por lo tanto, a r'. De este modo $\boldsymbol{A}$ se puede escribir simplemente (para nuestro campo uniforme) como

$$\boldsymbol{A} = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{B}_0 \times \boldsymbol{r}'. \tag{14.9}$$

El potencial vectorial $\boldsymbol{A}$ tiene módulo $B_0 r'/2$ y rota alrededor del eje z, como se observa en la figura 14-1. En particular, en caso de que el campo $\boldsymbol{B}$ sea el campo axial dentro de un solenoide, el potencial vectorial circula en el mismo sentido que la corriente del solenoide.

El potencial vectorial para un campo uniforme se puede obtener de otra manera. La circulación de $\boldsymbol{A}$ en cualquier trayectoria cerrada Γ se puede relacionar con la integral de superficie de $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ por medio del teorema de Stokes, ecuación (3.38):

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} = \int\limits_{\text{dentro } \Gamma} (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n}\, da. \tag{14.10}$$

Pero la integral en el lado derecho es igual al flujo de $\boldsymbol{B}$ a través de la trayectoria, así que tenemos

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} = \int\limits_{\text{dentro } \Gamma} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, da. \tag{14.11}$$

De este modo, la circulación de $\boldsymbol{A}$ alrededor de *cualquier* lazo es igual al flujo de $\boldsymbol{B}$ a través del lazo. En caso de tomar un lazo circular de radio r' en un plano perpendicular a un campo uniforme $\boldsymbol{B}$, el flujo es simplemente

$$\pi r'^2 B.$$

Si escogemos nuestro origen sobre un eje de simetría, de modo que podamos tomar $\boldsymbol{A}$ como circular y en función de r' solamente, la circulación será

$$\oint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} = 2\pi r' A = \pi r'^2 B.$$

Obtenemos, como antes,

$$A = \frac{Br'}{2}.$$

En el ejemplo que vimos, hemos calculado el potencial vectorial a partir del campo magnético, lo cual es opuesto a lo que se hace normalmente. En problemas complicados, por lo común, es más fácil hallar el potencial vectorial y luego determinar el campo magnético. A continuación demostraremos cómo se puede hacer esto.

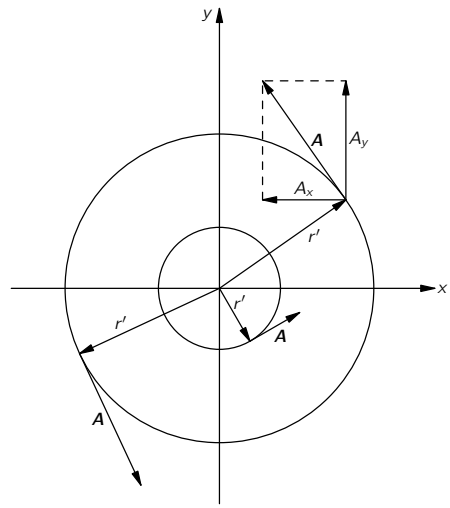


Figura 14-1. Un campo magnético uniforme $\boldsymbol{B}$ en la dirección z corresponde a un potencial vectorial $\boldsymbol{A}$ que rota alrededor del eje z, con módulo $A = Br'/2$ (r' es el desplazamiento desde el eje z).

14-2 El potencial vectorial de corrientes conocidas

Como $\boldsymbol{B}$ está determinado por corrientes, también $\boldsymbol{A}$. Queremos obtener $\boldsymbol{A}$ en función de las corrientes. Empezamos con nuestra ecuación básica (14.2):

$$c^2 \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0},$$

lo cual significa, por supuesto, que

$$c^2 \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0}. \tag{14.12}$$

Esta ecuación es para la magnetostática lo que la ecuación

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{14.13}$$

para la electrostática.

Nuestra ecuación (14.12) para el potencial vectorial se parece aún más a la ecuación para ϕ si escribimos $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})$ usando la identidad vectorial (2.58):

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}. \tag{14.14}$$

Como lo hemos escogido $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=0$ (y ahora ven por qué), la ecuación (14.12) se transforma en

$$\nabla^2\boldsymbol{A} = -\frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0 c^2}. \tag{14.15}$$

Esta ecuación vectorial significa, por supuesto, tres ecuaciones:

$$\nabla^2 A_x = -\frac{j_x}{\epsilon_0 c^2}, \qquad \nabla^2 A_y = -\frac{j_y}{\epsilon_0 c^2}, \qquad \nabla^2 A_z = -\frac{j_z}{\epsilon_0 c^2}. \tag{14.16}$$

Y cada una de estas ecuaciones es *matemáticamente idéntica* a

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{14.17}$$

¡Todo lo que hemos aprendido sobre cómo hallar potenciales cuando se conoce ρ puede ser usado para obtener cada componente de $\boldsymbol{A}$ cuando se conoce $\boldsymbol{j}$!

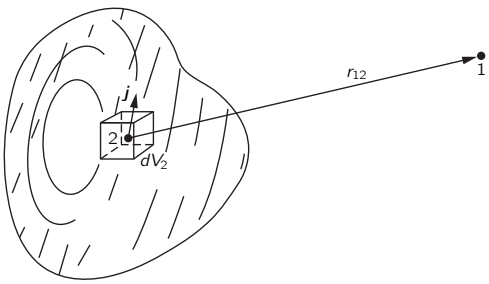


Figura 14-2. El potencial vectorial $\boldsymbol{A}$ en el punto 1 está dado por una integral sobre los elementos de corriente $\boldsymbol{j}\,dV$ en todos los puntos 2.

Hemos visto en el capítulo 4 que una solución general para la ecuación electrostática (14.17) es

$$\phi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(2)\,dV_2}{r_{12}}.$$

Por lo tanto, sabemos inmediatamente que una solución general para A_x es

$$A_x(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int\frac{j_x(2)\,dV_2}{r_{12}}, \tag{14.18}$$

y análogamente para A_y y A_z. (La figura 14-2 les recordará nuestra convención para r_{12} y dV_2.) Podemos combinar las tres soluciones en la forma vectorial

$$\boldsymbol{A}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int\frac{\boldsymbol{j}(2)\,dV_2}{r_{12}}, \tag{14.19}$$

(Si quieren, pueden verificar derivando directamente las componentes, que esa integral para $\boldsymbol{A}$ satisface $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}=0$, siempre que $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}=0$, lo cual, como vimos, debe suceder para corrientes estacionarias.)

Tenemos entonces un método general para calcular el campo magnético de corrientes estacionarias. El principio es: la componente x del potencial vectorial proveniente de una densidad de corriente $\boldsymbol{j}$ es lo mismo que el potencial eléctrico ϕ producido por una densidad de carga ρ igual a j_x/c^2 —y análogamente para las componentes y y z—. (Este principio funciona solamente con componentes en direcciones fijas. La componente "radial" de $\boldsymbol{A}$ no se obtiene del mismo modo que la componente "radial" de $\boldsymbol{j}$, por ejemplo.) Así pues, a partir del vector densidad de corriente $\boldsymbol{j}$, podemos encontrar $\boldsymbol{A}$ usando la ecuación (14.19) —esto es, podemos encontrar cada componente de $\boldsymbol{A}$ resolviendo tres problemas electrostáticos imaginarios para las distribuciones de carga $\rho_1 = j_x/c^2$, $\rho_2 = j_y/c^2$ y $\rho_3 = j_z/c^2$—. Luego obtenemos $\boldsymbol{B}$ tomando varias derivadas de $\boldsymbol{A}$ para obtener $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$. Es un poco más complicado que la electrostática, pero es la misma idea. Ilustraremos la teoría encontrando el potencial vectorial en algunos casos especiales.

14-3 Un alambre recto

Para nuestro primer ejemplo, obtendremos otra vez el campo de un alambre recto —que resolvimos en el último capítulo usando la ecuación (14.2) y algunos argumentos de simetría—. Tomemos un alambre recto largo de radio a, por el que circula una corriente estacionaria I. A diferencia de la carga sobre un conductor en el caso electrostático, una corriente estacionaria en un alambre está distribuida uniformemente por la sección transversal del alambre. Si escogemos nuestras coordenadas como muestra la figura 14-3, el vector densidad de corriente $\boldsymbol{j}$ tiene solamente una componente z. Su módulo es

$$j_z = \frac{I}{\pi a^2} \tag{14.20}$$

dentro del alambre y cero fuera de él.

Como j_x y j_y son ambas cero, tenemos inmediatamente

$$A_x = 0, \qquad A_y = 0.$$

Para obtener A_z podemos usar nuestra solución para el potencial electrostático ϕ de un alambre con una densidad de carga $\rho = j_Z/c^2$. Para puntos externos a un cilindro infinito cargado, el potencial electrostático es

$$\phi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r',$$

donde $r' = \sqrt{x^2 + y^2}$ y λ es la carga por unidad de longitud, $\pi a^2 \rho$. Así que A_z debe ser

$$A_z = -\frac{\pi a^2 j_z}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln r'$$

para puntos externos a un alambre largo con una corriente uniforme. Como $\pi a^2 j_z = I$, también podemos escribir

$$A_z = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln r' \tag{14.21}$$

Ahora podemos encontrar $\boldsymbol{B}$ con la ecuación (14.4). De las seis derivadas, solamente dos no son cero. Obtenemos

$$B_x = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial y} \ln r' = -\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{y}{r'^2}, \tag{14.22}$$

$$B_y = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial}{\partial x} \ln r' = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{x}{r'^2}, \tag{14.23}$$

$$B_z = 0.$$

Obtenemos el mismo resultado que antes: $\boldsymbol{B}$ circula alrededor del alambre y su módulo es

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2I}{r'}. \tag{14.24}$$

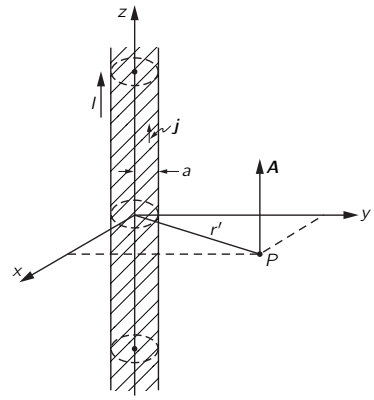


Figura 14-3. Un alambre cilíndrico largo según el eje z con una densidad de corriente uniforme $\boldsymbol{j}$.

14-4 Un solenoide largo

A continuación consideramos otra vez el solenoide infinitamente largo con una corriente circular en la superficie de nI por unidad de longitud. (Imaginamos que hay n vueltas de alambre por unidad de longitud, con una corriente I, y despreciamos el paso pequeño de la espiral.)

Así como hemos definido una "densidad de carga superficial" σ, definimos aquí una "densidad de corriente superficial" $\boldsymbol{J}$ igual a la corriente por unidad de longitud en la superficie del solenoide (la cual es, por supuesto, el promedio

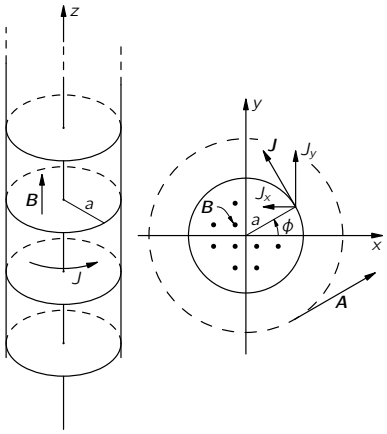


Figura 14-4. Un solenoide largo con una densidad de corriente superficial $\boldsymbol{J}$.

de $\boldsymbol{j}$ por el espesor del embobinado delgado). Aquí el módulo de $\boldsymbol{J}$ es nI. Esta corriente de superficie (véase la figura 14-4) tiene las componentes:

$$J_x = -J\,\text{sen}\,\phi, \qquad J_y = J\cos\phi, \qquad J_z = 0.$$

Ahora debemos encontrar $\boldsymbol{A}$ para tal distribución de corriente.

Primero queremos encontrar A_x para puntos externos al solenoide. El resultado es el mismo que el potencial electrostático externo a un cilindro con una densidad de carga superficial

$$\sigma = \sigma_0\,\text{sen}\,\phi,$$

con $\sigma_0 = -J/c^2$. No hemos resuelto esta distribución de carga, pero hemos hecho algo similar. Esta distribución de carga es equivalente a dos cilindros *sólidos* de carga, uno positivo y uno negativo, con un ligero desplazamiento relativo de sus ejes en la dirección y. El potencial de este par de cilindros es proporcional a la derivada respecto a y del potencial de un solo cilindro uniformemente cargado. Podríamos calcular la constante de proporcionalidad, pero no nos preocupemos de ella por ahora.

El potencial de un cilindro de carga es proporcional a $\ln r'$; el potencial del par es entonces

$$\phi \propto \frac{\partial \ln r'}{\partial y} = \frac{y}{r'^2}.$$

Así pues, sabemos que

$$A_x = -K\,\frac{y}{r'^2}, \tag{14.25}$$

donde K es una constante. Siguiendo el mismo razonamiento, encontraríamos

$$A_y = K\,\frac{x}{r'^2}. \tag{14.26}$$

Aunque antes dijimos que no había campo *magnético* fuera de un solenoide, ahora encontraremos que *hay* un campo $\boldsymbol{A}$ que circula alrededor del eje z, como en la figura 14-4. La pregunta es: ¿es su rotacional cero?

Claramente, B_x y B_y son cero, y

$$\begin{aligned} B_z &= \frac{\partial}{\partial x}\left(K\,\frac{x}{r'^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-K\,\frac{y}{r'^2}\right) \\ &= K\left(\frac{1}{r'^2} - \frac{2x^2}{r'^4} + \frac{1}{r'^2} - \frac{2y^2}{r'^4}\right) = 0. \end{aligned}$$

De modo que el campo magnético fuera de un solenoide muy largo es realmente cero, aun cuando el potencial vectorial no lo es.

Podemos verificar nuestro resultado con algún otro hecho conocido: la circulación del potencial vectorial alrededor del solenoide debe ser igual al flujo de $\boldsymbol{B}$ dentro de la bobina, ecuación (14.11). La circulación es $A \cdot 2\pi r'$ o, puesto que $A = K/r'$, la circulación es $2\pi K$. Noten que es independiente de r'. Esto es justamente como debería si no hay $\boldsymbol{B}$ afuera, porque el flujo es justamente el módulo de $\boldsymbol{B}$ *dentro* del solenoide por πa^2. Es lo mismo para todos los círculos de radio $r' > a$. Hemos visto en el último capítulo que el campo interno es $nI/\epsilon_0 c^2$ de modo que podemos determinar la constante K:

$$2\pi K = \pi a^2\,\frac{nI}{\epsilon_0 c^2},$$

o sea

$$K = \frac{nIa^2}{2\epsilon_0 c^2}.$$

Así pues, el potencial vectorial *fuera* tiene módulo

$$A = \frac{nIa^2}{2\epsilon_0 c^2}\,\frac{1}{r'}, \tag{14.27}$$

y siempre es perpendicular al vector $\boldsymbol{r}'$.

Hemos estado pensando en una bobina solenoidal de alambre, pero produciríamos el mismo campo si rotáramos un cilindro largo con una carga electrostática en la superficie. Si tenemos una lámina cilíndrica delgada de radio a con una carga superficial σ, al rotar el cilindro se hace una corriente superficial $J = \sigma v$, donde $v = a\omega$ es la velocidad de la carga superficial. Entonces existirá un campo magnético $B = \sigma a\omega/\epsilon_0 c^2$ dentro del cilindro.

Ahora bien, podemos plantear una pregunta interesante: supongan que ponemos un pedazo corto de alambre W perpendicular al eje del cilindro, extendido desde el eje hasta fuera de la superficie y sujeto al cilindro de manera que rota con él, como en la figura 14-5. Este alambre está moviéndose en un campo magnético, así que las fuerzas $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ harán que los extremos del alambre se carguen (se cargarán hasta que el campo $\boldsymbol{E}$ de las cargas equilibre la fuerza $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$). Si el cilindro tiene una carga positiva, el extremo del alambre en el eje tendrá una carga negativa. Midiendo la carga en el extremo del alambre, podríamos medir la velocidad de rotación del sistema. ¡Tendríamos un "velocímetro angular"!

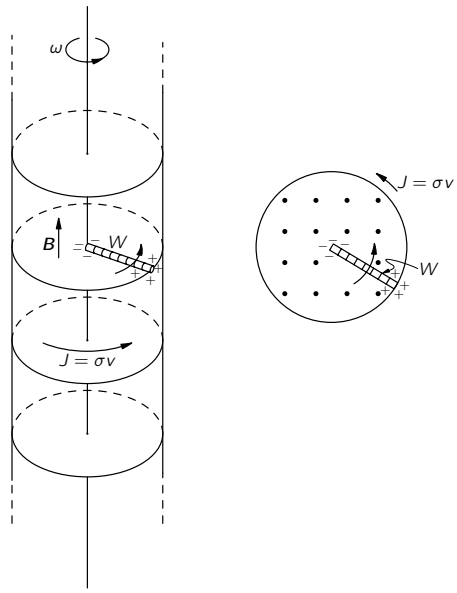


Figura 14-5. Un cilindro cargado rotando produce un campo magnético interno. Un alambre radial corto rotando con el cilindro tiene cargas inducidas en sus extremos.

Pero ustedes se estarán preguntando: "¿Y si me pongo en el sistema de referencia del cilindro rotando? Entonces hay simplemente un cilindro cargado en reposo y sé que las ecuaciones electrostáticas dicen que *no* hay campo eléctrico dentro, así que no habrá fuerzas empujando cargas hacia el centro. De modo que algo debe estar equivocado". Pero no hay nada equivocado. No hay "relatividad de la rotación". Un sistema rotando *no* es sistema inercial y las leyes de la física son diferentes. Debemos asegurarnos de usar las ecuaciones del electromagnetismo únicamente respecto a sistemas inerciales de coordenadas.

Sería bueno si pudiéramos medir la rotación absoluta de la Tierra con tales cilindros cargados, pero desafortunadamente el efecto es demasiado pequeño para ser observado aun con los instrumentos más delicados disponibles hoy en día.

14-5 El campo de un lazo pequeño; el dipolo magnético

Usemos el método del potencial vectorial para calcular el campo magnético de un lazo pequeño con corriente. Como de costumbre, por "pequeño" entendemos simplemente que estamos interesados solamente en campos a grandes distancias comparadas con el tamaño del lazo. Y veremos que cualquier lazo pequeño es un "dipolo magnético". Esto es, produce un campo *magnético* como el campo eléctrico de un dipolo eléctrico.

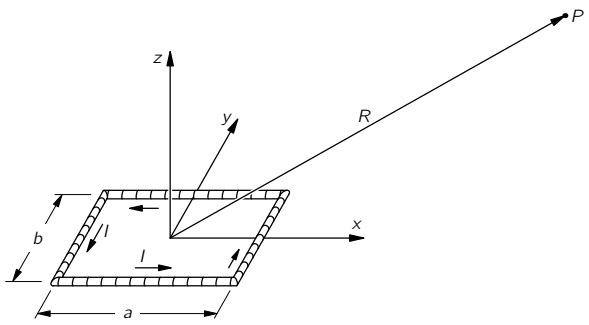


Figura 14-6. Un lazo rectangular de alambre con la corriente I. ¿Cuál es el campo magnético en P? ($R \gg a$ y $R \gg b$.)

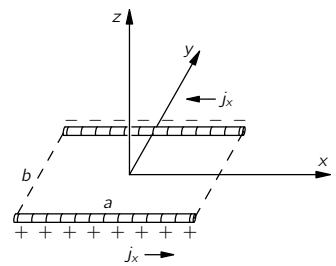


Figura 14-7. La distribución de j_x en el lazo de la figura 14-6.

Tomemos primero un lazo rectangular y escojamos nuestras coordenadas como muestra la figura 14-6. No existe corriente en la dirección z, así que A_z es cero. Hay corrientes en la dirección x en los dos lados de longitud a. En cada lado, la

densidad de corriente (y la corriente) es uniforme. Así pues, la solución para A_x es justamente como el potencial electrostático de dos varillas cargadas (véase la figura. 14-7). Como las varillas cargadas tienen cargas opuestas, su potencial eléctrico a grandes distancias sería justamente el potencial dipolar (sección 6-5). En el punto P de la figura 14-6, el potencial sería

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{e}_R}{R^2}, \tag{14.28}$$

donde $\boldsymbol{p}$ es el momento dipolar de la distribución de carga. El momento dipolar es en este caso la carga total de una varilla por la separación entre ellas:

$$p = \lambda ab. \tag{14.29}$$

El momento dipolar apunta en la dirección y negativa, así que el coseno del ángulo entre $\boldsymbol{R}$ y $\boldsymbol{p}$ es $-y/R$ (donde y es la coordenada de P). Tenemos así

$$\phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\lambda ab}{R^2}\,\frac{y}{R}.$$

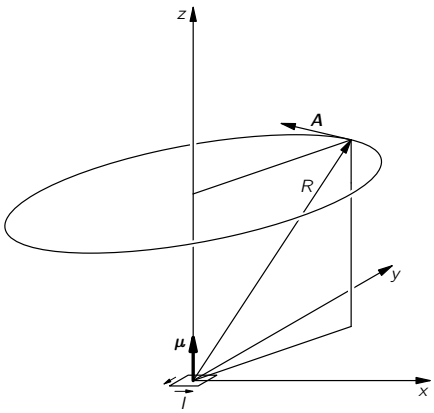


Figura 14-8. El potencial vectorial de un lazo pequeño con corriente en el origen (en el plano xy); un campo dipolar magnético.

Obtenemos A_z simplemente remplazando λ por I/c^2:

$$A_x = -\frac{Iab}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{y}{R^3}. \tag{14.30}$$

Por el mismo razonamiento,

$$A_y = \frac{Iab}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{x}{R^3}. \tag{14.31}$$

Otra vez, A_y es proporcional a x y A_x es proporcional a $-y$, así que (a grandes distancias) el vector potencial va en círculos alrededor del eje z, girando en el mismo sentido que I en el lazo, como muestra la figura 14-8.

El módulo de $\boldsymbol{A}$ es proporcional a Iab, que es la corriente multiplicada por el área del lazo. Este producto se llama *momento dipolar magnético* (o a menudo, "momento magnético") del lazo. Lo representamos por μ:

$$\mu = Iab. \tag{14.32}$$

El potencial vectorial de un pequeño lazo plano de *cualquier* forma (círculo, triángulo, etc.), también está dado por las ecuaciones (14.30) y (14.31) siempre que remplacemos Iab por

$$\mu = I\cdot(\text{área del lazo}). \tag{14.33}$$

Les dejamos la demostración de esto.

Podemos poner nuestra ecuación en forma vectorial si definimos que la dirección de $\boldsymbol{\mu}$ sea normal al plano del lazo con un sentido positivo dado por la regla de la mano derecha (figura 14-8). Entonces podemos escribir

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{R}}{R^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{e}_R}{R^2}. \tag{14.34}$$

Todavía tenemos que encontrar $\boldsymbol{B}$. Usando (14.33) y (14.34), junto con (14.4), obtenemos

$$B_x = -\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{\mu}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{x}{R^3} = \cdots\frac{3xz}{R^5} \tag{14.35}$$

(donde por $\cdots$ entendemos $\mu/4\pi\epsilon_0 c^2$),

$$\begin{aligned} B_y &= \frac{\partial}{\partial z}\left(-\cdots\frac{y}{R^3}\right) = \cdots\frac{3yz}{R^5}, \\ B_z &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\cdots\frac{x}{R^3}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(-\cdots\frac{y}{R^3}\right) \\ &= -\cdots\left(\frac{1}{R^3} - \frac{3z^2}{R^5}\right). \end{aligned} \tag{14.36}$$

Las componentes del campo $\boldsymbol{B}$ se comportan exactamente como las del campo $\boldsymbol{E}$ de un dipolo orientado según el eje z. (Véanse las ecuaciones (6.14) y (6.15); también la figura 6-4.) Ésta es la razón por la cual llamamos dipolo magnético al lazo. La palabra "dipolo" es ligeramente engañosa cuando se aplica a un campo magnético porque *no* hay "polos" magnéticos que correspondan a cargas eléctricas. El "campo dipolar" magnético no es producido por dos "cargas", sino por un lazo elemental de corriente.

Es curioso, no obstante, que empezando con leyes completamente diferentes, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\epsilon_0$ y $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{j}/\epsilon_0c^2$, podamos terminar con la misma clase de campos. ¿Por qué será? Es porque los campos dipolares aparecen sólo cuando estamos lejos de todas las cargas o corrientes. De este modo en la mayor parte del espacio que interesa, las ecuaciones para $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ son idénticas: ambas tienen divergencia y rotacional cero. Así pues, dan la misma solución. Sin embargo, las *fuentes* cuya configuración resumimos por medio de los momentos dipolares son físicamente muy diferentes —en un caso, es una corriente circulando; en el otro, un par de cargas, una encima y otra debajo del plano del lazo para el campo correspondiente—.

14-6 El potencial vectorial de un circuito

A menudo estamos interesados en los campos magnéticos producidos por circuitos de alambre en los cuales el diámetro del alambre es muy pequeño comparado con las dimensiones del sistema completo. En esos casos, podemos simplificar las ecuaciones para el campo magnético. Para un alambre delgado podemos escribir nuestro elemento de volumen en la forma

$$dV = S\,ds$$

donde S es la sección del alambre y ds es el elemento de distancia a lo largo del alambre. En realidad, como el vector $d\boldsymbol{s}$ está en la misma dirección de $\boldsymbol{j}$, como muestra la figura 14-9 (y podemos suponer que $\boldsymbol{j}$ es constante en cualquier sección transversal), podemos escribir una ecuación vectorial:

$$\boldsymbol{j}\,dV = jS\,d\boldsymbol{s}. \tag{14.37}$$

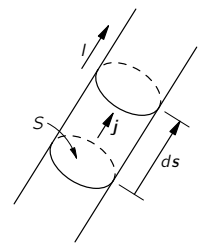


Figura 14-9. Para un alambre delgado $\boldsymbol{j}\,dV$ es igual a $I\,d\boldsymbol{s}$.

Pero jS es justamente lo que llamamos la corriente I en un alambre, de modo que nuestra integral para el potencial vectorial (14.19) se transforma en

$$\boldsymbol{A}(1)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0c^2}\int\frac{I\,d\boldsymbol{s}_2}{r_{12}} \tag{14.38}$$

(véase figura 14-10). (Suponemos que I es la misma en todo el circuito. Si hay varias ramas con diferentes corrientes, por supuesto que usaríamos la I apropiada para cada rama.)

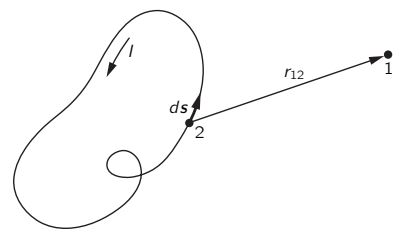


Figura 14-10. El campo magnético de un alambre se puede obtener de una integral alrededor del circuito.

De nuevo, podemos encontrar los campos con la ecuación (14.38) integrando directamente o resolviendo los problemas electrostáticos correspondientes.

14-7 La ley de Biot y Savart

Estudiando electrostática encontramos que el campo eléctrico de una distribución de carga conocida se podía obtener directamente con una integral, ecuación(4.16):

$$\boldsymbol{E}(1)=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(2)\boldsymbol{e}_{12}\,dV_2}{r_{12}^2}.$$

Como hemos visto, generalmente da más trabajo hacer esta integral —hay realmente tres integrales, una para cada componente— que hacer la integral para el potencial y tomar su gradiente.

Existe una integral similar que relaciona el campo magnético con las corrientes. Ya tenemos una integral para $\boldsymbol{A}$, ecuación (14.19); podemos conseguir una integral para $\boldsymbol{B}$ tomando el rotacional de ambos miembros:

$$\boldsymbol{B}(1)=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(1)=\boldsymbol{\nabla}\times\left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0c^2}\int\frac{\boldsymbol{j}(2)\,dV_2}{r_{12}}\right]. \tag{14.39}$$

Ahora debemos tener cuidado: el operador rotacional quiere decir tomar las derivadas de $\boldsymbol{A}(1)$, esto es, opera solamente sobre las coordenadas (x_1, y_1, z_1). Podemos mudar el operador $\boldsymbol{\nabla}\times$ dentro del signo integral, si recordamos que opera solamente sobre variables con el subíndice 1, el cual, por supuesto, aparece solamente en

$$r_{12} = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2}. \tag{14.40}$$

Tenemos para la componente x de $\boldsymbol{B}$,

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y_1} - \frac{\partial A_y}{\partial z_1} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int\left[j_z\,\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{1}{r_{12}}\right) - j_y\,\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{1}{r_{12}}\right)\right]dV_2 \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int\left[j_z\,\frac{y_1 - y_2}{r_{12}^3} - j_y\frac{z_1 - z_2}{r_{12}^3}\right]dV_2. \end{aligned} \tag{14.41}$$

La cantidad entre corchetes es justamente menos la componente x de

$$\frac{\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}^3} = \frac{\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{e}_{12}}{r_{12}^2}$$

Se encontrarán resultados correspondientes para las otras componentes, así tenemos

$$\boldsymbol{B}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int\frac{\boldsymbol{j}(2)\times\boldsymbol{e}_{12}}{r_{12}^2}\,dV_2. \tag{14.42}$$

La integral da $\boldsymbol{B}$ directamente en términos de las corrientes conocidas. La geometría que interviene es la misma que la mostrada en la figura 14-2.

Si las corrientes existen solamente en circuitos de pequeños alambres podemos, como en la última sección, hacer inmediatamente la integral a lo largo del alambre, remplazando $\boldsymbol{j}\,dV$ por $I\,d\boldsymbol{s}$, donde $d\boldsymbol{s}$ es un elemento de longitud del alambre. Entonces, usando los símbolos de la figura 14-10,

$$\boldsymbol{B}(1) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int\frac{I\boldsymbol{e}_{12}\times d\boldsymbol{s}_2}{r_{12}^2}. \tag{14.43}$$

(El signo menos aparece porque hemos invertido el orden del producto vectorial.) Esta ecuación para $\boldsymbol{B}$ se llama *ley de Biot-Savart*, en honor a sus descubridores. Da una fórmula para obtener directamente el campo magnético producido por alambres por los que circula corriente.

Puede que se pregunten: "¿Cuál es la ventaja del potencial vectorial si podemos encontrar $\boldsymbol{B}$ directamente mediante una integral vectorial? Después de todo, ¡$\boldsymbol{A}$ también implica tres integrales!" Debido al producto cruz, las integrales para $\boldsymbol{B}$ son, por lo general, más complicadas, como es evidente en la ecuación (14.41). Además como las integrales para $\boldsymbol{A}$ son parecidas a las de la electrostática, puede que ya las conozcamos. Finalmente, veremos que en materias teóricas más avanzadas (en relatividad, en formulaciones avanzadas de las leyes de la mecánica, como el principio de mínima acción que discutiremos más adelante, y en mecánica cuántica) el potencial vectorial desempeña un papel importante.

15

El potencial vectorial

15-1 Las fuerzas sobre un lazo de corriente; energía de un dipolo

15-2 Las energías mecánica y eléctrica

15-3 La energía de las corrientes estacionarias

15-4 $\boldsymbol{B}$ contra $\boldsymbol{A}$

15-5 El potencial vectorial y la mecánica cuántica

15-6 Lo que es verdadero para la estática y falso para la dinámica

15-1 Las fuerzas sobre un lazo de corriente; energía de un dipolo

En el último capítulo estudiamos el campo magnético producido por un pequeño lazo rectangular de corriente. Encontramos que es un campo dipolar, cuyo momento dipolar está dado por

$$\mu = IA, \tag{15.1}$$

donde I es la corriente y A el área del lazo. La dirección del momento es normal al plano del lazo así que podemos escribir

$$\boldsymbol{\mu} = IA\boldsymbol{n},$$

donde $\boldsymbol{n}$ es el vector unitario normal a la superficie A.

Un lazo de corriente —o dipolo magnético— no solamente produce campos magnéticos sino que también sufre fuerzas cuando se ubica en el campo magnético de otras corrientes. Veremos primero las fuerzas sobre un lazo rectangular en un campo magnético uniforme. Consideremos el eje z en la dirección del campo y que el plano del lazo contenga al eje y formando un ángulo θ con el plano xy como en la figura 15-1. El momento magnético del lazo —que es normal a este plano— formará entonces el ángulo θ con el campo magnético.

Como las corrientes son opuestas en lados opuestos del lazo, las fuerzas son también opuestas de manera que no hay una fuerza resultante sobre el lazo (cuando el campo es uniforme). Pero debido a las fuerzas sobre ambos lados del lazo marcados 1 y 2, en la figura, hay un torque que tiende a rotar el lazo alrededor del eje y. El módulo de estas fuerzas F_1 y F_2 es

$$F_1 = F_2 = IBb.$$

El brazo del momento es

$$a \operatorname{sen}\theta,$$

de manera que el torque es

$$\tau = Iab\,B \operatorname{sen}\theta,$$

o, puesto que Iab es el momento magnético del lazo,

$$\tau = \mu B \operatorname{sen}\theta.$$

El torque se puede escribir en forma vectorial:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}. \tag{15.2}$$

Aunque hemos demostrado solamente que el torque está dado por la ecuación (15.2) en un caso especial, el resultado es correcto para un lazo pequeño de cualquier forma como veremos. El mismo tipo de relación se mantiene para el torque de un dipolo eléctrico en un campo eléctrico:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}.$$

Examinemos ahora la energía mecánicas de nuestro lazo de corriente. Como hay un torque, la energía depende evidentemente de la orientación. El principio de los trabajos virtuales dice que el torque es la derivada de la energía respecto al ángulo de manera que podemos escribir

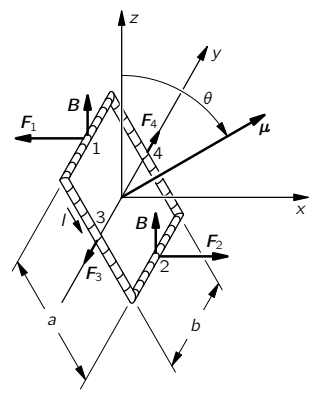


Figura 15-1. Lazo rectangular recorrido por la corriente I ubicado en un campo uniforme $\boldsymbol{B}$ (en la dirección de z). El torque sobre el lazo es $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}$, donde el momento magnético es $\mu = Iab$.

$$dU = \tau\, d\theta.$$

Haciendo $\tau = \mu B \operatorname{sen}\theta$ e integrando, podemos escribir para la energía

$$U = -\mu B \cos\theta + \text{una constante.} \tag{15.3}$$

(El signo es negativo debido a que el torque tiende a alinear el momento con el campo; la energía es menor cuando $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{B}$ son paralelos.)

Por razones que discutiremos más adelante, esta energía *no* es la energía total de un lazo de corriente. (Entre otras cosas, no hemos tenido en cuenta la energía necesaria para mantener la corriente en el lazo.) Por lo tanto, llamaremos a esta energía U_{mec}, para recordar que es solamente una parte de la energía. Además y puesto que dejamos marginada una parte de la energía, podemos tomar la constante de integración igual a cero en la ecuación (15.3). Rescribimos entonces la ecuación

$$U_{\text{mec}} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}. \tag{15.4}$$

Nuevamente, hay correspondencia con el resultado para un dipolo eléctrico:

$$U = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}. \tag{15.5}$$

La energía electrostática en la ecuación (15.5) es ahora la energía verdadera, pero U_{mec} en (15.4) no es la energía real. *Puede*, sin embargo, ser utilizada para calcular las fuerzas, por el principio de los trabajos virtuales, suponiendo que la corriente en el lazo —o por lo menos μ— se mantiene constante.

Podemos demostrar que para nuestro lazo rectangular U_{mec} corresponde, además, al trabajo mecánico efectuado para colocar el lazo en el campo. Así, la fuerza total sobre el lazo es cero solamente en un campo uniforme; en un campo no uniforme *existen* fuerzas resultantes sobre el lazo de corriente. Además, cuando se introduce el lazo en una región donde hay campo o cuando se deben atravesar zonas en las que el campo no es uniforme, se debe realizar un trabajo. Para hacer el cálculo más fácil, imaginaremos que el lazo se introduce en el campo con su momento apuntando en la dirección del campo. (Se puede luego rotar hasta su posición final después de ubicarlo en el lugar deseado.)

Imaginen que queremos mover el lazo en la dirección x —hacia una región de campo más intenso— y que el lazo está orientado como se muestra en la figura 15-2. Partimos de un lugar en que el campo es nulo e integramos el producto de la fuerza por la distancia recorrida al introducir el lazo dentro del campo.

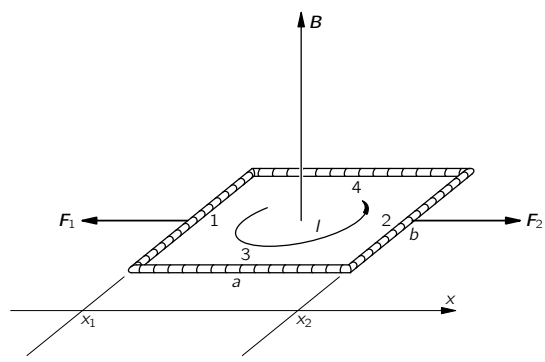


Figura 15-2. Un lazo se desplaza en la dirección x a través del campo $\boldsymbol{B}$, perpendicular a x.

Calculemos primero el trabajo efectuado sobre cada lado separadamente y luego hagamos la suma (en lugar de sumar las fuerzas antes de integrar). Las fuerzas sobre los lados 3 y 4 son perpendiculares a la dirección de movimiento y, por lo tanto, no realizan trabajo alguno. La fuerza sobre el lado 2 es $IbB(x)$ en la dirección x, y para obtener el trabajo realizado contra las fuerzas magnéticas

debemos integrarla desde un cierto x donde el campo sea nulo, digamos desde $x = -\infty$, hasta x_2, o sea, la posición actual:

$$W_2 = -\int_{-\infty}^{x_2} F_2\,dx = -Ib\int_{-\infty}^{x_2} B(x)\,dx. \tag{15.6}$$

Análogamente, el trabajo realizado contra las fuerzas sobre el lado 1 es

$$W_1 = -\int_{-\infty}^{x_1} F_1\,dx = Ib\int_{-\infty}^{x_1} B(x)\,dx. \tag{15.7}$$

Para calcular cada integral necesitamos saber cómo depende $B(x)$ de x. Pero observemos que el lado 1 es exactamente igual al lado 2 de manera que su integral contiene todo el trabajo realizado sobre el lado 2. En efecto, la suma de (15.6) y (15.7) es precisamente

$$W = -Ib\int_{x_1}^{x_2} B(x)\,dx. \tag{15.8}$$

Pero si estamos en una región donde B es casi igual en los dos lados 1 y 2, podemos escribir la integral en la forma

$$\int_{x_1}^{x_2} B(x)\,dx = (x_2 - x_1)B = aB,$$

donde B es el campo en el centro del lazo. La energía mecánica total que le hemos proporcionado es

$$U_{\text{mec}} = W = -Iab\,B = -\mu B. \tag{15.9}$$

El resultado está de acuerdo con la energía que tomamos para la ecuación (15.4).

Habríamos encontrado, por supuesto, el mismo resultado si hubiéramos sumado las fuerzas sobre el lazo antes de integrar para hallar el trabajo. Si consideramos a B_1 como el campo en el lado 1 y B_2 en el 2, la fuerza total en la dirección x es

$$F_x = Ib(B_2 - B_1).$$

Si el lazo es "pequeño", es decir, si B_2 y B_1 no son muy diferentes, podemos escribir

$$B_2 = B_1 + \frac{\partial B}{\partial x}\,\Delta x = B_1 + \frac{\partial B}{\partial x}\,a.$$

Y entonces la fuerza es

$$F_x = Iab\,\frac{\partial B}{\partial x}. \tag{15.10}$$

El trabajo total realizado sobre el lazo por las fuerzas *externas* es

$$-\int_{-\infty}^{x} F_x\,dx = -Iab\int \frac{\partial B}{\partial x}\,dx = -IabB,$$

que es precisamente $-\mu B$. Solamente ahora vemos por qué la *fuerza* sobre un pequeño lazo es proporcional a la derivada del campo magnético, como sería de esperar a partir de

$$F_x\,\Delta x = -\Delta U_{\text{mec}} = -\Delta(-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}). \tag{15.11}$$

Nuestro resultado es, desde luego, que aunque $U_{\text{mec}} = -\mu\cdot\boldsymbol{B}$ no incluya toda la energía del sistema —es una especie de imitación de energía— se puede usar con el principio de los trabajos virtuales para encontrar las fuerzas sobre lazos de corriente estacionaria.

15-2 Las energías mecánica y eléctrica

Vamos a demostrar ahora por qué la energía U_{mec} discutida en la sección anterior no es la energía correcta asociada con corrientes estacionarias —demostraremos que no tiene en cuenta la energía total del mundo—. Hemos insistido en efecto sobre el hecho de que puede ser utilizada como la energía para el cálculo de fuerzas a partir del principio de los trabajos virtuales, a *condición* de que las corrientes en los lazos (y todas las *otras* corrientes) no cambien. Veamos por qué todo esto funciona.

Imaginen que el lazo de la figura 15-2 se mueve en la dirección positiva del eje x y tomemos el eje z en la dirección de $\boldsymbol{B}$. Los electrones de conducción en el lado 2 experimentan una fuerza a lo largo del alambre en la dirección y. Pero debido a que fluyen —como una corriente eléctrica— hay una componente de su movimiento en la misma dirección de la fuerza. En consecuencia, cada electrón recibe por segundo un trabajo igual a $F_y v_y$, donde v_y es la componente de la velocidad de los electrones en la dirección del alambre. Llamaremos trabajo *eléctrico* a este trabajo realizado sobre los electrones. Además, nos indica que si el lazo se mueve en un campo *uniforme*, el trabajo eléctrico total es cero, puesto que se realiza un trabajo positivo en algún lugar del lazo y la misma cantidad de trabajo negativo se realiza en otro. Pero esto no es cierto si el circuito se mueve en un campo no uniforme —entonces *habrá* una cantidad resultante de trabajo realizado sobre los electrones—. En general, este trabajo tenderá a modificar el flujo de los electrones, pero si se mantiene la corriente constante, la energía debe ser absorbida o entregada por la batería o toda otra fuente que mantenga la corriente constante. Esta energía no se incluyó al calcular U_{mec} en la ecuación (15.9) porque nuestro cálculo incluía solamente las fuerzas mecánicas sobre el cuerpo del alambre.

Puede que estén pensando: pero la fuerza sobre los electrones depende de la *rapidez* con que se mueve el alambre; quizá si el alambre se moviera lo suficientemente lento, esta energía eléctrica se podría despreciar. Es cierto que la *rapidez* con que se suministra la energía eléctrica es proporcional a la velocidad del alambre, pero el suministro *total* de energía es proporcional además al *tiempo* en que se realiza. Así, la energía total es proporcional al producto de la velocidad por el tiempo, que es precisamente la distancia recorrida. Se realiza la misma cantidad de trabajo eléctrico, para una distancia dada en un campo.

Consideremos un segmento de alambre de longitud unitaria recorrido por la corriente I y moviéndose en dirección perpendicular a su longitud y al campo magnético $\boldsymbol{B}$ con velocidad v_{al}. Debido a la corriente los electrones tienen una velocidad de arrastre a lo largo del alambre v_{arr}. Además, la componente de la fuerza magnética sobre cada electrón en la dirección del desplazamiento siempre es $q_e v_{\text{al}} B$. De este modo la velocidad con que se suministra el trabajo eléctrico es $F v_{\text{arr}} = (q_e v_{al} B) v_{\text{arr}}$. Si hay N electrones de conducción por unidad de longitud del alambre, la rapidez total con que se realiza el trabajo eléctrico es

$$\frac{dU_{\text{elect}}}{dt} = N q_e v_{\text{al}} B v_{\text{arr}}.$$

Pero $N q_e v_{\text{arr}} = I$, la corriente en el alambre, y entonces

$$\frac{dU_{\text{elect}}}{dt} = I v_{\text{al}} B.$$

Ahora, como la corriente se mantiene constante, la fuerza sobre los electrones de conducción no hace que se aceleren; la energía eléctrica no se está suministrando a los electrones sino a la fuente que mantiene constante la corriente.

Pero notemos que la fuerza sobre el *alambre* es IB, así que IBv_{al} es también la variación temporal del *trabajo mecánico* realizado sobre el alambre, $dU_{\text{mec}}/dt = IBv_{\text{al}}$. Concluimos que el trabajo mecánico realizado sobre el alambre es precisamente igual al trabajo eléctrico proporcionado a la fuente de corriente, de tal manera que la energía del lazo ¡*es una constante*!

Esto no es una coincidencia sino una consecuencia de la ley que ya conocemos. La fuerza total sobre cada carga en el alambre es

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}).$$

La rapidez con que se realiza el trabajo es

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F} = q[\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})]. \tag{15.12}$$

Si no hay campos eléctricos tenemos solamente el segundo término, el cual es siempre nulo. Veremos más adelante que campos magnéticos *variables* producen campos eléctricos, de manera que nuestro razonamiento se aplica solamente a alambres en movimiento dentro de campos magnéticos constantes.

¿De qué modo, entonces, el principio de los trabajos virtuales nos da la respuesta correcta? Porque *aún* no hemos tenido en cuenta la energía *total* del mundo. No hemos incluido la energía de las corrientes que *crean* el campo magnético del que hemos partido.

Supongan que nos imaginamos un sistema completo como el dibujado en la figura 15-3(a), en el cual movemos nuestro lazo con la corriente I_1 dentro del campo magnético $\boldsymbol{B}_1$, producido por la corriente I_2 en una bobina. Pero la corriente I_1 en el lazo crea igualmente un campo magnético $\boldsymbol{B}_2$ donde se encuentra la bobina. Siempre que el lazo se desplaza, el campo $\boldsymbol{B}_2$ varía. Como veremos en el próximo capítulo, un campo magnético variable genera un campo $\boldsymbol{E}$; y este campo $\boldsymbol{E}$ realizará un trabajo sobre las cargas de la bobina. Esta energía también debe ser incluida en nuestro balance de la energía total.

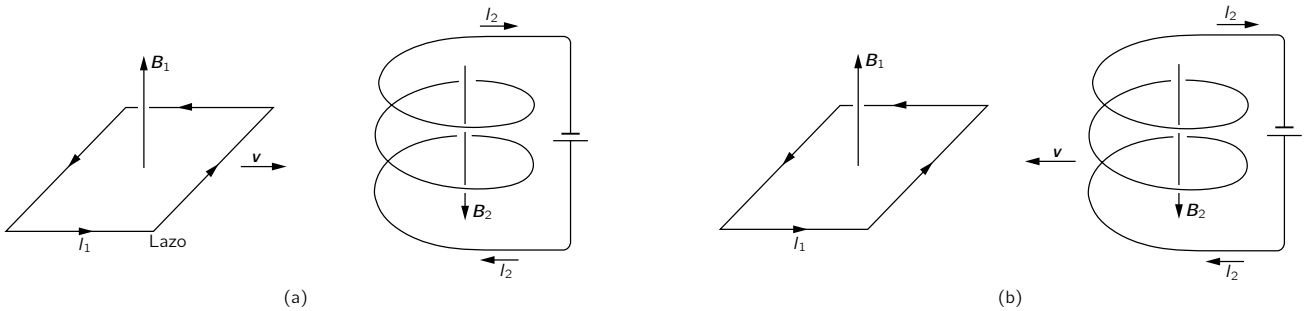


Figura 15-3. La energía de un lazo pequeño en un campo magnético.

Podríamos esperar hasta el próximo capítulo para determinar este nuevo término de la energía, pero también podemos ver cómo será utilizando el principio de la relatividad en la forma siguiente. Cuando movemos el lazo hacia la bobina fija sabemos que su energía eléctrica es precisamente igual y opuesta al trabajo mecánico realizado. Entonces

$$U_{\text{mec}} + U_{\text{elect}}(\text{lazo}) = 0.$$

Si consideramos ahora lo que sucede desde otro punto de vista, en el cual el lazo está en reposo y la bobina se mueve hacia él. La bobina se está moviendo entonces dentro del campo producido por el lazo. Los mismos razonamientos darán

$$U_{\text{mec}} + U_{\text{elect}}(\text{bobina}) = 0.$$

La energía mecánica es la misma en los dos casos porque se debe a la fuerza entre los dos circuitos.

La suma de las dos ecuaciones da

$$2U_{\text{mec}} + U_{\text{elect}}(\text{lazo}) + U_{\text{elect}}(\text{bobina}) = 0.$$

La energía total de todo el sistema es, por supuesto, la suma de las dos energías eléctricas más la energía mecánica tomada una *sola vez*. Tenemos entonces

$$U_{\text{total}} = U_{\text{elect}}(\text{lazo}) + U_{\text{elect}}(\text{bobina}) + U_{\text{mec}} = -U_{\text{mec}}. \tag{15.13}$$

La energía total del mundo es realmente U_{mec} *menos*. Si deseamos la energía verdadera de un dipolo magnético por ejemplo, debemos escribir

$$U_{\text{total}} = +\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}.$$

Es correcto únicamente, si ponemos por condición que todas las corrientes sean constantes, el que podamos utilizar solamente una parte de la energía, U_{mec} (que es siempre la energía verdadera con signo negativo), para determinar las fuerzas mecánicas. En un problema más general, debemos tener el cuidado de incluir todas las energías.

Hemos observado una situación análoga en electrostática. Demostramos que la energía de un condensador era igual a $Q^2/2C$. Cuando usamos el principio de los trabajos virtuales para hallar la fuerza entre las placas del condensador, la variación de energía es igual al producto $Q^2/2$ por la variación de $1/C$. Esto es,

$$\Delta U = \frac{Q^2}{2}\,\Delta\left(\frac{1}{C}\right) = -\frac{Q^2}{2}\,\frac{\Delta C}{C^2}. \tag{15.14}$$

Supongan ahora que queremos calcular el trabajo producido por el desplazamiento de dos conductores en condiciones diferentes, la diferencia de voltaje entre ellos se mantiene constante. Así que, podemos dar la respuesta correcta para la fuerza en base al principio de los trabajos virtuales siempre y cuando hagamos algo artificial. Como $Q = CV$, la energía real es $\frac{1}{2}CV^2$. Pero si definimos una energía artificial igual a $-\frac{1}{2}CV^2$, se puede utilizar el principio de los trabajos virtuales para obtener las fuerzas haciendo la variación de la energía artificial igual al trabajo mecánico, a condición de que insistamos que el voltaje V se mantenga constante. Entonces

$$\Delta U_{\text{mec}} = \Delta\left(-\frac{CV^2}{2}\right) = -\frac{V^2}{2}\,\Delta C, \tag{15.15}$$

es lo mismo que la ecuación (15.14). Obtenemos el resultado correcto aunque hemos despreciado el trabajo realizado por el sistema eléctrico para mantener el voltaje constante. Nuevamente esta energía eléctrica es el doble de la energía mecánica y de signo contrario.

Por lo tanto, si calculamos artificialmente, sin tener en cuenta que la fuente de potencial tiene que hacer trabajo para mantener el voltaje constante, obtenemos la respuesta correcta. Esto es exactamente análogo a la situación que se presenta en magnetostática.

15-3 La energía de las corrientes estacionarias

Vamos ahora a aprovechar nuestro conocimiento de que $U_{\text{total}} = -U_{\text{mec}}$ para hallar la energía verdadera de las corrientes estacionarias en campos magnéticos. Podemos comenzar con la energía verdadera de un pequeño lazo de corriente. Llamando a U_{total} simplemente U escribimos

$$U = \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}. \tag{15.16}$$

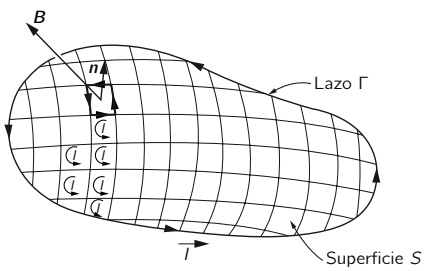


Figura 15-4. La energía de un lazo grande en un campo magnético se puede considerar como la suma de las energías de pequeños lazos.

Aunque calculamos esta energía para un lazo rectangular plano, el mismo resultado se aplica a un lazo plano pequeño de cualquier forma.

Podemos hallar la energía de un circuito de cualquier forma imaginándonos que está formado por pequeños lazos de corriente. Supongamos que tenemos un alambre de la forma del lazo Γ en la figura 15-4. Este lazo limita la superficie S a la cual dividimos en pequeños lazos que se pueden considerar planos. Siempre que consideramos que la corriente I circula por *cada* uno de los pequeños lazos, el resultado neto debe ser el mismo que la corriente por Γ, puesto que las corrientes se anularán sobre todas las líneas internas de Γ. Físicamente, el sistema de pequeñas corrientes es indistinguible del circuito original. Además, la energía también debe ser la misma y es precisamente la suma de las energías de los pequeños lazos.

Si la superficie de cada pequeño lazo es Δa, su energía $I\Delta a B_n$, donde B_n es la componente normal a Δa. La energía total es

$$U = \sum I B_n \Delta a.$$

Pasando al límite para lazos infinitesimales la suma se transforma en integral y

$$U = I \int B_n \, da = I \int \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} \, da, \tag{15.17}$$

donde $\boldsymbol{n}$ es el vector unitario normal para da.

Si ponemos $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ podemos relacionar la integral de superficie con una integral de línea usando el teorema de Stokes:

$$I \int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{n} \, da = I \oint_\Gamma \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s}, \tag{15.18}$$

donde $d\boldsymbol{s}$ es el elemento de línea a lo largo de Γ. Tenemos así la energía para un circuito de cualquier forma:

$$U = I \oint_{\text{circuito}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s}, \tag{15.19}$$

En esta expresión $\boldsymbol{A}$ se refiere, por supuesto, al potencial vectorial debido a las corrientes (distintas de I en el alambre) que producen el campo $\boldsymbol{B}$ en el alambre.

Pueden imaginarse cualquier distribución de corrientes estacionarias como constituida por filamentos que corren paralelos a las líneas de flujo de corriente. Para cada par de esos circuitos, la energía está dada por (15.19), en la cual la integral se toma a lo largo de un circuito utilizando el potencial vectorial $\boldsymbol{A}$ del otro circuito. Para la energía total debemos sumar todos los pares. Si en lugar de tener en cuenta los pares, sumamos sobre todos los filamentos habremos tenido en cuenta la energía dos veces (vimos un efecto similar en electrostática) de manera que la energía total se puede escribir

$$U = \tfrac{1}{2} \int \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{A} \, dV. \tag{15.20}$$

Esta fórmula corresponde al resultado que hallamos para la energía electrostática:

$$U = \tfrac{1}{2} \int \rho\phi \, dV. \tag{15.21}$$

Así pues, si lo deseamos, podemos considerar a $\boldsymbol{A}$ como una especie de potencial de las corrientes en magnetostática. Desafortunadamente esta idea no es muy útil, puesto que es válida únicamente para campos estáticos. En efecto, ni la ecuación (15.20) ni la (15.21) dan la energía correcta cuando los campos varían en el tiempo.

15-4 $\boldsymbol{B}$ contra $\boldsymbol{A}$

En esta sección queremos discutir el siguiente problema: ¿es el potencial vectorial un medio útil para realizar el cálculo —como el potencial escalar es útil en electrostática— o el potencial vectorial es un campo "real"? ¿no es el campo magnético el campo "real" puesto que es responsable de la fuerza sobre una partícula en movimiento? Primero, debemos decir que la frase "un campo real" no tiene mucho sentido. Entre otras cosas, probablemente no sientan que el campo magnético sea muy "real" pues de todos modos la noción de campo es bastante abstracta. No pueden sacar sus manos y sentir el campo magnético. Además, el valor del campo magnético no es muy definido; tomando un sistema de coordenadas conveniente, por ejemplo, pueden hacer desaparecer el campo magnético que existía en un punto.

Aquí entendemos por un campo "real" lo siguiente: un campo real es una función matemática que utilizamos para evitar la idea de acción a distancia. Siempre que tenemos una partícula cargada en la posición P, la misma se ve afectada por otras cargas ubicadas a cierta distancia de P. Un modo de describir la interacción es diciendo que las otras cargas crean ciertas "condiciones" —sea lo que sea— en las proximidades de P. Si conocemos esas condiciones, que describimos dando los campos eléctrico y magnético, podemos determinar completamente el comportamiento de la partícula —sin otra referencia que la forma en que han sido creadas dichas condiciones—.

En otras palabras, si aquellas otras cargas se alteran de alguna manera, pero las condiciones en P, que están descritas por los campos eléctrico y magnético en P permanecieran constantes, entonces el movimiento de la carga sería igual. Un campo "real" es, entonces, un conjunto de números que especificamos de tal manera que lo que sucede *en un punto* depende solamente de los números *en ese punto*. No necesitamos conocer nada más de lo que sucede en otros puntos. En este sentido discutiremos si el potencial vectorial es un campo "real".

Puede que se estén preguntando qué hay con el hecho que el potencial vectorial no es único —que se puede modificar sumándole el gradiente de cualquier escalar sin que cambien las fuerzas que actúan sobre las partículas—. Esto no tiene nada que ver, sin embargo, con el problema de realidad en el sentido en que estamos hablando. Por ejemplo, el campo magnético se altera en cierto sentido mediante cambios relativistas (como también $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{A}$). Pero no nos preocupa lo que pasa si el campo *puede* cambiar de esta forma. En realidad, no hay ninguna diferencia; no tiene nada que ver con la cuestión de saber si el potencial vectorial es verdaderamente un campo "real" para describir los efectos magnéticos, o si es solamente una herramienta matemática útil.

Debemos hacer algunos comentarios sobre la utilidad del potencial vectorial $\boldsymbol{A}$. Hemos visto que se puede usar formalmente para calcular los campos magnéticos de corrientes conocidas, como ϕ se puede utilizar para encontrar los campos eléctricos. En electrostática vimos que ϕ estaba dado por la integral escalar

$$\phi(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(2)}{r_{12}}\,dV_2. \tag{15.22}$$

A partir de ϕ obtenemos las tres componentes de $\boldsymbol{E}$ por medio de tres operaciones diferenciales. Este procedimiento es comúnmente más fácil de realizar que calculando las tres integrales de la fórmula vectorial

$$\boldsymbol{E}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(2)\boldsymbol{e}_{12}}{r_{12}^2}\,dV_2. \tag{15.23}$$

Primero, hay tres integrales; y segundo, cada integral es, en general, un poco más difícil.

Para la magnetostática las ventajas son mucho menos evidentes. La integral para $\boldsymbol{A}$ es ya una integral vectorial:

$$\boldsymbol{A}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int \frac{\boldsymbol{j}(2)\,dV_2}{r_{12}}, \tag{15.24}$$

que, por supuesto, son en realidad tres integrales. Además, cuando tomamos el rotacional de $\boldsymbol{A}$ para hallar $\boldsymbol{B}$ debemos efectuar seis derivadas y combinarlas por pares. No se ve inmediatamente que este método sea realmente más fácil para la mayor parte de los problemas que el calcular $\boldsymbol{B}$ en forma directa a partir de

$$\boldsymbol{B}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int \frac{\boldsymbol{j}(2)\times\boldsymbol{e}_{12}}{r_{12}^2}\,dV_2. \tag{15.25}$$

Frecuentemente es más difícil usar el potencial vectorial para problemas simples por la siguiente razón. Supongan que estamos interesados solamente en el campo magnético $\boldsymbol{B}$ en un punto y que el problema tiene una buena simetría —digamos que buscamos el campo en un punto del eje de un anillo de corriente—.

Debido a la simetría podemos obtener fácilmente $\boldsymbol{B}$ efectuando la integral de la ecuación (15.25). Si en cambio queremos hallar primero $\boldsymbol{A}$ necesitaremos obtener $\boldsymbol{B}$ a partir de las *derivadas* de $\boldsymbol{A}$, de manera que debemos conocer $\boldsymbol{A}$ en todos los puntos *vecinos* al punto de nuestro interés. La mayoría de esos puntos están fuera del eje de simetría, de manera que la integral para $\boldsymbol{A}$ se torna complicada. Por ejemplo, en el problema del anillo, necesitaríamos usar integrales elípticas. En un problema de este tipo se ve claramente que $\boldsymbol{A}$ no es muy útil. Es cierto que en muchos problemas complejos es fácil trabajar con $\boldsymbol{A}$, pero sería difícil pretender que esta facilidad técnica justifique que se deba conocer un campo vectorial más.

Hemos introducido $\boldsymbol{A}$ porque *tiene* un gran significado en física. No solamente se relaciona con la energía de las corrientes, como dijimos en la sección anterior, sino que es también un campo físico "real" en el sentido que hemos descrito anteriormente. En mecánica clásica es evidente que podemos escribir la fuerza sobre una partícula en la forma

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}), \tag{15.26}$$

de manera que dada la fuerza, todo lo relativo al movimiento está determinado. En cualquier región donde $\boldsymbol{B} = 0$ aunque $\boldsymbol{A}$ no sea nulo, como en el exterior de un solenoide, no hay efectos perceptibles de $\boldsymbol{A}$. Por esto, durante mucho tiempo se pensó que $\boldsymbol{A}$ no era un campo "real". Se puede demostrar, sin embargo, que hay fenómenos donde interviene la mecánica cuántica que muestran que el campo $\boldsymbol{A}$ es en efecto un campo "real" en el sentido que ya hemos definido. En la próxima sección les mostraremos cómo se utiliza.

15-5 El potencial vectorial y la mecánica cuántica

Cuando se pasa de la mecánica clásica a la mecánica cuántica hay muchos cambios, qué conceptos son importantes. Discutimos anteriormente algunos de ellos en el volumen I. En particular, el concepto de fuerza se desvanece gradualmente mientras que los conceptos de energía y momentum comienzan a tomar importancia relevante. Recordarán que en vez del movimiento de las partículas se habla de amplitud de probabilidad que varía en el espacio y en el tiempo. En esas amplitudes hay longitudes de onda relacionadas con los momenta y frecuencias relacionadas con las energías. Los momenta y las energías que determinan las fases de las funciones de onda son, por lo tanto, cantidades importantes en mecánica cuántica. En vez de fuerzas nos ocupamos de la forma en que las interacciones cambian la longitud de onda de las ondas. El concepto de fuerza pasa a ser secundario —si no desaparece—. Cuando la gente habla de fuerzas nucleares, por ejemplo, con lo que realmente se trabaja y lo que se analiza es la energía de interacción entre dos nucleones y no la fuerza entre ellos. Nunca nadie deriva la energía a fin de ver cómo es la fuerza. En esta sección queremos describir el modo en que los potenciales vectoriales y escalares intervienen en mecánica cuántica. En efecto, es precisamente porque momentum y energía desempeñan un papel central en la mecánica cuántica, que $\boldsymbol{A}$ y ϕ nos dan el camino más directo de introducir los efectos electromagnéticos en la descripción cuántica.

Tenemos que recordar un poco cómo funciona la mecánica cuántica. Consideraremos nuevamente el experimento imaginario descrito en el capítulo 37 del volumen I, en el cual los electrones son difractados por dos rendijas. El dispositivo se muestra nuevamente en la figura 15-5. Los electrones, todos aproximadamente de la misma energía, dejan la fuente y van hacia una pared con dos rendijas estrechas. Detrás de la pared se instala una pantalla con un detector móvil. El detector mide la cantidad por unidad de tiempo, que llamaremos I, de electrones que llegan a una pequeña región de la pantalla a la distancia x del eje de simetría. La cantidad es proporcional a la probabilidad de que un electrón que deja la fuente pueda llegar solo a esa región de la pantalla. Esta probabilidad presenta la distribución complicada que se observa en la figura y que se puede comprender

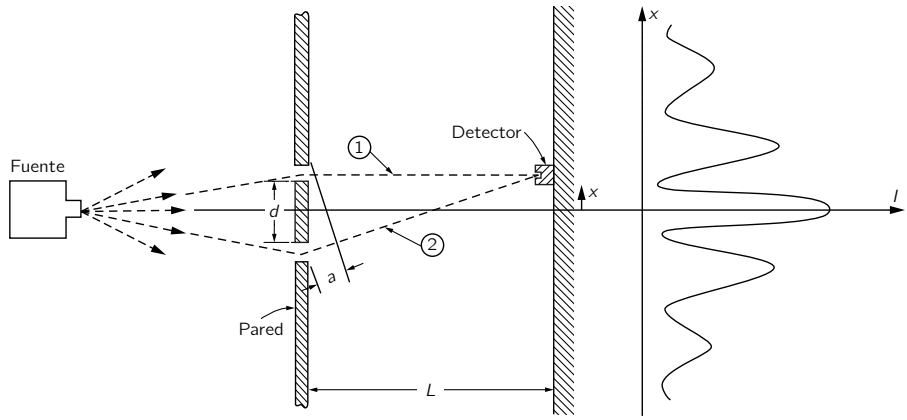


Figura 15-5. Experimento de interferencia con electrones (véase también el volumen I, capítulo 37).

como debida a la interferencia de dos amplitudes, una por cada rendija. La interferencia de las dos amplitudes depende de su diferencia de fase. Esto es, si las amplitudes son $C_1 e^{i\Phi_1}$ y $C_2 e^{i\Phi_2}$ la diferencia de fase $\delta = \Phi_1 - \Phi_2$ determina el diagrama de interferencia [véase la ecuación (29.12) en el volumen I]. Si la distancia entre la pantalla y las rendijas es L y si la diferencia de los caminos recorridos por los electrones que pasan por las dos rendijas es a, como muestra la figura, la diferencia de fase de las dos ondas está dada por

$$\delta = \frac{a}{\lambda\!\!\!^{-}}. \tag{15.27}$$

Como de costumbre tomamos $\lambda\!\!\!^{-} = \lambda/2\pi$ donde λ es la longitud de onda de la variación espacial de la amplitud de probabilidad. Para simplificar consideraremos solamente valores de x mucho menores que L; entonces podemos poner

$$a = \frac{x}{L}\, d$$

y

$$\delta = \frac{x}{L}\,\frac{d}{\lambda\!\!\!^{-}}. \tag{15.28}$$

cuando x es cero, δ es cero; las ondas están en fase y la probabilidad tiene un máximo. Cuando δ es igual a π, las ondas están desfasadas, interfieren en forma destructiva y la probabilidad es un mínimo. Así obtenemos la función ondulada para la intensidad de los electrones.

Queremos enunciar ahora la ley que en la mecánica cuántica remplaza la ley de fuerza $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$. Será la ley que determine el comportamiento de partículas cuánticas en un campo electromagnético. Como lo que sucede está determinado por las amplitudes, la ley nos debe decir cómo afecta las amplitudes la influencia magnética; no hablamos más de la aceleración de una partícula. La ley es la siguiente: la fase de la amplitud de llegar por una trayectoria cualquiera es afectada por la presencia de un campo magnético en una cantidad que es igual a la integral del potencial vectorial a lo largo de toda la trayectoria por la carga de la partícula dividida por la constante de Planck. Esto es

$$\text{Variación magnética de la fase} = \frac{q}{\hbar} \int_{\text{trayectoria}} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s}. \tag{15.29}$$

Si no hubiera campo magnético habría una cierta fase de llegada. Si hay un campo magnético en alguna parte, la fase de la onda que llega se ve incrementada por la integral de la ecuación (15.29).

Aunque no lo necesitaremos utilizar en nuestra discusión, mencionaremos que el efecto de un campo electrostático es de un cambio de fase dado por *menos* la integral sobre el *tiempo* del potencial escalar ϕ:

$$\text{Variación eléctrica de fase} = -\frac{q}{\hbar}\int \phi\, dt.$$

Estas dos expresiones son correctas no solamente para campos estáticos, sino que juntas dan el resultado correcto para *cualquier* campo electromagnético, estático o dinámico. Ésta es la ley que remplaza a $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$. Sin embargo, queremos considerar ahora solamente campos magnéticos estáticos.

Supongan que hay un campo magnético presente en el experimento de las dos rendijas. Busquemos la fase de llegada a la pantalla de las dos ondas cuya trayectoria pasa a través de las dos rendijas. Su interferencia determina dónde debe estar el máximo de la probabilidad. Podemos llamar Φ_1, a la fase de la onda a lo largo de la trayectoria (1). Si $\Phi_1(B = 0)$ es la fase sin el campo magnético, entonces, cuando se coloca el campo magnético la fase será

$$\Phi_1 = \Phi_1(B = 0) + \frac{q}{\hbar}\int_{(1)} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s}. \tag{15.30}$$

Análogamente, la fase para la trayectoria (2) es

$$\Phi_2 = \Phi_2(B = 0) + \frac{q}{\hbar}\int_{(2)} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s}. \tag{15.31}$$

La interferencia de las ondas en el detector depende de la diferencia de fase

$$\delta = \Phi_1(B = 0) - \Phi_2(B = 0) + \frac{q}{\hbar}\int_{(1)} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} - \frac{q}{\hbar}\int_{(2)} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s}. \tag{15.32}$$

Llamemos $\delta(\boldsymbol{B} = 0)$ a la diferencia en ausencia de campo; es justamente la diferencia de fase que hemos calculado antes en la ecuación (15.28). Recordemos también que las dos integrales pueden ser escritas como *una* sola que va primero por (1) y regresa luego por (2); llamamos camino cerrado (1-2) a este trayecto. Tenemos entonces

$$\delta = \delta(B = 0) + \frac{q}{\hbar}\oint_{(1\text{–}2)} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s}. \tag{15.33}$$

Esta ecuación dice cómo se altera el movimiento del electrón debido al campo magnético; con ella podemos hallar la nueva posición de los máximos y mínimos de intensidad en la pantalla.

Antes de hacerlo, sin embargo, mencionemos la cuestión interesante e importante que sigue. Recuerdan que la función potencial vectorial tiene cierta arbitrariedad. Dos funciones potenciales vectoriales $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{A}'$ cuya diferencia es el gradiente de una cierta función escalar, $\boldsymbol{\nabla}\psi$, representan ambas el mismo campo magnético, puesto que el rotacional de un gradiente es nulo. Dan, por lo tanto, la misma fuerza clásica $q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$. Si en mecánica cuántica los efectos dependen del potencial vectorial, ¿*cuál* de las muchas funciones $\boldsymbol{A}$ posibles es la correcta?

La respuesta es que la misma arbitrariedad en $\boldsymbol{A}$ continúa existiendo en la mecánica cuántica. Si en la ecuación (15.33) cambiamos $\boldsymbol{A}$ por $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\psi$, la integral sobre $\boldsymbol{A}$ será

$$\oint_{(1\text{–}2)} \boldsymbol{A}' \cdot d\boldsymbol{s} = \oint_{(1\text{–}2)} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s} + \oint_{(1\text{–}2)} \boldsymbol{\nabla}\psi \cdot d\boldsymbol{s}.$$

La integral de $\boldsymbol{\nabla}\psi$ es a lo largo del camino *cerrado* (1-2), pero la integral de la componente tangencial de un gradiente sobre un camino cerrado es siempre cero por el teorema de Stokes. Por lo tanto, ambos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{A}'$ dan la misma diferencia de fase y el mismo efecto cuántico de interferencia. En ambos casos, clásico y cuántico, lo que interesa es solamente el rotacional de $\boldsymbol{A}$; cualquier función $\boldsymbol{A}$ que tenga el rotacional correcto conduce a la física correcta.

La misma conclusión es evidente si usamos los resultados de la sección 14-1. Allí encontramos que la integral de línea de $\boldsymbol{A}$ a lo largo de un camino cerrado es el flujo de $\boldsymbol{B}$ a través de ese camino, que es aquí el flujo entre los caminos (1) y (2). Si lo deseamos, la ecuación (15.33) puede ser escrita en la forma

$$\delta = \delta(B = 0) + \frac{q}{\hbar}\,[\text{flujo de } \boldsymbol{B} \text{ entre (1) y (2)}], \tag{15.34}$$

donde por flujo de $\boldsymbol{B}$ entendemos, como de costumbre, la integral de superficie de la componente normal de $\boldsymbol{B}$. El resultado depende solamente de $\boldsymbol{B}$ y, por lo tanto, solamente del rotacional de $\boldsymbol{A}$.

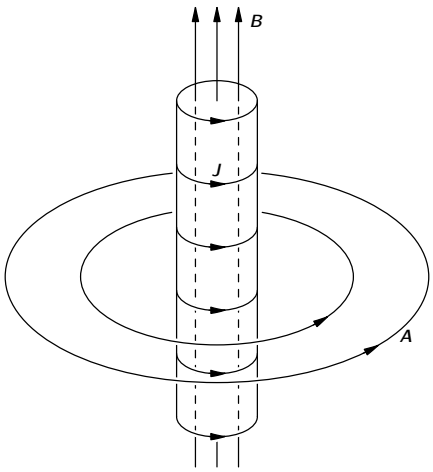


Figura 15-6. El campo magnético y el potencial vectorial de un solenoide largo.

Como podemos escribir el resultado tanto en términos de $\boldsymbol{B}$ como en términos de $\boldsymbol{A}$, podrán inclinarse a pensar que $\boldsymbol{B}$ se comporta como un campo "real" y que $\boldsymbol{A}$ se puede considerar sólo como una construcción artificial. Pero la definición de campo "real" que propusimos originalmente estaba basada sobre la idea de que un campo "real" no puede actuar a distancia sobre una partícula. Podemos, sin embargo, dar un ejemplo en el cual $\boldsymbol{B}$ es cero —o, por lo menos, arbitrariamente pequeño— en todo lugar donde haya alguna posibilidad de encontrar las partículas, de modo que no es posible considerarlo actuando *directamente* sobre ellas.

Recordarán que para un solenoide largo por el que circula una corriente de electrones hay un campo $\boldsymbol{B}$ dentro pero no fuera, mientras que hay montones de $\boldsymbol{A}$ circulando alrededor por fuera, como lo muestra la figura 15-6. Si creamos una situación en la cual los electrones se encuentran solamente en el *exterior* del solenoide —solamente donde hay $\boldsymbol{A}$— existirá una influencia sobre el movimiento, de acuerdo con la ecuación (15.33). De manera clásica esto es imposible. Es decir, clásicamente la fuerza depende sólo de $\boldsymbol{B}$; por lo cual si el solenoide circula corriente, la partícula lo debe atravesar. Pero desde un punto de vista cuántico pueden encontrar que hay un campo magnético dentro del solenoide, andando a su *alrededor* —¡sin aproximarse jamás a él!

Supongan que colocamos un solenoide muy largo de pequeño diámetro justo detrás de la pared y entre las dos rendijas como muestra la figura 15-7. Así, el diámetro del solenoide debe ser mucho más pequeño que la distancia d entre las dos rendijas. En estas condiciones, la difracción de los electrones no da probabilidad apreciable de que los electrones se acerquen al solenoide. ¿Cuál será el efecto producido sobre nuestro experimento de interferencia?

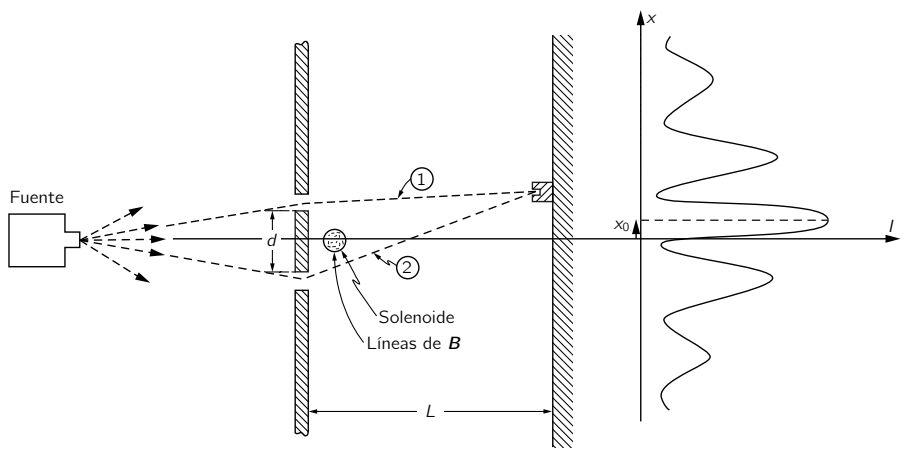


Figura 15-7. Un campo magnético puede influir el movimiento de electrones aun cuando exista solamente en la región donde la probabilidad de encontrar los electrones es muy pequeña.

Comparemos la situación con y sin corriente por el solenoide. Si no tenemos corriente, no tenemos ni $\boldsymbol{B}$ ni $\boldsymbol{A}$ y obtenemos el diagrama original de la intensidad de los electrones en la pantalla. Si hacemos circular la corriente en el solenoide

y creamos un campo magnético $\boldsymbol{B}$ en su interior, habrá entonces un $\boldsymbol{A}$ en el exterior. Se produce un corrimiento en la diferencia de fase proporcional a la circulación de $\boldsymbol{A}$ en el exterior del solenoide, lo que significa que el diagrama de máximos y mínimos se ha corrido a una nueva posición. De hecho, como el flujo de $\boldsymbol{B}$ en el interior es constante para cualquier par de trayectorias, también lo es la circulación de $\boldsymbol{A}$. En todo punto de llegada hay el mismo cambio de fase; corresponde a un desplazamiento de toda la figura en la dirección x en una cantidad constante, digamos x_0, que podemos calcular fácilmente. La intensidad máxima se producirá cuando la diferencia de fase entre dos ondas sea nula. Ahora bien, usando la ecuación (15.33) o la (15.34) para δ y la ecuación (15.28) para x tenemos

$$x_0 = -\frac{L}{d}\,\lambda\!\!\!^{-}\,\frac{q}{\hbar}\oint_{(1\text{–}2)} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{s}, \tag{15.35}$$

o

$$x_0 = -\frac{L}{d}\,\lambda\!\!\!^{-}\,\frac{q}{\hbar}\,[\text{flujo de } \boldsymbol{B} \text{ entre (1) y (2)}]. \tag{15.36}$$

La figura con el solenoide colocado debe ser* como lo muestra la figura 15-7. Al menos, ésta es la predicción de la mecánica cuántica.

Precisamente este experimento ha sido realizado recientemente. Es un experimento muy, muy difícil. Como la longitud de onda de los electrones es muy pequeña, el aparato para observar la interferencia debe ser de tamaño muy pequeño. Las rendijas deben estar muy juntas, lo que significa que se necesitará un solenoide extremadamente pequeño. Así que en ciertas circunstancias, cristales de hierro pueden crecer en forma de filamentos muy largos y microscópicamente finos llamados agujas. Cuando estas agujas de hierro son imantadas se comportan como minúsculos solenoides y no hay campo en el exterior excepto cerca de los extremos. El experimento de interferencia de electrones fue realizado con tales agujas ubicadas entre dos rendijas y se observa el desplazamiento predicho en el diagrama de los electrones.

En el sentido que hemos definido, el campo $\boldsymbol{A}$ es "real". Puede que digan: "Pero *había* un campo magnético". Lo había, pero recuerden nuestra idea original —que el campo es "real" si es lo que se debe especificar *en la posición* de la partícula para obtener el movimiento—. El campo $\boldsymbol{B}$ en las agujas actúa a distancia. Si deseamos describir su influencia no como una acción a distancia, debemos usar el potencial vectorial.

Este tema tiene una historia interesante. La teoría que hemos descrito era conocida desde los comienzos de la mecánica cuántica en 1926. El hecho de que el potencial vectorial aparezca en la ecuación de onda de la mecánica cuántica (llamada ecuación de Schrödinger) era obvio desde los días en que fue escrita. Que no puede ser remplazada por el campo magnético de una manera fácil fue observado por uno tras otro de los que pretendieron hacerlo. De nuestro ejemplo de electrones, resulta claro que los electrones se mueven en una región donde no hay campos y que no obstante son afectados. Pero debido a que en mecánica clásica $\boldsymbol{A}$ no parecía tener una importancia directa y, por otra parte, porque se podía cambiar por adición de un gradiente, la gente decía repetidamente que el potencial vectorial no tenía significado físico directo —que sólo los campos eléctricos y magnéticos son "correctos" aun en mecánica cuántica—. En retrospectiva, parece extraño que nadie pensara en discutir este experimento antes de 1956, cuando Bohm y Aharonov lo sugirieron por primera vez y lograron que el problema quedara tan claro como el agua. Las implicaciones estaban allí pero nadie les había prestado atención. En consecuencia, mucha gente quedó bastante sorprendida cuando la cuestión salió a luz. Es por eso que alguien pensó que valía la pena hacer el experimento para ver si realmente era así, aunque la mecánica cuántica, en la que se había creído durante tantos años, daba una respuesta inequívoca. Es interesante que algo como esto haya estado

* Si el campo $\boldsymbol{B}$ sale del plano de la figura, el flujo como lo hemos definido es positivo y como q es negativo en electrones, x_0 es positivo.

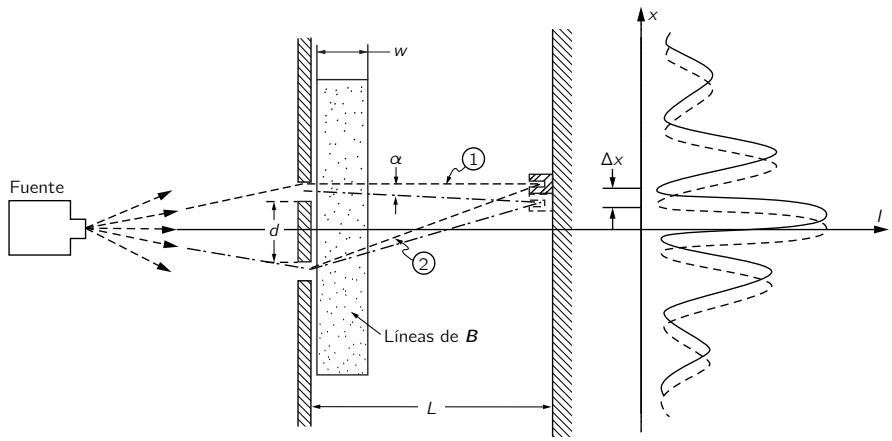


Figura 15-8. El desplazamiento del diagrama de interferencia debido a una banda de campo magnético.

rondando por 30 años, pero que continuara siendo ignorado debido a ciertos prejuicios acerca de lo que es significativo y de lo que no lo es.

Deseamos ahora continuar un poco más en nuestro análisis. Mostraremos la conexión entre la fórmula cuántica y la clásica —para mostrar por qué, si miramos las cosas en una escala suficientemente grande, todo sucede como si las partículas estuviesen afectadas por una fuerza igual a $q\boldsymbol{v}\times$ el rotacional de $\boldsymbol{A}$—. Para pasar de la mecánica cuántica a la clásica, necesitamos considerar casos en los cuales todas las longitudes de onda sean muy pequeñas comparadas con las distancias sobre las cuales las condiciones exteriores, digamos los campos, varían en forma apreciable. No demostraremos el resultado en forma muy general, sino sólo en un ejemplo simple, para mostrar cómo se trabaja. Consideraremos el experimento de las rendijas. Pero en vez de colocar todo el campo magnético en una región muy pequeña entre rendijas, imaginemos un campo magnético que se extiende sobre una región mayor detrás de las rendijas, como se muestra en la figura 15-8. Tomaremos el caso ideal en el que tenemos un campo magnético que es uniforme en una estrecha banda de ancho w, considerada pequeña en comparación con L (se puede realizar fácilmente; la pantalla se puede colocar tan lejos como queramos). A fin de calcular el corrimiento de fase debemos tomar los dos integrales de $\boldsymbol{A}$ a lo largo de las dos trayectorias (1) y (2). Difieren, como hemos visto, simplemente en el flujo de $\boldsymbol{B}$ entre las dos trayectorias. En nuestra aproximación, el flujo es Bwd. La diferencia de fase entre las dos trayectorias es entonces la siguiente:

$$\delta = \delta(B=0) + \frac{q}{\hbar}\,Bwd. \tag{15.37}$$

Notemos que, en nuestra aproximación, el corrimiento de fase es independiente del ángulo. Así, el efecto será nuevamente correr todo el diagrama hacia arriba en una cantidad Δx. Usando la ecuación (15.35)

$$\Delta x = -\frac{L\lambda\!\!\!^{-}}{d}\,\Delta\delta = -\frac{L\lambda\!\!\!^{-}}{d}\,[\delta - \delta(B=0)].$$

Usando (15.37) para $\delta - \delta(B=0)$,

$$\Delta x = -L\lambda\!\!\!^{-}\,\frac{q}{\hbar}\,Bw. \tag{15.38}$$

Este corrimiento es equivalente a una desviación de todas las trayectorias en un pequeño ángulo α (véase la figura 15-8), donde

$$\alpha = \frac{\Delta x}{L} = -\frac{\lambda\!\!\!^{-}}{\hbar}\,qBw. \tag{15.39}$$

Desde el punto de vista clásico sería también de esperar que una delgada banda de campo magnético desviara todas las trayectorias en un pequeño ángulo, digamos α', como se muestra en le figura 15-9(a). Cuando los electrones penetran en el campo magnético, sufren una fuerza transversal $q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ que actúa durante el tiempo w/v. El cambio de momentum transversal es justamente igual al impulso, así que

$$\Delta p_x = -qwB. \tag{15.40}$$

La desviación angular [figura 15-9(b)] es igual al cociente entre este momentum transversal y el momentum total p. Obtenemos

$$\alpha' = \frac{\Delta p_x}{p} = -\frac{qwB}{p}. \tag{15.41}$$

Podemos comparar este resultado con la ecuación (15.39) que nos da la misma cantidad calculada de manera cuántica. Pero la conexión entre la mecánica clásica y la mecánica cuántica es ésta: una partícula de momentum p corresponde a una amplitud cuántica que varía con la longitud de onda $\lambda\!\!\!^{-} = \hbar/p$. Teniendo en cuenta esta igualdad, α y α' son idénticos; el cálculo clásico y el cuántico dan el mismo resultado.

A partir de este análisis vemos por qué el potencial vectorial que aparece en mecánica cuántica en una forma explícita produce una fuerza clásica, que depende solamente de sus derivadas. En mecánica cuántica es la interferencia entre dos caminos vecinos lo que importa; se encuentra siempre que los efectos dependen solamente de cómo *varía* el campo $\boldsymbol{A}$ de un punto a otro y, por lo tanto, solamente de las derivadas de $\boldsymbol{A}$ y no de su valor. No obstante, el potencial vectorial $\boldsymbol{A}$ (junto con el potencial escalar ϕ que lo acompaña) parece dar una descripción más directa de la física. Esto se vuelve más y más aparente a medida que profundizamos en la teoría cuántica. En la teoría general de la electrodinámica cuántica se toman los potenciales vectoriales y escalares como cantidades fundamentales en el sistema de ecuaciones que remplazan a las ecuaciones de Maxwell: $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ desaparecen lentamente de las expresiones modernas de las leyes físicas; están siendo remplazados por $\boldsymbol{A}$ y ϕ.

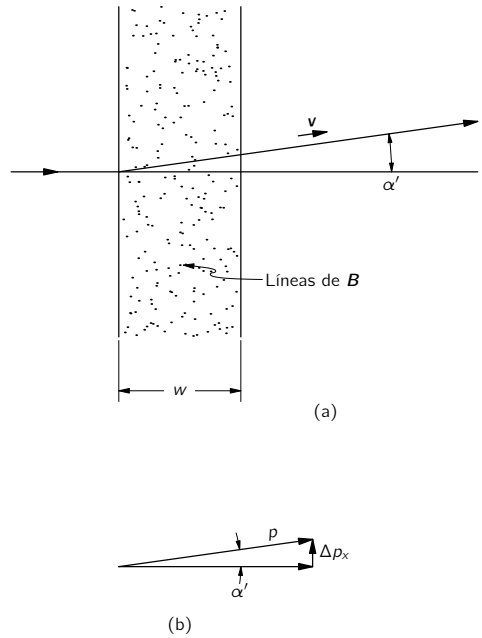


Figura 15-9. Desviación de una partícula al atravesar una pequeña banda de campo magnético.

15-6 Lo que es verdadero para la estática y falso para la dinámica

Nos encontramos ahora en el final de nuestra exploración del tema de los campos estáticos. En este capítulo estuvimos cerca de cometer un error respecto a lo que sucede cuando los campos varían con el tiempo. Apenas pudimos evitarlo en nuestro tratamiento de la energía magnética al buscar refugio en argumentos relativistas. Aún así, nuestro tratamiento del problema de la energía era un poco artificial y quizá misterioso, porque ignorábamos el hecho de que bobinas en movimiento deben, en efecto, producir campos magnéticos variables. Ya es momento de realizar el estudio de los campos que varían con el tiempo —objeto de la electrodinámica—. Lo haremos en el próximo capítulo. Primero, sin embargo, deseamos destacar ciertos puntos.

Aunque comenzamos este curso con una presentación de las ecuaciones completas y correctas del electromagnetismo, inmediatamente comenzamos a estudiar ciertas partes incompletas —porque era más fácil—. Hay una gran ventaja en partir de la teoría más simple de los campos estáticos, para llegar sólo más adelante a la teoría más complicada que incluye los campos dinámicos. De este modo hay menos material que aprender de una vez y se tiene más tiempo para desarrollar la musculatura intelectual en preparación para mayores tareas.

Pero hay un peligro en este proceso, o sea, antes de que podamos obtener la historia completa, la verdad incompleta obtenida sobre la marcha se pueda fijar demasiado y considerar como la verdad total —y que se comience, así, a confundir lo que es verdadero y lo que es verdadero sólo a veces—. Por esta razón damos en la tabla 15-1 un resumen de las fórmulas importantes que vamos a reencontrar, separando las que son válidas en general, de las que son válidas sólo para la estática pero falsas para la dinámica. Este resumen muestra, también,

Tabla 15-1

Falso en general (verdadero sólo para estática)	**Verdadero siempre**
$F = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}$ (Ley de Coulomb)	$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ (Fuerza de Lorentz) $\rightarrow\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$ (Ley de Gauss)
$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = 0$ $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$ $\boldsymbol{E}(1) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \dfrac{\rho(2)\boldsymbol{e}_{12}}{r_{12}^2}\,dV_2$ Para conductores, $\boldsymbol{E} = 0$, $\phi =$ constante. $Q = CV$	$\rightarrow\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ (Ley de Faraday) $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \dfrac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$ En un conductor, $\boldsymbol{E}$ produce corrientes.
$c^2\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \dfrac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0}$ (Ley de Ampère) $\boldsymbol{B}(1) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\displaystyle\int \dfrac{\boldsymbol{j}(2)\times\boldsymbol{e}_{12}}{r_{12}^2}\,dV_2$	$\rightarrow\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ (Sin cargas magnéticas) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ $\rightarrow\ c^2\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \dfrac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} + \dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$
$\nabla^2\phi = -\dfrac{\rho}{\epsilon_0}$ (Ecuación de Poisson) $\left[\begin{array}{l}\nabla^2\boldsymbol{A} = -\dfrac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0 c^2}\\ \text{junto con}\\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = 0\end{array}\right.$	$\left[\begin{array}{l}\nabla^2\phi - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\dfrac{\rho}{\epsilon_0}\\ \text{y}\\ \nabla^2\boldsymbol{A} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\dfrac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0 c^2}\\ \text{junto con}\\ c^2\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} + \dfrac{\partial\phi}{\partial t} = 0\end{array}\right.$
$\phi(1) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\dfrac{\rho(2)}{r_{12}}\,dV_2$ $\boldsymbol{A}(1) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\displaystyle\int\dfrac{\boldsymbol{j}(2)}{r_{12}}\,dV_2$	$\left[\begin{array}{l}\phi(1,t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int\dfrac{\rho(2,t')}{r_{12}}\,dV_2\\ \text{y}\\ \boldsymbol{A}(1,t) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\displaystyle\int\dfrac{\boldsymbol{j}(2,t')}{r_{12}}\,dV_2\\ \text{junto con}\\ t' = t - \dfrac{r_{12}}{c}\end{array}\right.$
$U = \frac{1}{2}\displaystyle\int\rho\phi\,dV + \frac{1}{2}\int\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}\,dV$	$U = \displaystyle\int\left(\frac{\epsilon_0}{2}\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{\epsilon_0 c^2}{2}\,\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}\right)dV$

Las ecuaciones marcadas con ($\rightarrow$) son las ecuaciones de Maxwell.

hacia dónde vamos, puesto que al tratar la dinámica desarrollaremos en detalle lo que aquí solamente podemos enunciar sin demostración.

Puede ser útil hacer algunos comentarios sobre la tabla. Primero observarán que nuestras ecuaciones de partida son las ecuaciones *verdaderas* —en eso no los hemos engañado—. La fuerza electromagnética (frecuentemente llamada *fuerza de Lorentz*) $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$ es *verdadera*. Sólo la ley de Coulomb es falsa y se debe usar solamente para la estática. Las cuatro ecuaciones de Maxwell para $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ también son verdaderas. Las ecuaciones que tomamos para la estática son falsas, por supuesto, porque dejamos fuera todos los términos con las derivadas respecto al tiempo.

Le ley de Gauss, $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$, se mantiene, sin embargo el rotacional de $\boldsymbol{E}$ *no* es nulo en general. Así que $\boldsymbol{E}$ no se puede igualar siempre al gradiente de un escalar —el potencial electrostático—. Veremos que existe siempre un potencial escalar, sin embargo es una cantidad variable con el tiempo que se tiene que utilizar junto con potenciales vectoriales para una descripción completa del campo eléctrico. Además, las ecuaciones que gobiernan este nuevo potencial escalar son necesariamente nuevas también.

Debemos abandonar ahora la idea de que $\boldsymbol{E}$ es nulo en los conductores. Cuando los campos son variables, las cargas en los conductores no tienen en general tiempo de reordenarse para anular el campo. Son puestas en movimiento pero nunca alcanzan el equilibrio. El único enunciado general es el siguiente: los campos eléctricos en los conductores producen corrientes. Así pues, en campos variables un conductor *no* es una equipotencial. También se deduce que el concepto de capacitancia ya no tiene un sentido preciso.

Como no hay cargas magnéticas, la divergencia de $\boldsymbol{B}$ es *siempre* nula. Luego, $\boldsymbol{B}$ se puede igualar siempre a $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$. (¡No todo cambia!) Sin embargo, la generación de $\boldsymbol{B}$ no es únicamente a partir de corrientes; $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}$ es proporcional a la densidad de corriente *más* un nuevo término $\partial \boldsymbol{E}/\partial t$. Así, éste tiene el significado de que $\boldsymbol{A}$ se relaciona con las corrientes por medio de una nueva ecuación. También está relacionado con ϕ. Si hacemos uso de nuestra libertad de tomar $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}$ de acuerdo a nuestra conveniencia, las ecuaciones para $\boldsymbol{A}$ o ϕ pueden ser ordenadas de manera que se obtiene una forma simple y elegante. Imponemos, por lo tanto, la condición de que $c^2 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = -\partial\phi/\partial t$ y las ecuaciones diferenciales para $\boldsymbol{A}$ o ϕ aparecen como se muestra en la tabla.

Los potenciales $\boldsymbol{A}$ y ϕ siempre se pueden calcular por integración sobre las corrientes y las cargas, pero no por las *mismas* integrales de la estática. Lo más extraordinario es que las integrales verdaderas se transforman en las de la estática con solamente una pequeña modificación, atrayente desde el punto de vista físico. Cuando efectuamos las integrales para hallar los potenciales en algún punto, digamos en el punto (1) de la figura 15-10, tenemos que utilizar los valores de $\boldsymbol{j}$ y de ρ en (2) *con un instante anterior* $t' = t - r_{12}/c$. Como era de esperar, los efectos se propagan desde el punto (2) al (1) con la velocidad c. Además, con este pequeño cambio se pueden resolver los problemas de los campos creados por corrientes y cargas variables, porque una vez que conocemos $\boldsymbol{A}$ y ϕ obtenemos $\boldsymbol{B}$ de $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$, como antes, y $\boldsymbol{E}$ de $-\boldsymbol{\nabla}\phi - \partial \boldsymbol{A}/t$.

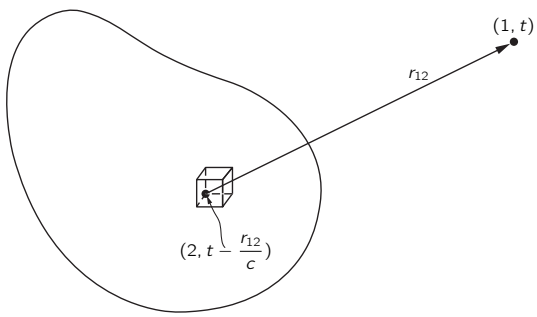


Figura 15-10. Los potenciales en el punto (1) y en el tiempo t están dados por la suma de las contribuciones de cada elemento de la fuente en el punto errante (2), considerando las corrientes y cargas que están presentes en el instante anterior $t - r_{12}/c$.

Finalmente, observarán que algunos resultados —por ejemplo, que la densidad de energía en un campo eléctrico es $\epsilon_0 E^2/2$— son válidos tanto para la electrodinámica como para la estática. No piensen equivocadamente que esto es del todo "natural". La validez de cualquier fórmula obtenida para el caso estático se debe redemostrar para el caso dinámico. Un ejemplo contrario es la expresión para la energía electrostática en términos de una integral de volumen de $\rho\phi$. Este resultado es válido *solamente* para la estática.

Consideraremos todos estos temas detalladamente a su debido tiempo, pero quizá sea útil tener presente este resumen, a fin de que conozcan lo que pueden olvidar y lo que deben recordar como válido siempre.

16

Corrientes inducidas

16-1 Motores y generadores

16-2 Transformadores e inductancias

16-3 Las fuerzas sobre corrientes inducidas

16-4 La tecnología eléctrica

16-1 Motores y generadores

El descubrimiento hecho en 1820 de que había una relación estrecha entre electricidad y magnetismo fue muy emocionante —hasta entonces se había considerado que ambos temas eran completamente independientes—. El primer descubrimiento fue que corrientes por alambres producen campos magnéticos; luego, en el mismo año, se supo que alambres por los que circula corriente en un campo magnético experimentan fuerzas.

Un aspecto interesante es que siempre que haya una fuerza mecánica, existe la posibilidad de usarla en una máquina para realizar algún trabajo. Casi inmediatamente después de su descubrimiento, la gente empezó a diseñar motores eléctricos usando las fuerzas sobre alambres con corriente. La figura 16-1 muestra a grandes rasgos el principio de funcionamiento del motor electromagnético. Un imán permanente —por lo común con algunos pedazos de hierro suave— se usa para producir un campo magnético en dos hendeduras. En cada hendedura hay un polo norte y un polo sur, como se muestra. Se coloca una bobina rectangular de cobre con un lado en cada hendedura. Cuando pasa una corriente por la bobina, circulan en direcciones opuestas, produciendo un torque sobre la bobina respecto al eje mostrado. Si se monta la bobina sobre un eje de modo que pueda girar, se la puede acoplar a poleas o engranajes y puede realizar un trabajo.

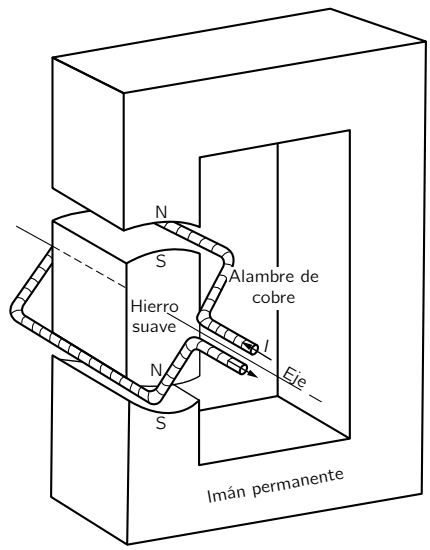


Figura 16-1. Esbozo esquemático de un motor electromagnético simple.

Se puede utilizar la misma idea para hacer un instrumento sensible para medidas eléctricas. Por eso, en el momento en que se descubrió la ley de fuerza, aumentó grandemente la precisión de las medidas eléctricas. Primeramente, se puede hacer el torque de ese motor mucho mayor para una corriente determinada haciendo que la corriente pase por varias vueltas en vez de una sola. Luego se puede montar la bobina de modo que gire con un torque muy pequeño —ya sea montando el eje sobre cojinetes de rubí, o colgando a la bobina un alambre muy fino o de una fibra de cuarzo—. Entonces una corriente pequeñísima hará girar la bobina y para ángulos pequeños lo que rote será proporcional a la corriente. Se puede medir la rotación pegando un indicador a la bobina o, para los instrumentos más delicados, fijando un espejo pequeño a la bobina y observando el corrimiento de la imagen de una escala. Estos instrumentos se llaman galvanómetros. Los voltímetros y los amperímetros se basan en el mismo principio.

Se pueden aplicar las mismas ideas en gran escala para hacer grandes motores para suministrar potencia mecánica. Se puede hacer que la bobina dé vueltas y más vueltas de modo que las conexiones a la bobina se inviertan cada media vuelta por medio de contactos sobre el eje. Entonces el torque está siempre en la misma dirección. Los pequeños motores CC están hechos de esta manera. Los motores mayores, CC o CA, están hechos a menudo remplazando el imán permanente por un electroimán excitado con la fuente de potencia.

Al darse cuenta de que las corrientes eléctricas producen campos magnéticos, la gente sugirió inmediatamente que de alguna manera pudiera ser que los imanes hicieran también campos eléctricos. Se intentaron varios experimentos. Por ejemplo, se pusieron dos alambres paralelos y se hizo pasar una corriente por uno de ellos con la esperanza de encontrar una corriente en el otro. Se pensaba que el campo magnético pudiera de alguna manera arrastrar los electrones a lo largo del segundo alambre, dando una ley como "los semejantes prefieren moverse en forma semejante". Con la mayor corriente disponible y el galvanómetro más sensible para detectar cualquier corriente, el resultado fue negativo. Después de los alambres, los grandes imanes tampoco produjeron efectos observables. Al

final, Faraday descubrió en 1840 el punto fundamental que se les había escapado —existen efectos eléctricos únicamente cuando algo está *variando*—. Si uno de los alambres de un par tiene una corriente *variable*, se induce una corriente en el otro, o si se *mueve* un imán cerca de un circuito eléctrico, hay una corriente. Decimos que las corrientes son *inducidas*. Éste fue el efecto de inducción descubierto por Faraday. Transformó el tema bastante aburrido de campos estáticos en un tema muy incitante y dinámico con una gran gama de fenómenos maravillosos. Este capítulo está dedicado a una descripción cualitativa de algunos de ellos. Como veremos, uno puede entrar inmediatamente en situaciones bastante complicadas que son difíciles de analizar cuantitativamente en todos sus detalles. Pero no importa, en este capítulo nuestro objetivo principal es familiarizarlos con los fenómenos que intervienen. Más adelante veremos el análisis detallado.

Podemos comprender fácilmente una característica de la inducción magnética a partir de lo que ya conocemos, aunque no se conocía en la época de Faraday. Proviene de la fuerza $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ sobre una carga en movimiento, la cual es proporcional a su velocidad en un campo magnético. Supongan que tenemos un alambre que pasa cerca de un imán, como muestra la figura 16-2, y que conectamos los extremos del alambre a un galvanómetro. Si movemos el alambre transversalmente frente al extremo del imán, el indicador del galvanómetro se mueve.

El imán produce cierto campo magnético vertical y cuando empujamos el alambre transversalmente al campo, los electrones del alambre experimentan una fuerza *lateral* —perpendicular al campo y al movimiento—. De esta manera, la fuerza empuja los electrones a lo largo del alambre. Pero ¿por qué esto mueve el galvanómetro, que está tan lejos de la fuerza? Porque cuando experimentan la fuerza magnética los electrones tratan de moverse, es decir, empujan —por repulsión eléctrica— los electrones que están un poco más allá en el alambre; a su vez, ellos repelen los electrones que están un poco más lejos y así sucesivamente por una gran distancia. Una cosa asombrosa.

Les resultó tan asombrosa a Gauss y a Weber —que fueron los primeros en construir un galvanómetro— que trataron de ver hasta dónde irían las fuerzas en el alambre. Tendieron un alambre a través de toda su ciudad. En un extremo, Gauss conectó los alambres a una batería (se conocieron las baterías antes que los generadores) y Weber observó que el galvanómetro se movía. Así que, ellos tenían una manera de transmitir señales a grandes distancias —¡fue el comienzo del telégrafo!—. Por supuesto, esto no tiene nada que ver directamente con la inducción —tiene que ver con la manera en que los alambres transportan corrientes, independientemente de que las corrientes sean empujadas por inducción o no—.

Supongan ahora que en el ordenamiento de la figura 16-2 dejamos quieto el alambre y movemos el imán. Todavía vemos un efecto sobre el galvanómetro. Tal como lo descubrió Faraday, mover el imán debajo del alambre —en cierto sentido— tiene el mismo efecto que mover el alambre sobre el imán. Sin embargo, cuando se mueve el imán, ya no tenemos ninguna fuerza $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ sobre los electrones en el alambre. Éste es un efecto nuevo que Faraday descubrió. Actualmente podríamos tener la esperanza de comprenderlo mediante un razonamiento relativista.

Ya hemos comprendido que el campo magnético de un imán proviene de sus corrientes internas. Así pues, es de esperar que se observe el mismo efecto si en vez del imán de la figura 16-2 usamos una bobina de alambre en la cual hay corriente. Si movemos el alambre frente a la bobina habrá una corriente por el galvanómetro o, también, si movemos la bobina frente al alambre. Pero ahora hay algo más incitante: siempre que variamos el campo magnético de la bobina *no* moviéndola sino *variando su corriente*, de nuevo hay un efecto en el galvanómetro. Por ejemplo, si tenemos un lazo de alambre cerca de una bobina, como muestra la figura 16-3, y si las dejamos quietas a ambas pero interrumpimos la corriente, hay un pulso de corriente por el galvanómetro. Cuando enchufamos de nuevo la bobina, el galvanómetro salta en el otro sentido.

Siempre que en una situación como la que muestra la figura 16-2 o la figura 16-3, el galvanómetro tiene corriente, hay un tirón resultante sobre los electrones del alambre en una dirección a lo largo del mismo. Puede haber tirones en

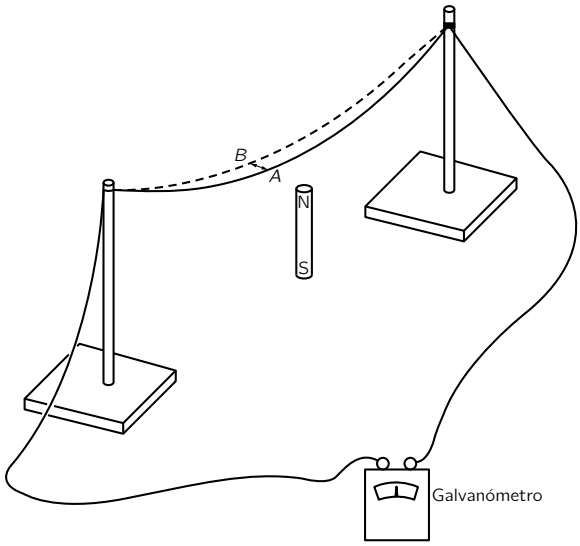


Figura 16-2. Moviendo un alambre a través de un campo magnético se produce una corriente, como muestra el galvanómetro.

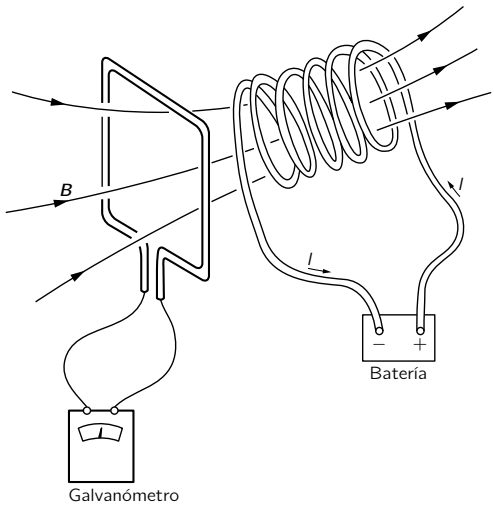


Figura 16-3. Una bobina con corriente produce corriente en una segunda bobina si la primera se mueve o si su corriente varía.

diferentes direcciones en distintos lugares, pero el tirón es mayor en una dirección que en otra. Lo que importa es el tirón integrado a lo largo del circuito completo. Llamamos *fuerza electromotriz* (abreviada fem) a este impulso resultante integrado sobre el circuito. Más precisamente, se define la fem como la fuerza tangencial por unidad de carga en el alambre integrada sobre la longitud una vez alrededor del circuito completo. El descubrimiento completo de Faraday fue que se pueden generar fems en un alambre de tres maneras diferentes: moviendo el alambre, moviendo un imán cerca del alambre o variando la corriente en un alambre cercano.

Consideremos de nuevo la máquina simple de la figura 16-1, solamente que ahora, en vez de hacer pasar una corriente por el alambre para hacerlo rotar, giramos el lazo por medio de una fuerza externa, por ejemplo, a mano o con una rueda hidráulica. Cuando la bobina rota, sus alambres se están moviendo en el campo magnético y hallamos una fem en el circuito de la bobina. El motor se transforma en un generador.

La bobina del generador tiene una fem inducida proveniente de su movimiento. La magnitud de la fem está dada por una ley simple descubierta por Faraday (ahora simplemente enunciaremos la ley y esperaremos hasta más tarde para examinarla en detalle). La ley afirma lo siguiente: cuando el flujo magnético que atraviesa el lazo (este flujo es la componente normal de $\boldsymbol{B}$ integrada sobre toda el área del lazo) varía en el tiempo, la fem es igual a la derivada del flujo respecto al tiempo. Nos referiremos a esto como "la ley del flujo". Ven que cuando se rota la bobina de la figura 16-1, el flujo a través de ella varía. Al empezar, cierto flujo va en un sentido; luego, cuando la bobina ha rotado 180°, el mismo flujo va en el otro sentido. Si rotamos continuamente la bobina el flujo es primero positivo, luego negativo, luego positivo y así sucesivamente. La derivada temporal del flujo también tiene que alternar. Así pues, hay una fem alterna en la bobina. Si conectamos los dos extremos de la bobina a alambres externos a través de contactos deslizantes —llamados anillos corredizos— (simplemente para que los alambres no se retuerzan) tenemos un generador de corriente alterna.

O también podemos ordenar por medio de unos contactos corredizos, que después de cada media vuelta la conexión entre los extremos de la bobina y los alambres externos se invierta, de modo que la fem se invierta como también las conexiones. Entonces los pulsos de fem siempre empujarán corrientes en la

misma dirección por el circuito externo. Tenemos lo que se llama un generador de corriente directa.

La máquina de la figura 16-1 es o un motor o un generador. La reciprocidad entre motores y generadores se demuestra muy bien usando dos "motores" idénticos de CC, del tipo imán permanente, con sus bobinas conectadas por medio de dos alambres de cobre. Cuando se rota mecánicamente el eje de uno, se transforma en un generador y hace andar el otro como motor. Si se rota el eje del segundo, se convierte en el generador y hace andar el primero como motor. Así pues, hay aquí un ejemplo interesante de un nuevo tipo de equivalencia de naturaleza: motor y generador son equivalentes. En realidad, la equivalencia cuantitativa no es completamente accidental. De modo que está relacionada con la ley de conservación de la energía.

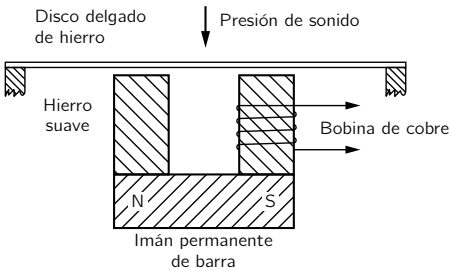


Figura 16-4. Un transmisor o receptor telefónico.

Otro ejemplo de un dispositivo que puede funcionar tanto para generar fems como para responder a fems es el receptor de un teléfono ordinario —esto es, un "auricular"—. El teléfono originario de Bell consistía en dos de esos "auriculares" conectados por dos alambres largos. La figura 16-4 muestra el principio básico. Un imán permanente produce un campo magnético en dos "yugos" de hierro suave y en un diafragma delgado movido por la presión del aire. Cuando el diafragma se mueve, varía la cantidad de campo magnético en los yugos. Por lo tanto, el flujo a través de una bobina de alambre enrollada alrededor de uno de los yugos variará cuando una onda de presión llegue al diafragma. Hay entonces una fem en la bobina. Si se conectan los extremos de la bobina a un circuito, se establece una corriente que es una representación eléctrica del sonido.

Si se conectan los extremos de la bobina de la figura 16-4 por medio de dos alambres a otro artefacto idéntico, circularán corrientes variables en la segunda bobina. Estas corrientes producirán un campo magnético variable y producirán una variable sobre el diafragma de hierro. Así, el diafragma vibrará y producirá ondas sonoras aproximadamente similares a las que movieron el diafragma original. ¡Se transmite la voz humana por alambres con unos pocos pedazos de hierro y de cobre!

(El teléfono moderno de casa utiliza un receptor como el que describimos, pero usa una invención mejorada para obtener un transmisor más poderoso. Es el "micrófono de carbón", que usa la presión del sonido para variar la corriente eléctrica de una batería.)

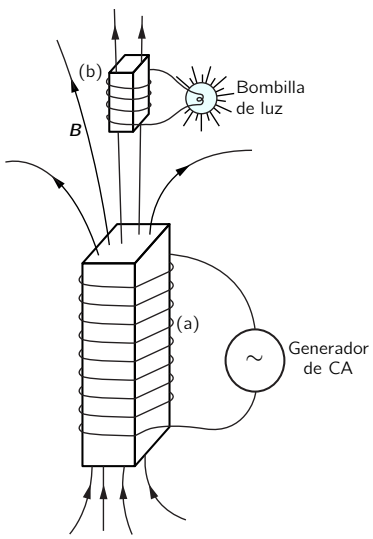


Figura 16-5. Dos bobinas envueltas alrededor de manojos de hojas de hierro permiten que un generador encienda una bombilla sin conexión directa.

16-2 Transformadores e inductancias

Uno de los rasgos más interesantes de los descubrimientos de Faraday no es que exista una fem en una bobina móvil —lo cual podemos comprender en términos de fuerza magnética $q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$— sino que una corriente variable en una bobina produzca una fem en una segunda bobina. Y lo que es muy sorprendente, la cantidad de fem inducida en la segunda bobina está dada por la misma "ley del flujo": que la fem es igual a la derivada temporal del flujo magnético a través de la bobina. Supongan que tomamos dos bobinas, cada embobinado sobre manojos separados de hojas de hierro (esto ayuda a producir campos magnéticos más fuertes), como muestra la figura 16-5. Conectamos ahora una de las bobinas —bobina (a)— a un generador de corriente alterna. La corriente continuamente variable produce un campo magnético inagotablemente cambiante. Este campo cambiable genera una fem alterna en la segunda bobina —bobina (b)—. Esta fem puede producir potencia suficiente para encender una bombilla eléctrica.

La fem alterna en la bobina (b) a una frecuencia que es, por supuesto, igual a la frecuencia del generador original. Pero la corriente de la bobina (b) puede ser mayor o menor que la corriente de la bobina (a). Además, la corriente de la bobina (b) depende de la fem inducida en ella y de la resistencia y la inductancia del resto de su circuito. La fem puede ser menor que la del generador si, por ejemplo, hay poca variación del flujo. O se puede hacer la fem de la bobina (b) mucho mayor que la del generador enrrollando la bobina (b) con muchas vueltas, ya que en un campo magnético determinado el flujo a través de la bobina es entonces mayor (o si prefieren considerarlo de otro modo, la fem es la misma en

cada vuelta y como la fem total es la suma de la fem de cada una de las vueltas, muchas vueltas en serie producen una gran fem).

Esta combinación de dos bobinas —generalmente con un arreglo de hojas de hierro para guiar los campos magnéticos— se llama *transformador*. Puede "transformar" una fem (también llamada "voltaje") en otra.

También hay efectos de inducción en una sola bobina. Por ejemplo, en la disposición de la figura 16-5 hay un flujo variable no sólo a través de la bobina (b), que enciende la bombilla, sino que también a través de la bobina (a). La corriente variable de la bobina (a) produce un campo magnético variable dentro de sí misma y el flujo de este campo está variando continuamente, así que hay una fem *autoinducida* en la bobina (a). Hay una fem actuando sobre cualquier corriente cuando está formando un campo magnético —o, en general, cuando su campo está variando de cualquier manera—. El efecto se llama *autoinductancia*.

Cuando dimos "la ley del flujo", que la fem es igual a la derivada temporal del flujo enlazado, no especificamos la dirección de la fem. Hay una ley simple, llamada ley de Lenz, para determinar en qué sentido va la fem: la fem *trata de oponerse* a cualquier variación de flujo. Es decir, el sentido de una fem inducida siempre es tal que si circulara una corriente en el sentido de la fem, se produciría un flujo de $\boldsymbol{B}$ que se opondría a la variación de $\boldsymbol{B}$ que produce la fem. Se puede emplear la ley de Lenz para hallar el sentido de la fem en el generador de la figura 16-1 o en el embobinado del transformador de la figura 16-3.

En particular, siempre que existe una corriente variable en una sola bobina (o en cualquier alambre) hay también una fem "en contra" en el circuito. Esta fem actúa sobre las cargas que circulan en la bobina (a) que se muestra en la figura 16-5, para oponerse a la variación de campo magnético y, por lo tanto, en el sentido que se opone a la transformación de corriente. Trata de mantener la corriente constante; es opuesta a la corriente cuando la corriente está aumentando y está en el sentido de la corriente cuando está disminuyendo. En una autoinductancia la corriente tiene "inercia" porque los efectos inductivos tratan de mantener el flujo constante, como la inercia mecánica trata de mantener constante la velocidad de un objeto.

Un electroimán grande tendrá una autoinductancia grande. Supongan que se conecte una batería a la bobina de un gran electroimán, como en la figura 16-6, y que se haya establecido un campo magnético intenso. (La corriente alcanza un valor estacionario determinado por el voltaje de la batería y la resistencia del alambre de la bobina.) Pero supongan ahora que tratemos de desconectar la batería abriendo el interruptor. Si abriéramos realmente el circuito, la corriente iría a cero rápidamente y esto generaría una fem enorme. En la mayoría de los casos esta fem sería lo suficientemente grande para formar un arco entre los contactos del interruptor que se están separando. El alto voltaje que aparece también podría dañar la aislación de la bobina —¡o a usted, si es la persona que abre el interruptor!—. Por esta razón los electroimanes están conectados habitualmente en un circuito como el que muestra la figura 16-6. Cuando se abre el interruptor, la corriente no varía rápidamente sino que permanece estacionaria, circulando en cambio por la lámpara, arrastrada por la fem proveniente de la autoinductancia de la bobina.

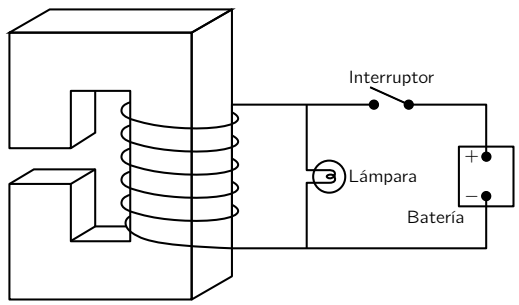


Figura 16-6. Conexiones del circuito para un electroimán. La lámpara permite el traslado de corriente cuando se abre el interruptor, impidiendo la aparición de fems excesivas.

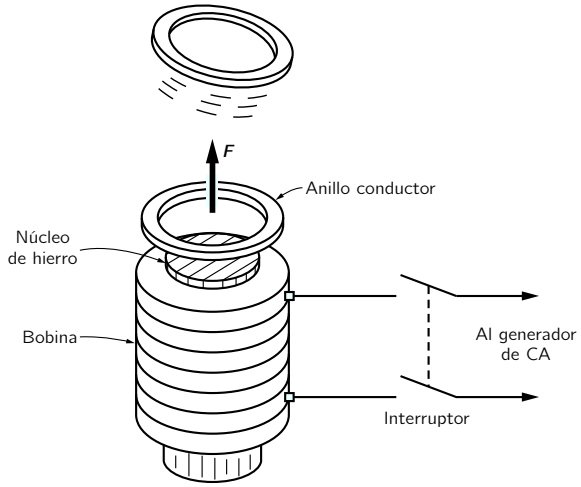


Figura 16-7. Un electroimán con una corriente variable repele fuertemente un anillo conductor.

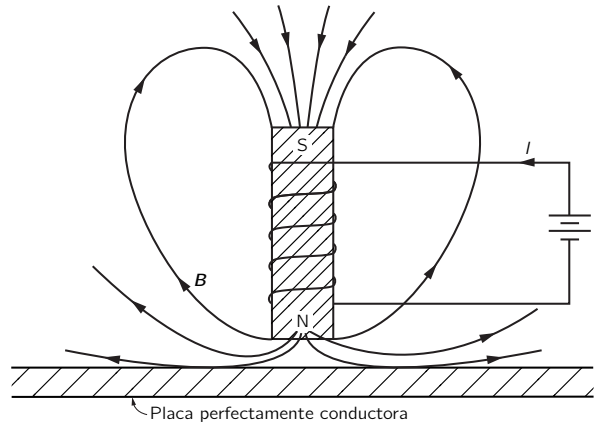


Figura 16-8. Un electroimán cerca de una placa perfectamente conductora.

16-3 Las fuerzas sobre corrientes inducidas

Probablemente hayan visto la demostración espectacular de la regla de Lenz hecha con el artefacto mostrado en la figura 16-7. Es un electroimán, como la bobina (a) de la figura 16-5. Se coloca un anillo de aluminio sobre el extremo del imán. Cuando se conecta la bobina a un generador de corriente alterna cerrando el interruptor, el anillo vuela por los aires. La fuerza proviene, por supuesto, de las corrientes inducidas en el anillo. El hecho de que el anillo se aleje demuestra que la corriente que circula por él se opone a la variación del campo que lo atraviesa. Cuando el imán está haciendo un polo norte en la parte superior, la corriente inducida en el anillo está haciendo un polo norte hacia abajo. El anillo y la bobina se repelen como dos imanes con polos iguales frente a frente. Si se hace un corte delgado radial en el anillo, la fuerza desaparece, lo cual demuestra que proviene verdaderamente de las corrientes en el anillo.

Si en vez del anillo colocamos un disco de aluminio o de cobre frente al extremo del electroimán de la figura 16-7, también es repelido; circulan corrientes inducidas en el material del disco y de nuevo hay repulsión.

Un efecto interesante de origen similar ocurre con una hoja de conductor perfecto. En un "conductor perfecto" no hay ninguna resistencia a la corriente. Así pues, si se generan corrientes en él, pueden mantenerse circulando permanentemente. En realidad, la fem *más débil* generaría una corriente arbitrariamente grande —lo cual significa realmente que no puede haber ninguna fem—. Cualquier intento de hacer que un flujo magnético atraviese esa hoja genera corrientes que crean campos $\boldsymbol{B}$ contrarios —todo con fems infinitesimales y así sin que entre ningún flujo—.

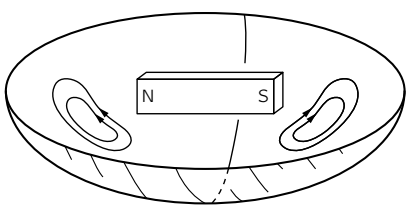


Figura 16-9. Una barra magnética suspendida encima de un bol superconductor por la repulsión de corrientes de Foucault.

Si tenemos una hoja de conductor perfecto y le ponemos un electroimán cerca, cuando le damos corriente al imán, aparecen corrientes en la hoja llamadas corrientes de Foucault, así que no entra ningún flujo magnético. Las líneas de campo tendrían el aspecto que muestra la figura 16-8. Ocurre lo mismo, por supuesto, si acercamos un imán de barra a un conductor perfecto. Como las corrientes de Foucault están creando campos que se oponen, el conductor repele los imanes. Esto posibilita suspender un imán de barra en el aire encima de una hoja de conductor perfecto en forma de plato, como lo muestra la figura 16-9. El imán queda suspendido por la repulsión de las corrientes de Foucault inducidas en el conductor perfecto. No hay conductores perfectos a temperaturas comunes, pero algunos materiales se vuelven conductores perfectos a temperaturas suficientemente bajas. Por ejemplo, el estaño conduce perfectamente por debajo de 3.8 K. Se le llama superconductor.

Si el conductor de la figura 16-8 no es completamente perfecto habrá cierta resistencia al flujo de las corrientes de Foucault. Las corrientes tenderán a extinguirse y el imán bajará lentamente. Las corrientes de Foucault en un conductor imperfecto necesitan una fem para que las mantenga y para tener una fem el flujo tiene que estar variando. El flujo del campo magnético penetra gradualmente en el conductor.

En un conductor normal, no sólo hay fuerzas repulsivas provenientes de las corrientes de Foucault, sino que también puede haber fuerzas laterales. Por ejemplo, si movemos un imán lateralmente a lo largo de una superficie conductora, las corrientes de Foucault producen una fuerza de retardo, porque las corrientes inducidas se oponen a la variación de la ubicación del flujo. Esas fuerzas son proporcionales a la velocidad y son una especie de fuerza de viscosidad.

El aparato de la figura 16-10 es una buena manera de demostrar estos efectos. Se suspende una placa cuadrada de cobre del extremo de una varilla para hacer un péndulo. El cobre se balancea entre los polos de un electroimán. Cuando se enciende el imán, el movimiento del péndulo se para repentinamente. Por esto, cuando la placa metálica llega al entrehierro del imán, hay una corriente inducida en la placa que actúa de modo que se opone a la variación de flujo a través de la placa. Si la placa fuera un conductor perfecto, las corrientes serian tan grandes que la expulsarían de nuevo —rebotaría de vuelta—. Con una placa de cobre hay cierta resistencia en la placa, así que al principio las corrientes detienen casi totalmente a la placa cuando comienza a entrar en el campo. Luego entonces, a medida que las corrientes se extinguen, la placa llega lentamente al reposo en el campo magnético.

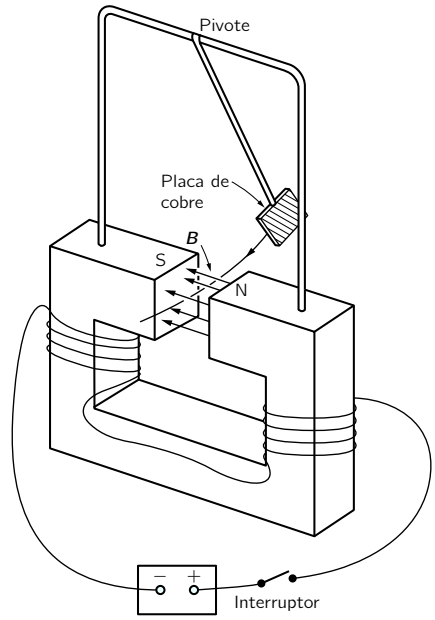


Figura 16-10. El frenado del péndulo demuestra las fuerzas debidas a corrientes de Foucault.

La figura 16-11 muestra la naturaleza de las corrientes de Foucault en el péndulo de cobre. La intensidad y la geometría de las corrientes son muy sensibles a la forma de la placa. Por ejemplo, siempre que se remplaza la placa de cobre por otra que tenga varias ranuras, como lo muestra la figura 16-12, los efectos de corrientes de Foucault se reducen drásticamente. El péndulo se balancea a través del campo magnético con una pequeña fuerza de retardo solamente. La razón es que en cada sección del cobre, las corrientes tienen menos flujo que las haga circular, así que los efectos de la resistencia de cada lazo son mayores. Las corrientes son más pequeñas y la fuerza en contra es menor. El carácter viscoso de la fuerza se ve aún más claramente si se coloca una hoja de cobre entre los polos del imán de la figura 16-10 y se le suelta. No cae; se hunde lentamente. Así pues, las corrientes de Foucault ejercen una fuerte resistencia al movimiento —como la fuerza de viscosidad en la miel—.

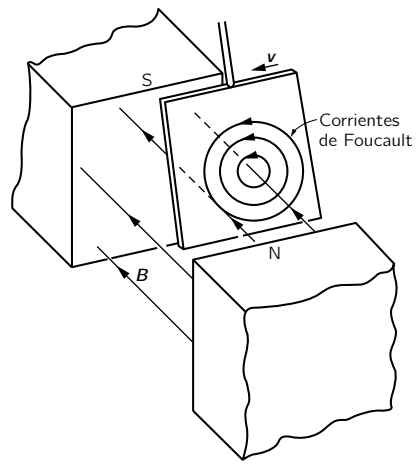


Figura 16-11. Las corrientes de Foucault en el péndulo de cobre.

Si en vez de arrastrar un conductor frente a un imán, tratamos de rotarlo en un campo magnético, habrá un torque que resiste debido a los mismos efectos. Alternativamente, si rotamos un imán —un extremo encima del otro— cerca de un anillo o una placa conductora, el anillo es obligado a rotar; las corrientes del anillo crearán un torque que tiende a rotar el anillo con el imán.

Se puede hacer un campo como el de un imán rotante disponiendo bobinas como se muestra en la figura 16-13. Tomamos un toro de hierro (es decir, un anillo de hierro parecido a una dona) y enrollamos seis bobinas sobre él. Si damos corriente como lo muestra la parte (a), a los embobinados (1) y (4), habrá un campo magnético en la dirección mostrada en la figura. Si ahora cambiamos la corriente a los embobinados (2) y (5), el campo magnético estará en una nueva dirección, como muestra la parte (b) de la figura. Continuando el proceso, obtenemos la sucesión de campos mostrada en el resto de la figura. Si se hace el proceso suavemente, tenemos un campo magnético "rotante". Podemos obtener fácilmente la sucesión necesaria de corrientes conectando las bobinas a una línea trifásica, la cual da precisamente esa sucesión de corrientes. La "potencia trifásica" se crea en un generador usando el principio de la figura 16-1, salvo que hay *tres* lazos unidos en el mismo eje de manera simétrica —es decir, cada lazo tiene una separación de 120° del siguiente—. Cuando las bobinas son rotadas en conjunto, la fem es un máximo en uno, después en el siguiente, y así sucesivamente en una secuencia regular. La potencia trifásica tiene muchas ventajas prácticas. Una de ellas es la posibilidad de hacer un campo magnético rotante. El torque que

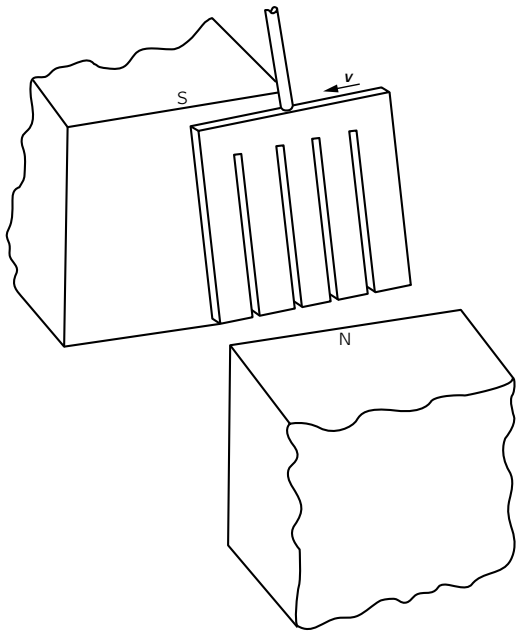


Figura 16-12. Los efectos de corrientes de Foucault se reducen drásticamente haciendo ranuras en la placa.

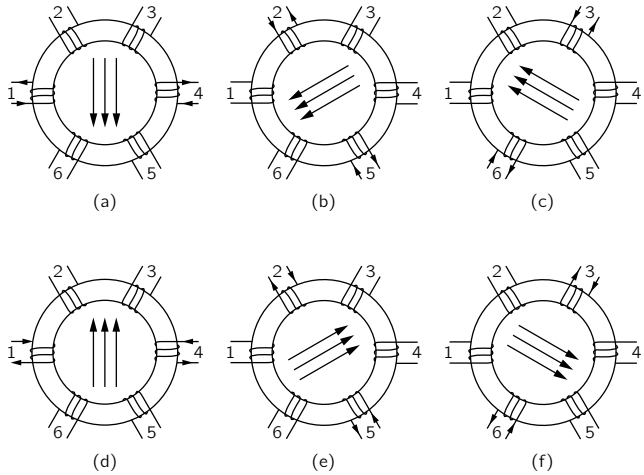


Figura 16-13. Cómo hacer un campo magnético rotante.

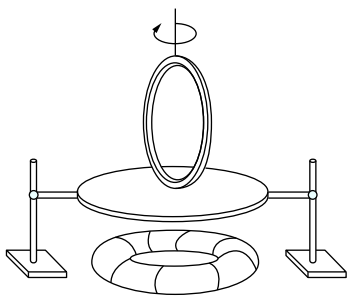


Figura 16-14. El campo rotante de la figura 16-13 se puede emplear para producir un torque en un anillo conductor.

ese campo rotante produce sobre un conductor se puede demostrar fácilmente parando un anillo metálico sobre una mesa aisladora justo encima del toro, como lo muestra la figura 16-14. El campo hace que el anillo gire alrededor de un eje vertical. Los elementos básicos vistos aquí son muy parecidos a los puestos en juego en un gran motor comercial trifásico de inducción.

La figura 16-15 muestra otra forma de motor de inducción. La disposición mostrada no es apropiada para un motor práctico de alta eficiencia, pero ilustrará el principio de funcionamiento. El electroimán M, que consiste en un manojo de hojas de hierro laminado que tiene enrollada una bobina solenoidal, está alimentado con corriente alterna de un generador. El imán produce un flujo variable de $\boldsymbol{B}$ a través del disco de aluminio. Si tenemos estas dos componentes únicamente, como en la parte (a) de la figura, todavía no tenemos un motor. Hay corrientes de Foucault en el disco pero son simétricas y no hay torque. (Habrá cierto calentamiento del disco debido a las corrientes inducidas.) Si ahora cubrimos solamente la mitad del polo del imán con una placa de aluminio, como lo muestra la parte (b) de la figura, el disco comienza a rotar y tenemos un motor. El funcionamiento depende de *dos* efectos de corrientes de Foucault. Primero, las corrientes de Foucault en la placa del aluminio se oponen a la variación del flujo que la atraviesa, así que el campo magnético encima de la placa se retrasa respecto al campo encima de la mitad descubierta del polo. Este efecto, llamado de "polo blindado", produce un campo que en la región "blindada" varía de manera muy parecida al campo en la región "no blindada" excepto que tiene un retraso temporal constante. El efecto total es como si hubiera un imán sólo la mitad de ancho y que se está moviendo continuamente de la región no blindada a la blindada. Entonces los campos variables interactúan con las corrientes de Foucault del disco produciendo el torque en él.

16-4 La tecnología eléctrica

Cuando Faraday hizo público su notable descubrimiento de que un flujo magnético variable produce una fem, le preguntaron (como le preguntan a cualquiera cuando descubre un nuevo hecho de la naturaleza), "¿para qué sirve?"

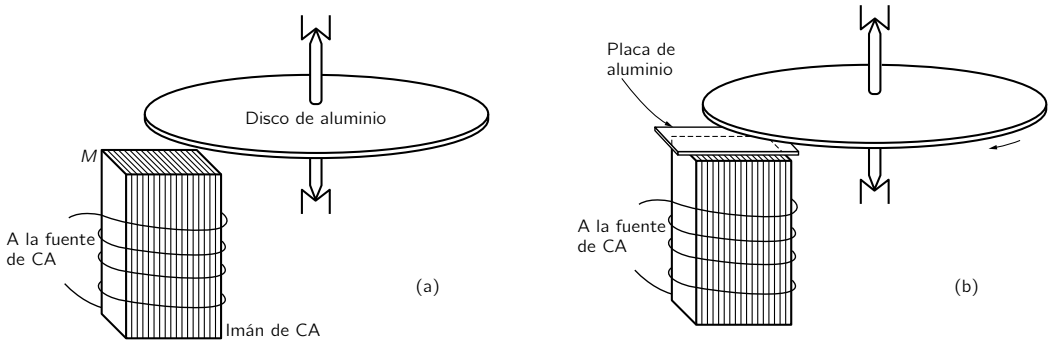


Figura 16-15. Ejemplo simple de un motor de inducción a polo blindado.

Todo lo que había descubierto era la particularidad de que se producía una pequeña corriente cuando movía un alambre cerca de un imán. ¿Cuál podía ser la "utilidad" de eso? Su respuesta fue: "¿cuál es la utilidad de un bebé recién nacido?"

Y piensen, sin embargo, en las tremendas aplicaciones prácticas a que ha conducido su descubrimiento. Lo que hemos estado describiendo no son simplemente juguetes sino ejemplos elegidos en la mayoría de los casos para representar el principio de funcionamiento de alguna máquina de uso práctico. En particular, el anillo giratorio en un campo rotante es un motor de inducción. Por supuesto, hay diferencias entre ello y un motor de inducción de uso práctico. El anillo tiene un torque muy pequeño; lo pueden parar con la mano. En un buen motor hay que juntar las cosas más íntimamente: no debe haber tanto campo magnético "desperdiciado" en el aire. En primer lugar, se concentra el campo usando hierro. No hemos explicado aún el efecto del hierro en este caso, pero el hierro puede hacer que el campo magnético sea decenas de miles de veces más intenso que con bobinas de cobre solas. En segundo lugar, las aberturas entre las piezas de hierro se hacen pequeñas; para hacerlo, se incluye hierro hasta en el anillo giratorio. Todo se dispone como para obtener las mayores fuerzas y la mayor eficiencia —es decir, conversión de potencia eléctrica en potencia mecánica— hasta que no pueden parar el "anillo" con la mano.

Este problema de cerrar la brecha para llegar a cierta parte que funcione de la manera más práctica, es *ingeniería*. Requiere un estudio mesurado de problemas de diseño, aunque no haya ningún principio básico nuevo del cual se obtengan las fuerzas. Pero hay un largo camino por recorrer entre los principios básicos y un diseño práctico y económico. Y, sin embargo, es justamente ese diseño esmerado en ingeniería lo que ha hecho posible algo tan espectacular como la Presa de Boulder y todo lo referente a ella.

¿Qué es la Presa de Boulder? Se intercepta un gran río por medio de una pared de concreto. ¡Pero qué pared! Con la forma de una curva perfecta que ha sido cuidadosamente calculada de modo que la menor cantidad posible de concreto detenga todo un río. Se ensancha hacia abajo con esa forma maravillosa que a los artistas les gusta pero que los ingenieros pueden apreciar porque saben que ese ensanchamiento está relacionado con el aumento de presión con la profundidad del agua. Pero nos estamos alejando de la electricidad.

Luego se envía el agua del río por una cañería inmensa. Eso, de por sí, es una hermosa realización en ingeniería. La cañería lleva el agua hasta una "rueda hidráulica" —una turbina inmensa— y hace girar ruedas. (Otra proeza.) ¿Pero por qué hacer girar ruedas? Están acopladas a un desastre de hierro y cobre, primorosamente intrincado, retorcido y entretejido. Con dos partes —una que da vueltas y otra que no—. Toda una mezcla compleja de unos pocos materiales, mayormente hierro y cobre pero también algo de papel y de goma laca para aislar. Algo monstruoso que da vueltas. Un generador. Por cierto lado del enredo de hierro y cobre salen unos pocos pedazos especiales de cobre. La presa, la turbina,

el hierro, el cobre, todo puesto allí para hacer que algo especial le ocurra a unas pocas barras de cobre —una fem—. Luego las barras de cobre se alejan un poco y rodean varias veces otro pedazo de hierro en un transformador; entonces la tarea está concluida.

Pero alrededor del mismo pedazo de hierro se enrolla otro cable de cobre que no tiene conexión directa alguna con las barras provenientes del generador; simplemente han sido influidas porque pasaron cerca de ella —para obtener su fem—. El transformador convierte la potencia desde los voltajes relativamente bajos necesarios para un diseño eficiente del generador hasta los voltajes altísimos que son los mejores para una transmisión eficiente de la energía eléctrica por largos cables.

Y todo debe ser enormemente eficiente —no puede haber ni desperdicio ni pérdida—. ¿Por qué? Se está derrochando la potencia para una metrópoli. En caso de que se perdiera una fracción pequeña —1 o 2 %— ¡piensen en la energía que no llega! Si se dejara 1 % de la potencia en el transformador, sería necesario sacar esa energía de alguna manera. Si apareciera como calor, fundiría todo rápidamente. Hay, por supuesto, una pequeña ineficiencia, pero todo lo que se necesita es unas pocas bombas para hacer circular un poco de aceite a través de un radiador para evitar que el transformador se caliente.

De la Presa de Boulder salen algunas docenas de varillas de cobre —varillas de cobre largas, quizá del grosor de su muñeca, que recorren centenares de kilómetros en todas direcciones—. Pequeñas varillas de cobre transportando la potencia de un río gigantesco. Luego las varillas se dividen en más varillas... luego a más transformadores... a veces a grandes generadores que recrean la corriente en otra forma... a veces a máquinas que giran con grandes fines industriales... a más transformadores... luego más y más división... hasta que finalmente el río está diseminado por toda la ciudad —moviendo motores, produciendo calor, luz y haciendo funcionar toda clase de artefactos—. El milagro de luces calientes proveniente del agua fría a más 900 kilómetros de distancia —todo realizado con trozos de cobre y de hierro dispuestos en forma especial—. Grandes motores para laminar acero o motores minúsculos para el torno de un dentista. Millones de ruedas pequeñas girando en respuesta a la rotación de la rueda grande de la Presa de Boulder. Paren la rueda grande y se paran todas las ruedas; se van las luces. Están conectadas realmente.

Y hay más. Los mismos fenómenos que toman la potencia tremenda del río y la diseminan por todo el campo, hasta que unas pocas gotas del río hacen funcionar el torno del dentista, entran de nuevo en la construcción de instrumentos extremadamente delicados... para la detección de cantidades de corriente increíblemente pequeñas... para la transmisión de voces, música e imágenes... para computadoras... para máquinas automáticas de precisión fantástica.

Además, todo esto es posible debido a disposiciones cuidadosamente diseñadas de hierro y cobre —campos magnéticos creados eficientemente... bloques de hierro en rotación de aproximadamente dos metros de diámetro con un juego de 1.5 mm... proporciones cuidadosas de cobre para tener una eficiencia óptima... extrañas formas que tienen todas un mismo propósito, como la curva de la presa—.

Si algún arqueólogo del futuro descubriese la Presa de Boulder, podemos conjeturar que admiraría la belleza de sus curvas. Pero también los exploradores que provengan de grandes civilizaciones futuras examinarán los generadores y los transformadores y dirán: "Observen que cada pedazo de cobre tiene una forma hermosamente eficiente. Imaginen el pensamiento que ha pasado por cada pedazo de cobre!"

Éste es el poder de la ingeniería y del diseño esmerado de nuestra tecnología eléctrica. En el generador ha sido creado algo que no existía en ninguna otra parte de la naturaleza. Es verdad que hay fuerzas de inducción en otros lugares. Ciertamente hay efectos de inducción electromagnética en ciertos lugares alrededor del Sol y de las estrellas. Quizá, también (aunque no es seguro), el campo magnético de la Tierra esté mantenido por algo semejante a un generador que funciona sobre corrientes circulando en el interior de la Tierra. Sin embargo, en

ninguna parte se han juntado piezas con partes móviles para generar potencia eléctrica como se hace en el generador —con gran eficiencia y regularidad—.

Puede que piensen que diseñar generadores eléctricos ya no es un tema interesante, que es un tema muerto porque están todos diseñados. Se puede sacar de un estante generadores y motores casi perfectos. Aunque esto fuera cierto, podemos admirar el logro maravilloso de un problema resuelto de una manera casi perfecta. Pero quedan tantos problemas sin terminar. Hasta los generadores y los transformadores están retornando como problemas. Es probable que todo el campo de bajas temperaturas y superconductores se aplicará pronto al problema de la distribución de potencia eléctrica. Con un factor radicalmente nuevo en el problema, se tendrán que crear nuevos diseños óptimos. Así, las redes de potencia del futuro puede que se parezcan muy poco a las actuales.

Asimismo, podemos ver que hay un número interminable de aplicaciones y problemas que se podrían incluir al estudiar las leyes de la inducción. El estudio del diseño de máquinas eléctricas es en sí mismo un trabajo para toda una vida. No podemos ir muy lejos en esa dirección, pero debemos estar conscientes de que al descubrir la ley de inducción, conectamos repentinamente nuestra teoría con un desarrollo práctico enorme. No obstante, tenemos que dejar ese tema a los ingenieros y a los científicos aplicados que están interesados en resolver los detalles de aplicaciones particulares. La física provee únicamente la base —los principios básicos que sirven sin importar qué—. (Sin embargo, todavía no hemos completado la base, porque aún tenemos que considerar en detalle las propiedades del hierro y del cobre. ¡La física tiene algo que decir acerca de ellos, como veremos un poco más adelante!)

La tecnología eléctrica moderna comenzó con los descubrimientos de Faraday. El bebé inútil se convirtió en un prodigio y cambió la faz de la Tierra de una manera que su orgulloso padre nunca hubiera imaginado.

17

Las leyes de inducción

17-1 La física de la inducción
17-2 Excepciones a la "regla del flujo"
17-3 Aceleración de partículas por un campo eléctrico inducido; el betatrones
17-4 Una paradoja
17-5 Generador de corriente alterna
17-6 Inductancia mutua
17-7 Autoinductancia
17-8 Inductancia y energía magnéticas

17-1 La física de la inducción

En el último capítulo describimos muchos fenómenos que demuestran que los efectos de inducción son muy complicados e interesantes. Ahora bien, discutiremos los principios fundamentales que gobiernan estos efectos. Además, ya hemos definido la fem en un circuito conductor como la fuerza total acumulada en las cargas a través de la longitud del lazo. Específicamente, es el componente tangencial de la fuerza por unidad de carga, integrada a lo largo del alambre una vez alrededor del circuito. Por lo tanto, esta cantidad es igual al trabajo total hecho en una sola carga que viaja una vez alrededor del circuito.

También hemos dado la "regla del flujo", la cual dice que la fem es igual a la rapidez con la que el flujo magnético está variando a través de ese circuito. Veamos si podemos entender por qué debe ser así. En primer lugar, consideraremos un caso en el cual el flujo cambia debido a que un circuito se mueve en un campo estacionario.

En la figura 17-1 mostramos un simple lazo de alambre cuyas dimensiones se pueden cambiar. El lazo tiene dos partes; la parte (a) en forma de U fija, y un travesaño (b) que se puede deslizar a lo largo de las dos patas de U. Siempre hay un circuito completo, pero su área es variable. Coloquemos el lazo en un campo magnético uniforme con el plano de U perpendicular al campo. De acuerdo a la regla, cuando el travesaño se mueve, debe haber en el lazo una fem proporcional a la derivada respecto al tiempo del flujo a través del lazo. Así pues, esta fem originará una corriente en el lazo. Supondremos que existe en el alambre una resistencia adecuada para que las corrientes sean pequeñas. Así podemos ignorar cualquier campo magnético de estas corrientes.

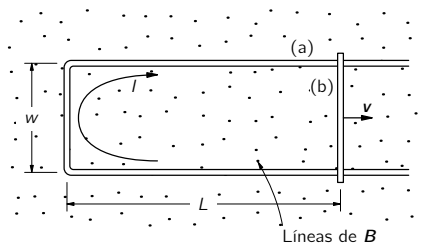


Figura 17-1. Una fem es inducida en un lazo si cambia el flujo variando el área del circuito.

El flujo a través del lazo es wLB, de modo que la "regla del flujo" daría para la fem, que designamos con $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = wB\,\frac{dL}{dt} = wBv,$$

donde v es la velocidad de traslación del travesaño.

Tendríamos que comprender este resultado a partir de la fuerza magnética $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ en las cargas del travesaño. Estas cargas experimentarán una fuerza, tangencial al alambre, igual a vB por unidad de carga, la cual es constante a lo largo de la longitud w del travesaño y cero en cualquier otra parte, así que la integral es la siguiente:

$$\mathcal{E} = wvB,$$

que corresponde al mismo resultado que obtuvimos de la derivada del flujo respecto al tiempo.

El razonamiento que acabamos de hacer se puede extender a cualquier caso en donde haya un campo magnético fijo y los alambres se muevan. Se puede demostrar, en general, que, para cualquier circuito cuyas partes se mueven en un campo magnético fijo, la fem es la derivada del flujo respecto al tiempo independientemente de la forma del circuito.

Por otra parte, ¿qué sucede si el lazo queda estático y el campo magnético varía? No podemos deducir la respuesta a esta pregunta usando el mismo razonamiento. Fue Faraday quien descubrió —experimentalmente— que la "regla del flujo" sigue siendo correcta, cualquiera que sea la razón por la que el flujo varíe. La fuerza sobre cargas eléctricas está dada con toda generalidad por

$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$; no hay nada nuevo y especial como "fuerzas debidas a campos magnéticos que varían". Cualquier fuerza sobre cargas en reposo en un alambre estático proviene del término $\boldsymbol{E}$. Las observaciones de Faraday condujeron al descubrimiento de que los campos magnéticos y eléctricos están relacionados por una ley nueva: en una región donde el campo magnético esté variando en el tiempo, se generan campos eléctricos. Es este campo eléctrico el que conduce los electrones alrededor del alambre —y, por lo tanto, es responsable de la fem en un circuito estático cuando existe un flujo magnético variable—.

La ley general para el campo eléctrico asociado con un campo magnético variable es:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}. \tag{17.1}$$

La llamaremos ley de Faraday. Fue descubierta por Faraday, pero, en realidad, fue Maxwell quien la escribió por primera vez en forma diferencial, como una de sus ecuaciones. Veamos cómo esa ecuación da la "regla del flujo" para circuitos.

Aplicando el teorema de Stokes, esta ley puede ser escrita en forma de una integral de la siguiente manera:

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{n}\, da = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n}\, da, \tag{17.2}$$

donde, como de costumbre, Γ es cualquier curva cerrada y S es cualquier superficie limitada por ella. Recuerden que aquí Γ es una curva *matemática* fija en el espacio, y S es una superficie fija. Entonces, la derivada respecto al tiempo se puede sacar fuera de la integral y tenemos:

$$\begin{aligned} \oint_\Gamma \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} &= -\frac{d}{dt} \int_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, da \\ &= -\frac{d}{dt}(\text{flujo a través de } S). \end{aligned} \tag{17.3}$$

Así pues, aplicando esta relación a la curva Γ que sigue un conductor *fijo* en forma de circuito obtenemos la "regla del flujo" otra vez. La integral del primer miembro es la fem, y la del segundo es menos la derivada respecto al tiempo del flujo vinculado por el circuito. La ecuación (17.1) aplicada a un circuito fijo es equivalente a la "regla del flujo".

Así, la "regla del flujo" —o sea que, la fem en un circuito es igual a la derivada respecto al tiempo del flujo magnético a través del circuito— servirá lo mismo si la variación del flujo se debe a variación de campo o si el circuito se mueve (o ambos). El enunciado de la regla no distingue entre las dos posibilidades —"el circuito se mueve" o "el campo varía"—. No obstante, en nuestra explicación de la regla hemos usado dos leyes completamente distintas para los dos casos: $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ para "el circuito se mueve" y $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\partial \boldsymbol{B}/\partial t$ para "el campo varía".

No sabemos de ninguna otra parte en la física donde un principio general simple y exacto requiera para su comprensión real un análisis en términos de *dos fenómenos diferentes*. Comúnmente una generalización hermosa como ésa emana de un solo principio fundamental profundo. Sin embargo, en este caso no parece haber ninguna implicación profunda de ese tipo. Debemos comprender la "regla" como el efecto combinado de dos fenómenos completamente separados.

Consideremos la "regla del flujo" en la forma siguiente. En general, la fuerza por unidad de carga es $\boldsymbol{F}/q = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$. En alambres en movimiento existe la fuerza del segundo término. Además, habrá un campo $\boldsymbol{E}$ donde haya un lugar con un campo magnético que varíe. Éstos son efectos independientes, pero la fem alrededor del lazo de alambre siempre es igual a la derivada respecto al tiempo del flujo magnético a través de él.

17-2 Excepciones a la "regla del flujo"

Ahora daremos algunos ejemplos, que debemos, en parte, a Faraday, los cuales demuestran la importancia de comprender claramente la distinción entre

los dos efectos responsables de la fem inducida. En nuestros ejemplos intervienen situaciones en las cuales la "regla del flujo" no se puede aplicar —ya sea porque no hay ningún cable o porque la *trayectoria* tomada por las corrientes inducidas se mueve por un volumen extenso de un conductor—.

Empecemos dejando establecido un punto importante: la parte de la fem que proviene del campo $\boldsymbol{E}$ no depende de la existencia de un alambre físico (como la parte $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$). Además, el campo $\boldsymbol{E}$ puede existir en el espacio libre y su integral de línea alrededor de cualquier línea imaginaria fija en el espacio es la derivada respecto al tiempo del flujo de $\boldsymbol{B}$ a través de esa línea. (Observen que esto es muy diferente al campo $\boldsymbol{E}$ producido por cargas estáticas, ya que en este caso la integral de línea de $\boldsymbol{E}$ alrededor de un lazo cerrado es siempre cero.)

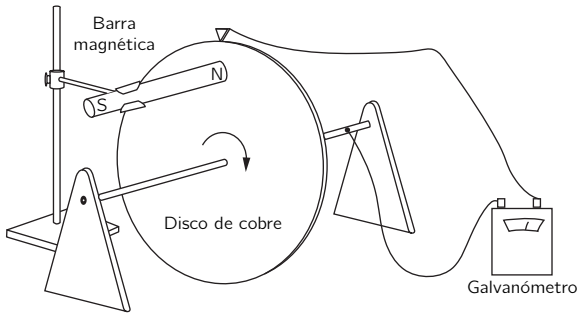


Figura 17-2. Cuando el disco gira hay una fem debido a $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$, pero sin cambio en el flujo enlazado.

Ahora bien, describiremos una situación en la cual el flujo a través del circuito no varía pero, sin embargo, existe una fem. La figura 17-2 muestra un disco conductor que puede rotar sobre un eje fijo en la presencia de un campo magnético. Un contacto se hace en el eje y el otro en la periferia del disco. Se completa un circuito con un galvanómetro. Cuando el disco gira, el "circuito", en el sentido del lugar en el espacio donde están las corrientes, siempre es el mismo. Sin embargo, la parte del "circuito" en el disco está en material que se está moviendo. Aunque el flujo a través del "circuito" es constante, hay una fem, como se puede observar por la deflexión del galvanómetro. Claramente, existe un caso donde la fuerza $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ en el disco en movimiento da lugar a una fem que no se puede igualar a una variación de flujo.

Consideremos, como un ejemplo opuesto, una situación rara, en la cual el flujo a través de un "circuito" (otra vez en el sentido del lugar donde está la corriente) varía pero *no* hay fem. Imaginen dos placas metálicas con bordes ligeramente curvos, como se muestra en la figura 17-3, colocadas en un campo magnético uniforme perpendicular a sus superficies. Cada placa está conectada a uno de los terminales de un galvanómetro, como se muestra. Las placas hacen contacto en un punto P, así que hay un circuito completo. Si ahora las placas se mecen en un ángulo pequeño, el punto de contacto se moverá hacia el punto P'. Si imaginamos que el "circuito" se completa a través de las placas por la línea punteada mostrada en la figura, el flujo magnético a través de ese circuito varía en gran cantidad a medida que las placas se mecen. No obstante, el balanceo se puede hacer con movimientos pequeños de modo que $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ sea muy pequeño y no haya prácticamente fem. La "regla del flujo" no se aplica en este caso. Debe ser aplicada a circuitos en los cuales el *material* del circuito no se altera. Cuando el material del circuito está cambiando, debemos retornar a las leyes básicas. La física *correcta* siempre está dada por las dos leyes básicas

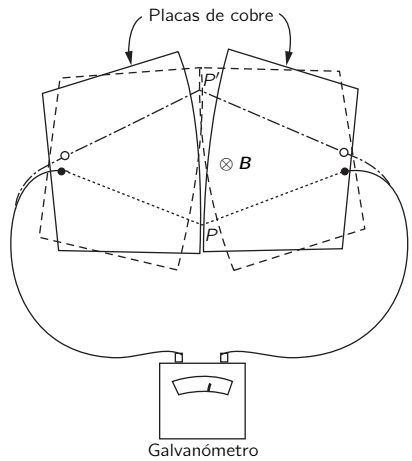


Figura 17-3. Cuando las placas se mecen en un campo magnético uniforme, puede haber una gran variación del flujo enlazado sin generación de una fem.

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}),$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}.$$

17-3 Aceleración de partículas por un campo eléctrico inducido; el betatrones

Hemos dicho que la fuerza electromotriz generada por un campo magnético variable puede existir aun sin conductores. Puede haber inducción magnética sin alambres. También podemos imaginar una fuerza electromotriz alrededor de una curva matemática arbitraria en el espacio. Se define como la componente tangencial de $\boldsymbol{E}$ integrada alrededor de la curva. La ley de Faraday dice que esta integral de línea es igual a menos la derivada respecto al tiempo del flujo magnético a través de la curva cerrada, ecuación (17.3).

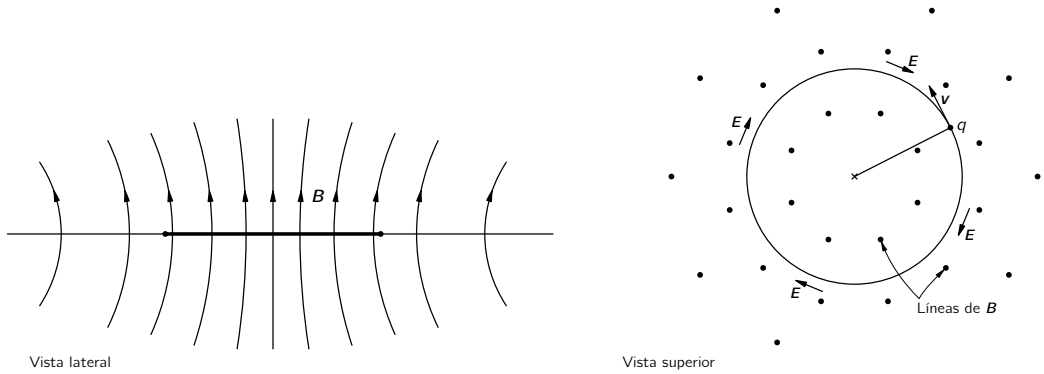


Figura 17-4. Un electrón acelerado en un campo magnético axialmente simétrico que aumenta.

Como ejemplo del efecto de tal campo eléctrico inducido, ahora queremos considerar el movimiento de un electrón en un campo magnético variable. Imaginemos un campo magnético que en todo punto de un plano señala en dirección vertical, como lo muestra la figura 17-4. El campo magnético es producido por un electroimán, pero no nos preocuparemos de los detalles. Para nuestro ejemplo imaginaremos que el campo magnético es simétrico respecto a un eje, es decir, la intensidad del campo magnético solamente dependerá de la distancia al eje. El campo magnético también varía con el tiempo. Imaginemos ahora un electrón moviéndose en este campo magnético en una trayectoria que es un círculo de radio constante con su centro en el eje del campo. (Veremos más adelante cómo se puede conseguir este movimiento.) Debido al campo magnético variable, habrá un campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ tangencial a la órbita del electrón, el cual hará que éste viaje alrededor del círculo. Debido a la simetría, este campo eléctrico tendrá el mismo valor en cualquier lugar del círculo. Siempre que la órbita del electrón tenga radio r, la integral de línea de $\boldsymbol{E}$ alrededor de la órbita es igual a menos la derivada respecto al tiempo del flujo magnético a través del círculo. Además, la integral de línea de $\boldsymbol{E}$ es justamente el producto de su módulo por la circunferencia del círculo, $2\pi r$. En general, el flujo magnético debe ser obtenido de una integral. Por el momento, representemos con B_{pr} el campo magnético promedio en el interior del círculo; el flujo es el campo magnético promedio por el área del círculo. Tendremos,

$$2\pi r E = \frac{d}{dt}(B_{\text{pr}} \cdot \pi r^2).$$

Como suponemos que r es constante, E es proporcional a la derivada del campo promedio respecto al tiempo:

$$E = \frac{r}{2}\,\frac{dB_{\text{pr}}}{dt}. \tag{17.4}$$

El electrón sufrirá la fuerza eléctrica $q\boldsymbol{E}$ y será acelerado por ella. Recordando que la ecuación de movimiento relativistamente correcta es que la derivada del momentum respecto al tiempo es proporcional a la fuerza, tenemos lo siguiente:

$$qE = \frac{dp}{dt}. \tag{17.5}$$

Para la órbita circular que hemos supuesto, la fuerza eléctrica sobre el electrón siempre está en la dirección de su movimiento, de tal modo que su momentum total aumentará en la proporción dada por la ecuación (17.5). Combinando las ecuaciones (17.5) y (17.4), podemos relacionar la derivada del momentum respecto al tiempo con la derivada del campo magnético promedio respecto al tiempo:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{qr}{2}\,\frac{dB_{\text{pr}}}{dt}. \tag{17.6}$$

Integrando respecto a t, encontramos que para el momentum del electrón es:

$$p = p_0 + \frac{qr}{2}\,\Delta B_{\text{pr}}, \tag{17.7}$$

donde p_0 es el momentum con el cual el electrón comienza, y ΔB_{pr} es la variación subsiguiente de B_{pr}. El funcionamiento de un *betatrón* —una máquina para acelerar electrones a altas energías— está basado en esta idea.

Para descubrir en detalle cómo funciona el betatrón, debemos examinar cómo se puede forzar al electrón a que se mueva en círculo. Hemos discutido en el capítulo 11 del volumen I el principio implicado. Siempre y cuando nos arreglamos para que haya un campo magnético $\boldsymbol{B}$ en la órbita del electrón, habrá una fuerza transversal $q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ que, por una elección apropiada de $\boldsymbol{B}$, puede hacer que el electrón permanezca moviéndose en su órbita supuesta. En el betatrón esa fuerza transversal hace que el electrón se mueva en una órbita circular de radio constante. Podemos hallar cuál debe ser el campo magnético en la órbita usando de nuevo la ecuación relativista de movimiento, pero esta vez para la componente transversal de la fuerza. Así, en el betatrón (véase figura 17-4), $\boldsymbol{B}$ es perpendicular a $\boldsymbol{v}$, de modo que la fuerza transversal es qvB. La fuerza es igual a la derivada respecto al tiempo de la componente transversal p_t del momentum:

$$qvB = \frac{dp_t}{dt}. \tag{17.8}$$

Ahora bien, cuando una partícula se mueve en un *círculo*, la derivada de su momentum transversal respecto al tiempo es igual al módulo del producto del momentum total por ω, la velocidad angular de rotación (siguiendo los razonamientos del capítulo 11, volumen I) es la siguiente:

$$\frac{dp_t}{dt} = \omega p, \tag{17.9}$$

donde, ya que el movimiento es circular,

$$\omega = \frac{v}{r}. \tag{17.10}$$

Igualando la fuerza magnética a la aceleración transversal, tenemos:

$$qvB_{\text{orbit}} = p\,\frac{v}{r}, \tag{17.11}$$

donde B_{orbit} es el campo en el radio r.

A medida que el betatrón actúa, de acuerdo con la ecuación (17.7) el momentum del electrón crece proporcionalmente a B_{pr} y para que el electrón continúe moviéndose en su propio círculo, la ecuación (17.11) tiene que continuar siendo válida a medida que el momentum del electrón aumenta. El valor de B_{orbit} debe aumentar proporcionalmente al momentum p. Comparando la ecuación (17.11) con la (17.7), la cual determina p, vemos que hay la siguiente relación entre B_{pr}, el campo magnético promedio *dentro* de la órbita de radio r, y el campo magnético en la órbita B_{orbit}:

$$\Delta B_{\text{pr}} = 2\,\Delta B_{\text{orbit}}. \tag{17.12}$$

Además, el funcionamiento correcto de un betatrón necesita que el campo magnético promedio dentro de la órbita aumente el doble de la rapidez del campo magnético en la órbita. En estas circunstancias, a medida que la energía de la partícula aumenta debido al campo eléctrico inducido, el campo magnético en la órbita se incrementa tan sólo con la rapidez necesaria para mantener a la partícula moviéndose en un círculo.

El betatrón se usa para acelerar electrones a energías de decenas de millones de voltios, o incluso a centenas de millones de voltios. Pero deja de ser práctico para la aceleración de electrones a energías mayores que unas pocas centenas de millones de voltios por diversas razones. Una de ellas es la dificultad práctica de obtener el alto valor promedio del campo magnético necesario dentro de la órbita. Otra es que la ecuación (17.6) no es suficientemente correcta a energías muy altas a causa de que no incluye la pérdida de energía de la partícula debido a su radiación de energía electromagnética (la llamada radiación sincrotónica, estudiada en el capítulo 34, volumen I). Por estas razones, la aceleración de electrones a las energías más altas —a muchos miles de millones de electronvoltios— se logra por medio de una máquina diferente, llamada *sincrotrón*.

17-4 Una paradoja

Ahora discutiremos una paradoja aparente. Una paradoja es una situación que da una respuesta cuando se analiza de una manera y da otra cuando se analiza de otra manera, de modo que nos queda un poco de incertidumbre respecto a lo que debe ocurrir realmente. Por supuesto, en física nunca hay una paradoja real porque sólo hay una respuesta correcta; al menos creemos que la naturaleza actuará en una sola forma (y, por supuesto, que ésa es la *forma correcta*). Así pues, en física una paradoja es sólo una confusión en nuestro propio entendimiento. Aquí está nuestra paradoja.

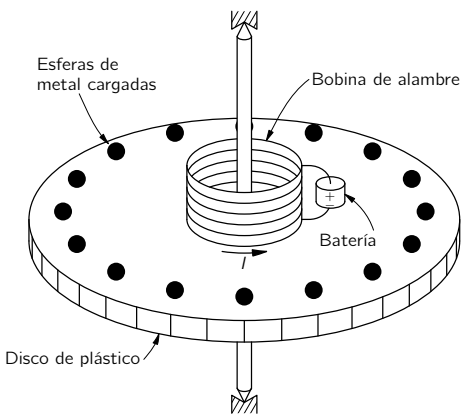


Figura 17-5. ¿Rotará el disco si la corriente I se para?

Imaginen que construimos un dispositivo como el mostrado en la figura 17-5. Este dispositivo consistirá en un disco circular de plástico delgado sostenido en un eje concéntrico con cojinetes excelentes, que sea completamente libre de rotar. En el disco hay una bobina de alambre en forma de solenoide corto concéntrico con el eje de rotación. Por este solenoide pasa una corriente estacionaria I producida por una batería pequeña, montada también en el disco. Cerca del borde del disco y espaciadas uniformemente alrededor de su circunferencia hay un número de pequeñas esferas metálicas aisladas una de otra y del solenoide por el material plástico del disco. Cada una de estas esferas conductoras pequeñas está cargada con la misma carga electrostática Q. Todo está completamente quieto, y el disco está en reposo. Supongan ahora, que por algún accidente —o por predisposición— la corriente en el solenoide se interrumpe sin ninguna intervención externa. Mientras la corriente continuaba, había un flujo magnético a través del solenoide más o menos paralelo al eje del disco. Cuando la corriente se interrumpe, este flujo debe desaparecer. Por tanto, habrá un campo eléctrico inducido que circulará a lo largo de círculos centrados en el eje. Las esferas cargadas en el perímetro del disco experimentarán un campo eléctrico tangencial al perímetro del disco. Esta fuerza eléctrica está en el mismo sentido para todas las cargas y, por lo tanto, dará lugar a un torque resultante en el disco. Según este razonamiento sería de esperar que a medida que la corriente en el solenoide desaparece, el disco debe empezar a rotar. Si conociéramos el momento de inercia del disco, la corriente en el solenoide y las cargas en las esferas pequeñas, calcularíamos la velocidad angular resultante.

Sin embargo, también podríamos hacer un razonamiento diferente. Así pues, podemos aplicar el principio de la conservación del momentum angular, es decir, el momentum angular del disco es cero con todo su equipo y, en consecuencia, el momentum angular del conjunto debe seguir siendo cero. No debe haber rotación cuando se pare la corriente. ¿Cuál es el razonamiento correcto? ¿Rotará o no rotará el disco? Dejaremos la interrogante para que piensen al respecto.

Debemos advertirles que la respuesta correcta no depende de ninguna característica no esencial, como la posición asimétrica de una batería. En verdad, se

puede imaginar una situación ideal como la siguiente: el solenoide se hace de un alambre superconductor por el cual pasa una corriente. Después de haber puesto el disco cuidadosamente en reposo, se hace que la temperatura del solenoide suba lentamente. Cuando la temperatura del alambre alcanza la temperatura de transición entre la superconductividad y la conductividad normal, la corriente del solenoide tenderá a cero debido a la resistencia del alambre. El flujo también tenderá a cero y habrá un campo eléctrico alrededor del eje. Además les advertimos que la solución no es fácil ni es un truco. Cuando la encuentren habrán descubierto un principio importante del electromagnetismo.

17-5 Generador de corriente alterna

En el resto de este capítulo aplicaremos el principio de la sección 17-1 para analizar un número de fenómenos discutidos en el capítulo 16. Primero examinaremos con detalle el generador de corriente alterna. Este generador consiste básicamente en una bobina de alambre que gira en un campo magnético uniforme. El mismo resultado también se puede alcanzar usando una bobina fija en un campo magnético cuya dirección gira en la forma descrita en el último capítulo. Consideraremos solamente el primer caso. Supongan que tenemos una bobina circular de alambre que puede girar en un eje paralelo a uno de sus diámetros. Coloquemos esta bobina en un campo magnético perpendicular al eje de rotación, como en la figura 17-6. Imaginemos también que los dos extremos de la bobina están unidos a conexiones externas a través de cualquier clase de contactos corredizos.

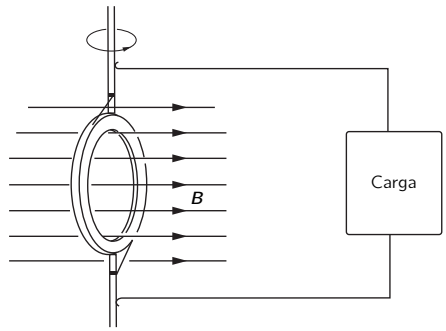


Figura 17-6. Una bobina de alambre girando en un campo magnético uniforme —la idea básica de un generador de CA—.

Debido a la rotación de la bobina, el flujo magnético a través de ella variará. Por lo tanto, el circuito de la bobina tendrá una fem. Sea S el área de la bobina y θ el ángulo entre el campo magnético y la normal al plano de la bobina.* El flujo a través de la bobina es entonces

$$BS\cos\theta. \tag{17.13}$$

Si la bobina gira a la velocidad angular uniforme ω, θ varía con el tiempo como $\theta = \omega t$.

Cada vuelta de la bobina tendrá una fem igual a la derivada de este flujo respecto al tiempo. Si la bobina tiene N vueltas de alambre la fem total será N veces más grande, así que

$$\mathcal{E} = -N\frac{d}{dt}(BS\cos\omega t) = NBS\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t. \tag{17.14}$$

Si llevamos los cables del generador a un punto algo distante de la bobina rotante, donde el campo magnético sea cero o, al menos, no esté variando con el tiempo, el rotacional de $\boldsymbol{E}$ en esta región será cero y podremos definir un potencial eléctrico. En realidad, si no hay corriente del generador la diferencia de potencial V entre los dos alambres será igual a la fem en la bobina rotante. Esto es,

$$V = NBS\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t = V_0\,\mathrm{sen}\,\omega t.$$

La diferencia de potencial entre los alambres varía como $\mathrm{sen}\,\omega t$. Tal diferencia de potencial variable se llama voltaje alterno.

Como hay un campo eléctrico entre los alambres, éstos están cargados eléctricamente. Es claro que la fem del generador ha empujado algún exceso de cargas fuera del alambre hasta que el campo eléctrico de ellas es suficientemente fuerte como para contrabalancear exactamente la fuerza de inducción. Vistos desde fuera del generador, los dos alambres aparecen, sin embargo, como si se hubieran cargado electrostáticamente a la diferencia de potencial V, y como si las cargas estuvieran variando en el tiempo para dar una diferencia de potencial alterna. También hay otra diferencia con una situación electrostática. Si conectamos el

* Como estamos usando la letra A para el potencial vectorial, preferimos usar S para el área de una superficie.

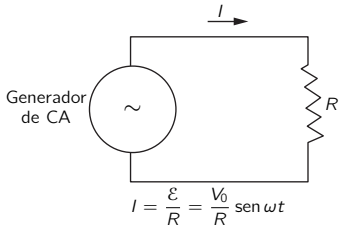


Figura 17-7. Un circuito con un generador de CA y una resistencia.

generador a un circuito externo que permita el paso de una corriente, encontramos que la fem no permite que se descarguen los alambres, sino que continúa suministrando carga a los alambres a medida que se extrae corriente de ellos, tratando de mantener los alambres siempre a la misma diferencia de potencial. Si, de hecho, el generador está conectado en un circuito cuya resistencia total es R, la corriente a través del circuito será proporcional a la fem del generador e inversamente proporcional a R. Dado que la fem tiene una variación de tiempo senoidal, también lo hace la corriente. Hay una corriente alterna

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{V_0}{R}\,\mathrm{sen}\,\omega t.$$

La figura 17-7 muestra el diagrama esquemático de ese circuito.

También podemos ver que la fem determina cuánta energía proporciona el generador. Cada carga del alambre recibe energía a razón de $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$, por unidad de tiempo, donde $\boldsymbol{F}$ es la fuerza sobre la carga y $\boldsymbol{v}$ es su velocidad. Ahora bien, si n es el número de cargas en movimiento por unidad de longitud del alambre, entonces la potencia desarrollada en cualquier elemento ds del alambre es:

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}n\,ds.$$

Para un alambre, $\boldsymbol{v}$ siempre está según $d\boldsymbol{s}$, así que la potencia se puede rescribir en la forma:

$$nv\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}.$$

La potencia total que se está proporcionando al circuito completo es la integral de esta expresión alrededor del lazo completo:

$$\text{Potencia} = \oint nv\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}. \tag{17.15}$$

Ahora recuerden que qnv es la corriente I, y que la fem se define como la integral de F/q alrededor del circuito. Obtenemos el resultado siguiente:

$$\text{Potencia de un generador} = \mathcal{E}I. \tag{17.16}$$

Cuando hay una corriente en la bobina del generador, existirán fuerzas mecánicas en él. En realidad sabemos que el torque sobre la bobina es proporcional a su momento magnético, a la intensidad B del campo magnético y al seno del ángulo que ellos forman. El momento magnético es el producto de la corriente en la bobina por su área. Por lo tanto, el torque es:

$$\tau = NISB\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{17.17}$$

El trabajo mecánico que hay que realizar por unidad de tiempo para mantener a la bobina rotando es el producto de la velocidad angular ω por el torque:

$$\frac{dW}{dt} = \omega\tau = \omega NISB\,\mathrm{sen}\,\theta. \tag{17.18}$$

Comparando esta ecuación con la (17.14), vemos que el trabajo mecánico necesario por unidad de tiempo para hacer girar la bobina contra las fuerzas magnéticas es igual a $\mathcal{E}I$, la potencia eléctrica que entrega la fem del generador. Toda la energía mecánica usada en el generador aparece como energía eléctrica del circuito.

Como otro ejemplo de las corrientes y las fuerzas debidas a una fem inducida, analicemos qué sucede en el montaje descrito en la sección 17-1 y mostrado en la figura 17-1. Hay dos alambres paralelos y un travesaño deslizante ubicados en un campo magnético uniforme perpendicular al plano de los alambres paralelos. Ahora supongamos que el "fondo" de la U (el lado izquierdo en la figura) se hace de alambre de gran resistencia, mientras los dos lados de alambres se hacen de un buen conductor como cobre; por tanto, no necesitamos preocuparnos del cambio de la resistencia del circuito cuando el travesaño se mueva. Como hemos visto, la fem en el circuito es:

$$\mathcal{E} = vBw. \tag{17.19}$$

La corriente en el circuito es proporcional a esa fem e inversamente proporcional a la resistencia del circuito:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{vBw}{R}. \tag{17.20}$$

Debido a esta corriente habrá una fuerza magnética en el travesaño, que es proporcional a su longitud, a la corriente en él y al campo magnético, tal que

$$F = BIw. \tag{17.21}$$

Tomando I de la ecuación (17.20), tenemos para la fuerza:

$$F = \frac{B^2w^2}{R}\, v. \tag{17.22}$$

Vemos que la fuerza es proporcional a la velocidad del travesaño. La dirección de la fuerza es opuesta a su velocidad, como se ve fácilmente. Esa fuerza "proporcional a la velocidad", que es como la fuerza de viscosidad, se encuentra siempre que se produzcan corrientes inducidas al moverse los conductores en un campo magnético. Los ejemplos de corrientes parásitas dado en el último capítulo también produjeron fuerzas en los conductores proporcionales a la velocidad del conductor, aunque tales situaciones, en general, dan una distribución complicada de corrientes que es difícil analizar.

A menudo es conveniente en el diseño de sistemas mecánicos tener fuerzas de amortiguación que son proporcionales a la velocidad. Las fuerzas de corrientes de Foucault proporcionan una de las maneras más convenientes de obtener tal fuerza independiente de la velocidad. Un ejemplo de la aplicación de una fuerza de este tipo se encuentra en los vatímetros domésticos convencionales. En el vatímetro hay un disco de aluminio delgado que gira entre los polos de un imán permanente. Además, este disco es arrastrado por un motor eléctrico pequeño cuyo torque es proporcional a la potencia que se consume en el circuito eléctrico de la casa. Así pues, debido a las fuerzas de corriente de Foucault, existe una fuerza de resistividad proporcional a la velocidad. En equilibrio, la velocidad es, por lo tanto, proporcional a la rapidez del consumo de energía eléctrica. Usando un contador adosado al disco que gira, se obtiene un registro del número de revoluciones. Esta cantidad es una indicación de la energía total consumida, es decir, el número de vatios por hora consumidos.

Señalemos también que la ecuación (17.22) demuestra que la fuerza producida por la corriente inducida —esto es, cualquier fuerza de corriente de Foucault— es inversamente proporcional a la resistencia. Cuanto mejor sea la conductividad del material, mayor será la fuerza. Por supuesto, la razón es que una fem produce más corriente si la resistencia es menor y corrientes más fuertes representan fuerzas mecánicas mayores.

Además, también podemos ver a partir de nuestras fórmulas cómo se convierte la energía mecánica en energía eléctrica. Como antes, la energía eléctrica suministrada a la resistencia del circuito es el producto $\mathcal{E}I$. La rapidez con que se hace trabajo al mover el travesaño conductor es la fuerza sobre el mismo por la velocidad. Usando la ecuación (17.22) para la fuerza, la rapidez con que se realiza trabajo es:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{v^2B^2w^2}{R}.$$

Vemos que esto es realmente el producto $\mathcal{E}I$ que obtendríamos de las ecuaciones (17.19) y (17.20). Una vez más, el trabajo mecánico aparece como energía eléctrica.

17-6 Inductancia mutua

Consideremos ahora una situación en la cual hay bobinas de alambre fijas pero campos magnéticos que varían. Cuando describimos la producción de campos magnéticos por corrientes, consideramos solamente el caso de corrientes estacionarias. Pero cuando las corrientes varían lentamente, el campo magnético

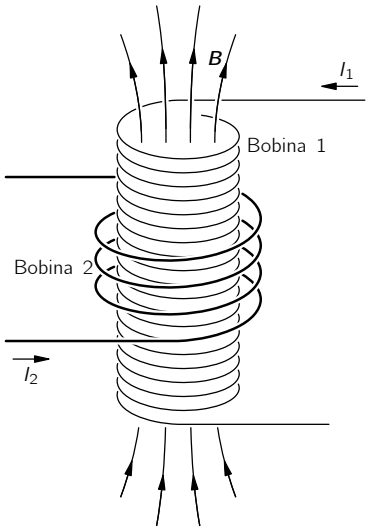


Figura 17-8. Una corriente en la bobina 1 produce un campo magnético a través de la bobina 2.

en cada instante es igual al campo magnético de una corriente estacionaria. Supondremos en la discusión de esta sección que la variación de las corrientes es lo suficientemente lenta como para que sea cierto.

En la figura 17-8 se muestra un arreglo de dos bobinas que demuestra el efecto básico responsable del funcionamiento de un transformador. Así, la bobina 1 consiste en un alambre conductor enrollado en forma de solenoide largo. Alrededor de esta bobina —y aislada de ella— se enrolla la bobina 2, la cual consiste en unas pocas vueltas de alambre. Si ahora se hace pasar una corriente por la bobina 1, sabemos que un campo magnético aparecerá dentro de ella. Este campo magnético también atravesará la bobina 2. Como la corriente de la bobina 1 está variando, el flujo magnético también variará y habrá una fem inducida en la bobina 2. Ahora calcularemos esta fem inducida.

Hemos visto en la sección 13-5 que el campo magnético dentro de un solenoide largo es uniforme y de magnitud:

$$B = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\,\frac{N_1 I_1}{l}, \tag{17.23}$$

donde N_1 es el número de vueltas en la bobina 1, I_1 es la corriente que pasa por ella, y l es su longitud. Digamos que si la sección de la bobina 1 es S, el flujo de $\boldsymbol{B}$ es su magnitud por S. Si la bobina 2 tiene N_2 vueltas, este flujo enlaza la bobina N_2 veces. Por tanto, la fem en la bobina 2 está dada por:

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 S\,\frac{dB}{dt}. \tag{17.24}$$

La única cantidad en la ecuación (17.23) que varía con el tiempo es I_1. La fem está dada por:

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{N_1 N_2 S}{\epsilon_0 c^2 l}\,\frac{dI_1}{dt}. \tag{17.25}$$

Vemos que la fem en la bobina 2 es proporcional a la derivada de la corriente en la bobina 1 respecto al tiempo. La constante de proporcionalidad, que es básicamente un factor geométrico de las dos bobinas, se llama *inductancia mutua* y generalmente se designa con $\mathfrak{M}_{21}$. Escribimos entonces la ecuación (17.25)

$$\mathcal{E}_2 = \mathfrak{M}_{21}\,\frac{dI_1}{dt}. \tag{17.26}$$

Ahora supongan que pasamos una corriente por la bobina 2 y queremos saber cuál es la fem en la bobina 1. Debemos calcular el campo magnético, que en todo punto es proporcional a la corriente I_2. El flujo a través de la bobina 1 dependería de la geometría, pero sería proporcional a la corriente I_2. Por lo tanto, una vez más, la fem sería proporcional a dI_2/dt; podemos escribir:

$$\mathcal{E}_1 = \mathfrak{M}_{12}\,\frac{dI_2}{dt}. \tag{17.27}$$

El cálculo de $\mathfrak{M}_{12}$ sería más difícil que el que acabamos de hacer para $\mathfrak{M}_{21}$. No trataremos esos cálculos ahora, debido a que más adelante en este capítulo demostraremos que $\mathfrak{M}_{12}$ necesariamente es igual a $\mathfrak{M}_{21}$.

Como para *cualquier* bobina su campo es proporcional a su corriente, se obtendría el mismo resultado para dos bobinas cualesquiera de alambre. Las ecuaciones (17.26) y (17.27) tendrían la misma forma; solamente las constantes $\mathfrak{M}_{21}$ y $\mathfrak{M}_{12}$ serían diferentes. Sus valores deben depender de la forma de las bobinas y de sus posiciones relativas.

Supongan que queremos encontrar la inductancia mutua entre dos bobinas arbitrarias cualesquiera —por ejemplo, las mostradas en la figura 17-9—. Sabemos que la expresión general para la fem en la bobina 1 se puede escribir en la forma:

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d}{dt}\int_{(1)} \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}\,da,$$

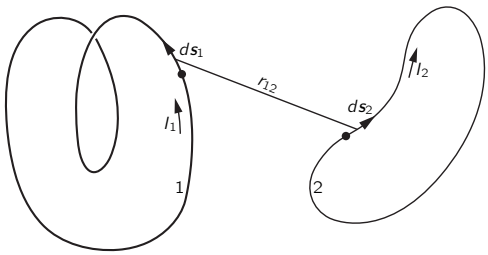


Figura 17-9. Dos bobinas cualesquiera tienen una inductancia mutua $\mathfrak{M}$ proporcional a la integral de $d\boldsymbol{s}_1 \cdot d\boldsymbol{s}_2/r_{12}$.

donde $\boldsymbol{B}$ es el campo magnético y la integral se toma sobre la superficie limitada por el circuito 1. Vimos en la sección 14-1 que tal integral de superficie de $\boldsymbol{B}$ se puede relacionar con una integral de línea del potencial vectorial. En particular,

$$\int_{(1)} \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, da = \oint_{(1)} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s}_1,$$

donde $\boldsymbol{A}$ representa el potencial vectorial y $d\boldsymbol{s}_1$ es un elemento del circuito 1. La integral de línea se toma alrededor del circuito 1. La fem en la bobina 1 puede, por tanto, escribirse en la forma:

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{d}{dt} \oint_{(1)} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s}_1. \tag{17.28}$$

Ahora supongamos que el potencial vectorial en el circuito 1 proviene de la corriente en el circuito 2. Entonces se lo puede escribir como una integral de línea alrededor del circuito 2:

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \oint_{(2)} \frac{I_2\, d\boldsymbol{s}_2}{r_{12}}, \tag{17.29}$$

donde I_2 es la corriente en el circuito 2, y r_{12} es la distancia del elemento de circuito $d\boldsymbol{s}_2$ al punto en el circuito 1 en el cual calculamos el potencial vectorial. (Véase figura 17-9.) Combinando las ecuaciones (17.28) y (17.29), podemos expresar la fem en el circuito 1 como una doble integral de línea:

$$\mathcal{E}_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{d}{dt} \oint_{(1)} \oint_{(2)} \frac{I_2\, d\boldsymbol{s}_2}{r_{12}} \cdot d\boldsymbol{s}_1.$$

En esta ecuación todas las integrales son tomadas respecto a circuitos estáticos. La única cantidad variable es la corriente I_2, la cual no depende de las variables de integración. Por lo tanto, podemos sacarla de la integral. La fem se puede escribir, entonces, en la forma:

$$\mathcal{E}_1 = \mathfrak{M}_{12} \frac{dI_2}{dt},$$

donde el coeficiente $\mathfrak{M}_{12}$ es

$$\mathfrak{M}_{12} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \oint_{(1)} \oint_{(2)} \frac{d\boldsymbol{s}_2 \cdot d\boldsymbol{s}_1}{r_{12}}. \tag{17.30}$$

Según esta integral vemos que $\mathfrak{M}_{12}$ sólo depende de la geometría del circuito. Depende de una especie de separación promedio de los dos circuitos, interviniendo con el mayor peso en el promedio los segmentos paralelos de las dos bobinas. Podemos usar nuestra ecuación para calcular la inductancia mutua de dos circuitos cualesquiera de forma arbitraria. También demuestra que la integral para $\mathfrak{M}_{12}$ es idéntica a la integral para $\mathfrak{M}_{21}$. Así que, hemos demostrado que los dos coeficientes son idénticos. Para un sistema con sólo dos bobinas, los coeficientes $\mathfrak{M}_{12}$ y $\mathfrak{M}_{21}$ se representan a menudo por el símbolo $\mathfrak{M}$ sin subíndices, llamado simplemente *inductancia mutua*:

$$\mathfrak{M}_{12} = \mathfrak{M}_{21} = \mathfrak{M}.$$

17-7 Autoinductancia

Al estudiar las fuerzas electromotrices inducidas en las dos bobinas de las figuras 17-8 o 17-9, sólo hemos considerado el caso en el cual había corriente en una bobina o en la otra. Si hay corrientes en las dos bobinas simultáneamente, el flujo magnético que enlaza cualquier bobina será la suma de los dos flujos, los cuales deben existir separadamente, debido a la ley de superposición aplicada a campos magnéticos. Por consiguiente, la fem en cualquier bobina será proporcional no sólo a la variación de la corriente en la otra bobina, sino también a la variación de la corriente de la propia bobina. Razón por la cual la fem total en la bobina 2 se debe escribir*

$$\mathcal{E}_2 = \mathfrak{M}_{21}\,\tfrac{dI_1}{dt} + \mathfrak{M}_{22}\,\tfrac{dI_2}{dt}. \tag{17.31}$$

Análogamente, la fem en la bobina 1 no sólo dependerá de la variación de corriente en la bobina 2, sino también de la variación de corriente en la propia bobina:

$$\mathcal{E}_1 = \mathfrak{M}_{12}\,\tfrac{dI_2}{dt} + \mathfrak{M}_{11}\,\tfrac{dI_1}{dt}. \tag{17.32}$$

Los coeficientes $\mathfrak{M}_{22}$ y $\mathfrak{M}_{11}$ siempre son números negativos. Es costumbre escribir

$$\mathfrak{M}_{11} = -\mathcal{L}_1, \qquad \mathfrak{M}_{22} = -\mathcal{L}_2, \tag{17.33}$$

donde $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ se llaman *autoinductancias* de las dos bobinas.

La fem autoinducida existirá, por supuesto, incluso si tenemos sólo una bobina. Cualquier bobina por sí misma tendrá una autoinductancia $\mathcal{L}$. La fem será proporcional a la derivada respecto al tiempo de la corriente que circula por ella. Para una bobina sencilla, usualmente se adopta la convención de que la fem y la corriente se consideran positivas si están en el mismo sentido. Con esta convención, debemos escribir para la fem de una sola bobina

$$\mathcal{E} = -\mathcal{L}\,\tfrac{dI}{dt}. \tag{17.34}$$

El signo negativo indica que la fem se opone a la variación de la corriente —a menudo se la llama "fuerza contraelectromotriz"—.

Como cualquier bobina tiene una autoinductancia que se opone a la variación de corriente, la corriente en la bobina tiene una especie de inercia. En realidad, si queremos variar la corriente en una bobina debemos salvar esta inercia conectando la bobina a alguna fuente de voltaje externa como una batería o un generador, como se muestra en el diagrama esquemático de la figura 17-10(a). En tal circuito, la corriente I influye sobre el voltaje $\mathcal{V}$ conforme a la relación

$$\mathcal{V} = \mathcal{L}\,\tfrac{dI}{dt}. \tag{17.35}$$

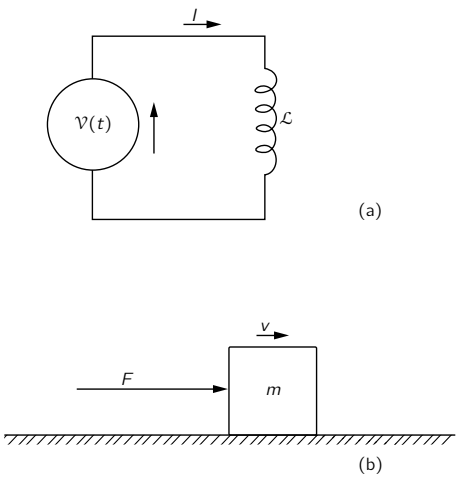


Figura 17-10. (a) Un circuito con una fuente de voltaje y una inductancia. (b) Un sistema mecánico análogo.

Esta ecuación tiene la misma forma que la ley de movimiento de Newton para una partícula en una dimensión. Por lo tanto, podemos estudiarla usando el principio de que "ecuaciones iguales tienen soluciones iguales". Así, si hacemos corresponder el voltaje $\mathcal{V}$ aplicado externamente a una fuerza F, y la corriente I en una bobina corresponde a la velocidad v de una partícula, la inductancia $\mathcal{L}$ de la bobina corresponde a la masa m de la partícula.† Véase la figura 17-10(b). Podemos hacer la tabla siguiente de cantidades correspondientes.

Partícula	***Bobina***
F (fuerza)	$\mathcal{V}$ (diferencia de potencial)
v (velocidad)	I (corriente)
x (desplazamiento)	q (carga)
$F = m\,\dfrac{dv}{dt}$	$\mathcal{V} = \mathcal{L}\,\dfrac{dI}{dt}$
mv (momentum)	$\mathcal{L}I$
$\frac{1}{2}mv^2$ (energía cinética)	$\frac{1}{2}\mathcal{L}I^2$ (energía magnética)

* El signo de $\mathfrak{M}_{12}$ y $\mathfrak{M}_{21}$ en las ecuaciones (17.31) y (17.32) depende de la elección de signo arbitraria para el sentido de una corriente positiva en las dos bobinas.

† Naturalmente que ésta *no* es la *única* forma de establecer una correspondencia entre cantidades mecánicas y eléctricas.

17-8 Inductancia y energía magnéticas

Continuando con la analogía de la sección precedente, sería de esperar que corespondiendo al momentum mecánico $p = mv$, cuya derivada respecto al tiempo es fuerza aplicada, haya una cantidad análoga igual a $\mathcal{L}I$, cuya derivada respecto al tiempo es $\mathcal{V}$. No tenemos derecho a decir, por supuesto, que $\mathcal{L}I$ es el momentum real del circuito, en realidad no lo es. El circuito completo puede estar quieto, no tener momentum. Solamente que $\mathcal{L}I$ es análogo al momentum mv en el sentido de satisfacer la correspondencia de las ecuaciones. En la misma forma, a la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$, le corresponde la cantidad análoga $\frac{1}{2}\mathcal{L}I^2$. Pero ahí tenemos una sorpresa. Esta $\frac{1}{2}\mathcal{L}I^2$ también es realmente la energía en el caso eléctrico. El trabajo que se hace sobre la inductancia por unidad de tiempo es $\mathcal{V}I$ y en el sistema mecánico Fv, es la cantidad correspondiente. Por consiguiente, en el caso de la energía las cantidades no sólo se corresponden matemáticamente, sino que también tienen el mismo significado físico.

Podemos ver esto con más detalle. Como lo obtuvimos en la ecuación (17.16), el trabajo eléctrico por unidad de tiempo debido a las fuerzas inducidas es el producto de la fuerza electromotriz y la corriente:

$$\frac{dW}{dt} = \mathcal{E}I.$$

Remplazamos $\mathcal{E}$ por su expresión en términos de la corriente de la ecuación (17.34), tenemos lo siguiente:

$$\frac{dW}{dt} = -\mathcal{L}I\,\frac{dI}{dt}. \tag{17.36}$$

Integrando esta ecuación, encontramos que la energía necesaria de una fuente externa para obtener la fem en la autoinductancia mientras se forma la corriente* (la cual debe ser igual a la energía almacenada U) es

$$-W = U = \tfrac{1}{2}\mathcal{L}I^2. \tag{17.37}$$

Por lo tanto, la energía almacenada en una inductancia es $\frac{1}{2}\mathcal{L}I^2$.

Aplicando los mismos razonamientos a un par de bobinas como las de las figuras 17-8 o 17-9, podemos demostrar que la energía eléctrica total está dada por la siguiente ecuación:

$$U = \tfrac{1}{2}\mathcal{L}_1 I_1^2 + \tfrac{1}{2}\mathcal{L}_2 I_2^2 + \mathfrak{M}I_1 I_2. \tag{17.38}$$

Iniciando con $I = 0$ en ambas bobinas, primero podríamos conectar la corriente I_1 en la bobina, con $I_2 = 0$. El trabajo hecho es justamente $\frac{1}{2}\mathcal{L}_1 I_1^2$. Pero ahora al conectar I_2, no sólo se hace el trabajo $\frac{1}{2}\mathcal{L}_2^2$ contra la fem en el circuito 2, sino también una cantidad adicional $\mathfrak{M}I_1 I_2$, que es la integral de la fem $[\mathfrak{M}(dI_2/dt)]$ en el circuito 1 por la corriente I_1, ahora *constante*, en ese circuito.

Ahora supongan que queremos encontrar la fuerza entre dos bobinas cualesquiera transportando las corrientes I_1 e I_2. Sería de esperar a primera vista que podríamos usar el principio de los trabajos virtuales, tomando el cambio de energía de la ecuación (17.38). Por supuesto, debemos recordar que al cambiar las posiciones relativas de las bobinas, la única cantidad que varía es la inductancia mutua $\mathfrak{M}$. Entonces podríamos escribir la ecuación del trabajo virtual de la siguiente forma:

$$-F\,\Delta x = \Delta U = I_1 I_2\,\Delta\mathfrak{M} \quad \text{(erróneo)}.$$

Pero esta ecuación es incorrecta porque, como hemos visto antes, solamente incluye el cambio de energía en las dos bobinas y no el cambio de energía en las fuentes que están manteniendo las corrientes I_1 e I_2 en sus valores constantes. Ahora podemos comprender que estas fuentes deben proporcionar energía contra

* Olvidamos cualquier pérdida de calor producida por la corriente en la resistencia de la bobina. Tales pérdidas necesitan energía adicional de la fuente, pero no cambia la energía que entra en la inductancia.

la fem en las bobinas a medida que se mueven. Si queremos aplicar el principio de los trabajos virtuales correctamente, también debemos incluir estas energías. Como hemos visto, no obstante, podemos tomar un atajo y usar el principio de los trabajos virtuales recordando que la energía total es menos la que hemos llamado U_{mec}, la "energía mecánica". Por lo tanto, para la fuerza podemos escribir:

$$-F\,\Delta x = \Delta U_{\text{mec}} = -\Delta U. \tag{17.39}$$

Entonces la fuerza entre las dos bobinas está dada por

$$F\,\Delta x = I_1 I_2\,\Delta\mathfrak{M}.$$

La ecuación (17.38) para la energía de un sistema de dos bobinas se puede usar para demostrar que existe una desigualdad interesante entre la inductancia mutua $\mathfrak{M}$ y las autoinductancias $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ de las dos bobinas. Se sabe que la energía de las dos bobinas debe ser positiva. Si empezamos con corrientes cero en las bobinas y aumentamos estas corrientes a ciertos valores, hemos estado agregando energía al sistema. Si no, la corriente aumentaría espontáneamente con liberación de energía al resto del mundo —¡lo cual es inverosímil que ocurra!—. Ahora bien, nuestra ecuación de energía, ecuación (17.38), se puede escribir igualmente en la forma siguiente:

$$U = \frac{1}{2}\mathcal{L}_1\left(I_1 + \frac{\mathfrak{M}}{\mathcal{L}_1}\,I_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}_2 - \frac{\mathfrak{M}^2}{\mathcal{L}_1}\right)I_2^2. \tag{17.40}$$

Esto es sólo una transformación algebraica. Esta cantidad siempre debe ser positiva para cualquier valor de I_1 e I_2. En particular, debería ser positiva si I_2 tuviera el valor especial:

$$I_2 = -\frac{\mathcal{L}_1}{\mathfrak{M}}\,I_1. \tag{17.41}$$

Pero con esta corriente I_2, el primer término en la ecuación (17.40) es cero. Para que la energía sea positiva, el último término de (17.40) debe ser mayor que cero. Tenemos la exigencia de que

$$\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 > \mathfrak{M}^2.$$

Por lo tanto, hemos demostrado el resultado general de que la magnitud de la inductancia mutua $\mathfrak{M}$ de dos bobinas cualesquiera es necesariamente menor o igual a la media geométrica de las dos autoinductancias. ($\mathfrak{M}$ debe ser positiva o negativa, dependiendo de la convención de signo para las corrientes I_1 e I_2.)

$$|\mathfrak{M}| < \sqrt{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2}. \tag{17.42}$$

La relación entre $\mathfrak{M}$ y las autoinductancias generalmente se escribe de la siguiente forma:

$$\mathfrak{M} = k\sqrt{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2}. \tag{17.43}$$

La constante k se llama coeficiente de acoplamiento. Si la mayor parte del flujo de una bobina enlaza la otra bobina, el coeficiente de acoplamiento es cercano a uno; decimos que las bobinas están "estrechamente acopladas". Siempre y cuando las bobinas estén muy distantes o dispuestas de tal modo que existe un enlace de flujo mutuo muy pequeño, el coeficiente de acoplamiento es cercano a cero y la inductancia mutua es muy pequeña.

Para calcular la inductancia mutua de dos bobinas, hemos dado en la ecuación (17.30) una fórmula que es una doble integral de línea alrededor de los dos circuitos. Se podría pensar que se puede usar la misma fórmula para obtener la autoinductancia de una sola bobina efectuando ambas integrales de línea alrededor de la misma bobina. Pero esto no servirá porque el denominador r_{12} del integrando irá a cero cuando los dos elementos lineales $d\boldsymbol{s}_1$ y $d\boldsymbol{s}_2$ estén en el mismo punto de la bobina. La autoinductancia obtenida de esta fórmula es infinita. La razón es que esta fórmula es una aproximación que sólo es válida cuando la acción de los alambres de los dos circuitos es pequeña, comparada

con la distancia de un circuito al otro. Claramente esta aproximación no es válida para una sola bobina. En realidad, es cierto que la inductancia de una sola bobina tiende logarítmicamente a infinito a medida que el diámetro de su alambre se hace más y más pequeño.

Debemos buscar una forma diferente para calcular la autoinductancia de una sola bobina. Es necesario tomar en cuenta la distribución de la corriente dentro del alambre porque el tamaño del alambre es un parámetro importante. Por lo tanto, no debemos preguntar cuál es la inductancia de un "circuito" sino cuál es la inductancia de una *distribución* de conductores. Quizá, la manera más fácil de encontrar esta inductancia es haciendo uso de la energía magnética. Encontramos anteriormente, en la sección 15-3, una expresión para la energía magnética de una distribución de corrientes estacionarias:

$$U = \tfrac{1}{2}\int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}\,dV. \tag{17.44}$$

Si conocemos la distribución de la densidad de corriente $\boldsymbol{j}$, podemos calcular el potencial vectorial $\boldsymbol{A}$ y luego calcular la integral de la ecuación (17.44) para obtener la energía. Esta energía es igual a la energía magnética de la autoinductancia, $\frac{1}{2}\mathcal{L}I^2$. Igualando las dos nos da una fórmula para la inductancia:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{I^2}\int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{A}\,dV. \tag{17.45}$$

Por supuesto, es de esperar que la inductancia sea un número que solamente dependa de la geometría del circuito y no de la corriente I en el circuito. La fórmula de la ecuación (17.45) realmente dará tal resultado, porque la integral en esta ecuación es proporcional al cuadrado de la corriente —la corriente aparece una vez a través de $\boldsymbol{j}$ y otra a través del potencial vectorial $\boldsymbol{A}$—. La integral dividida entre I^2 dependerá de la geometría del circuito, pero no de la corriente I.

La ecuación (17.44) para la energía de una distribución de corriente se puede poner en una forma muy diferente que es algunas veces más conveniente para calcular. Además, como veremos más adelante, es una forma importante porque es de validez más general. En la ecuación de energía (17.44), ambos $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{j}$ se pueden relacionar con $\boldsymbol{B}$. De esta manera, podemos tener la esperanza de expresar la energía en términos del campo magnético —como fuimos capaces de relacionar la energía electrostática con el campo eléctrico—. Empezamos remplazando $\boldsymbol{j}$ por $\epsilon_0 c^2\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}$. No podemos remplazar $\boldsymbol{A}$ tan fácilmente, puesto que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ no puede ser invertido para obtener $\boldsymbol{A}$ en función de $\boldsymbol{B}$. De cualquier modo podemos escribir lo siguiente:

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2}\int (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{A}\,dV. \tag{17.46}$$

Lo interesante es que —con algunas restricciones— esta integral puede ser escrita de la siguiente forma:

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2}\int \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})\,dV. \tag{17.47}$$

Para ver esto, escribiremos en detalle un término típico. Supongan que tomamos el término $(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})_z A_z$ que aparece en la integral de la ecuación (17.46). Escribiendo explícitamente las componentes encontramos lo siguiente:

$$\int\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right)A_z\,dx\,dy\,dz.$$

(Por supuesto, hay dos integrales más de la misma clase.) Ahora integramos el primer término respecto a x —integrando por partes—. Esto es, podemos decir lo siguiente:

$$\int \frac{\partial B_y}{\partial x}\,A_z\,dx = B_y A_z - \int B_y\,\frac{\partial A_z}{\partial x}\,dx.$$

Supongan ahora que nuestro sistema —queremos decir las fuentes y los campos— es finito, así que a medida que nos alejamos a grandes distancias todos los campos tienden a cero. Entonces, si las integrales se efectúan sobre el espacio, al calcular el término B_yA_z en los límites dará cero. Hemos dejado solamente el término con $B_y(\partial A_z/\partial x)$, el cual evidentemente es una parte de $B_y(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})_y$ y, por lo tanto, de $\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})$. Si calculan los otros cinco términos, verán que la ecuación (17.47) es equivalente a la ecuación (17.46).

Pero ahora podemos remplazar $(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})$ por $\boldsymbol{B}$, para obtener

$$U=\frac{\epsilon_0c^2}{2}\int\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}\,dV. \tag{17.48}$$

Hemos expresado la energía de una situación magnetostática en términos del campo magnético solamente. La expresión corresponde estrechamente a la fórmula que encontramos para la energía electrostática:

$$U=\frac{\epsilon_0}{2}\int\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}\,dV. \tag{17.49}$$

Una razón para destacar estas dos fórmulas de la energía es que algunas veces son más convenientes de usar. Más importante aún, resulta que para campos dinámicos (cuando $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ están variando en el tiempo) las dos expresiones (17.48) y (17.49) siguen siendo válidas mientras que las otras fórmulas que hemos dado para energías eléctricas y magnéticas ya no son correctas —solamente valen para campos estáticos—.

Si conocemos el campo magnético $\boldsymbol{B}$ para una sola bobina, podemos encontrar la autoinductancia igualando la expresión (17.48) de la energía a $\frac{1}{2}\mathcal{L}I^2$. Veamos cómo funciona esto hallando la autoinductancia de un solenoide largo. Antes hemos visto que el campo magnético dentro de un solenoide es uniforme y $\boldsymbol{B}$ es cero fuera. La magnitud del campo interno es $B=nI/\epsilon_0c^2$, donde n es el número de vueltas por unidad de longitud en el devanado e I es la corriente. Si el radio de la bobina es r y su longitud es L (tomamos L muy larga, de modo que podemos despreciar los efectos de los extremos, es decir $L\gg r$), el volumen interno es πr^2L. La energía magnética es la siguiente:

$$U=\frac{\epsilon_0c^2}{2}\,B^2\cdot(\text{vol})=\frac{n^2I^2}{2\epsilon_0c^2}\,\pi r^2L,$$

lo cual es igual a $\frac{1}{2}\mathcal{L}I^2$. O sea

$$\mathcal{L}=\frac{\pi r^2n^2}{\epsilon_0c^2}\,L. \tag{17.50}$$

18

Las ecuaciones de Maxwell

18-1 Ecuaciones de Maxwell
18-2 Cómo trabaja el nuevo término
18-3 Toda la física clásica
18-4 Un campo viajero
18-5 La velocidad de la luz
18-6 Resolver las ecuaciones de Maxwell; los potenciales y la ecuación de onda

18-1 Ecuaciones de Maxwell

En este capítulo volvemos al conjunto completo de las cuatro ecuaciones de Maxwell que tomamos como punto de partida en el capítulo 1. Hasta ahora hemos estado estudiando las ecuaciones de Maxwell por partes y a trozos, pero es hora de que agreguemos la pieza final y las juntemos todas. Así tendremos la historia completa y correcta para campos electromagnéticos que pueden variar en el tiempo de cualquier manera. Todo lo que se diga en este capítulo, aunque contradiga algo dicho anteriormente, es verdad, y lo dicho antes es falso —porque se aplicaba a situaciones especiales, como corrientes estacionarias o cargas fijas—. Aunque tuvimos mucho cuidado en señalar las restricciones siempre que escribíamos una ecuación, es fácil olvidar todas las limitaciones y aprender bien las ecuaciones incorrectas. Ahora estamos en condiciones de decirles toda la verdad, sin limitaciones (o casi sin ninguna).

En la tabla 18-1 figuran las ecuaciones de Maxwell completas, tanto en palabras como en símbolos matemáticos. El que las palabras sean equivalentes a las ecuaciones, se cree que debería ser familiar a estas alturas —o sea, el poder traducir de una a otra forma—.

La primera ecuación —que la divergencia de $\boldsymbol{E}$ es la densidad de carga sobre ϵ_0— es válida en general. La ley de Gauss siempre es válida, tanto para campos dinámicos como para estáticos. El flujo de $\boldsymbol{E}$ a través de cualquier superficie cerrada es proporcional a la carga que hay dentro. La tercera ecuación es la correspondiente a la ley general para campos magnéticos. Como no hay cargas magnéticas, el flujo de $\boldsymbol{B}$ a través de cualquier superficie cerrada es siempre cero. La segunda ecuación, que el rotor de $\boldsymbol{E}$ es $-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$, es la ley de Faraday estudiada en los dos últimos capítulos. También es válida en general. Sin embargo, la última ecuación tiene algo nuevo. Anteriormente discutimos sólo la parte que vale para corrientes estacionarias. En ese caso dijimos que el rotor de $\boldsymbol{B}$ es $\boldsymbol{j}/\epsilon_0 c^2$ pero la ecuación general correcta tiene una parte nueva descubierta por Maxwell.

Hasta los trabajos de Maxwell, las leyes conocidas de la electricidad y el magnetismo eran las que estudiamos en los capítulos 3 a 17. En particular, la ecuación para el campo magnético de corrientes estacionarias se conocía únicamente en la forma

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0 c^2}. \tag{18.1}$$

Maxwell comenzó por considerar y expresar estas leyes conocidas en forma de ecuaciones diferenciales, como lo hemos hecho aquí. (Aunque la notación $\boldsymbol{\nabla}$ todavía no se había inventado, se debe principalmente a Maxwell que la importancia de las combinaciones de derivadas que actualmente llamamos rotor y divergencia, se hiciera aparente por primera vez.). Él observó que había algo extraño con la ecuación (18.1). Si uno toma la divergencia de esta ecuación, el primer miembro será cero porque la divergencia de un rotor siempre es cero. Por lo tanto, esta ecuación requiere que la divergencia de $\boldsymbol{j}$ también sea cero. Pero si la divergencia de $\boldsymbol{j}$ es cero, el flujo total de la corriente que sale de cualquier superficie cerrada también es cero.

El flujo de corriente proveniente de una superficie cerrada es la disminución de carga que hay dentro de la superficie. Ciertamente, esto no puede ser cero en general porque sabemos que se puede mover las cargas de un lugar a otro. La ecuación

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{18.2}$$

Tabla 18-1 Física clásica

Ecuaciones de Maxwell

I. $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\dfrac{\rho}{\epsilon_0}$ (Flujo de $\boldsymbol{E}$ a través de una superficie cerrada) = (Carga dentro)/ϵ_0

II. $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$ (Integral de línea de $\boldsymbol{E}$ alrededor de un lazo) $=-\dfrac{d}{dt}$(Flujo de $\boldsymbol{B}$ a través del lazo)

III. $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0$ (Flujo de $\boldsymbol{B}$ a través de una superficie cerrada) = 0

IV. $c^2\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\dfrac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0}+\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$ c^2(Integral de $\boldsymbol{B}$ alrededor de un lazo) = (Corriente a través del lazo)/ϵ_0 $+\dfrac{d}{dt}$(Flujo de $\boldsymbol{E}$ a través del lazo)

[Conservación de la carga

$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}=-\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$ (Flujo de corriente a través de una superficie cerrada) $=-\dfrac{d}{dt}$(Carga dentro)]

Ley de fuerza

$\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$

Ley de movimiento

$\dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{p})=\boldsymbol{F}$, donde $\boldsymbol{p}=\dfrac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ (Ley de Newton con la modificación de Einstein)

Gravitación

$\boldsymbol{F}=-G\,\dfrac{m_1m_2}{r^2}\,\boldsymbol{e}_r$

ha sido, en efecto, casi nuestra definición de $\boldsymbol{j}$. Esta ecuación expresa la ley fundamental de que la carga se conserva —cualquier flujo de carga debe venir de alguna fuente—. Maxwell se dio cuenta de esta dificultad y propuso que se evitara agregando el término $\partial\boldsymbol{E}/\partial t$ en el segundo miembro de la ecuación (18.1); así obtuvo la cuarta ecuación de la tabla 18-1:

$$\text{IV.}\qquad c^2\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0}+\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}.$$

En los tiempos de Maxwell aún no se acostumbraba a pensar en términos de campos abstractos. Maxwell discutió sus ideas en términos de un modelo en el cual el vacío era como un sólido elástico. Además trató de explicar el significado de su nueva ecuación en términos del modelo mecánico. Existía gran reticencia en aceptar su teoría, primero, a causa del modelo y, segundo, porque al principio no había justificación experimental.

Actualmente se entiende mejor que lo importante son las ecuaciones mismas y no el modelo utilizado para obtenerlas. Sólo se debe preguntar si las ecuaciones son verdaderas o falsas; esto se puede contestar mediante los experimentos, y un número incalculable de experimentos ha confirmado las ecuaciones de Maxwell. Si sacamos el andamiaje que usó para construirlo, encontramos que el hermoso edificio de Maxwell queda en pie. Él juntó todas las leyes de la electricidad y el magnetismo e hizo una teoría completa y hermosa.

Demostremos que el término adicional es precisamente lo que se necesita para salvar la dificultad que Maxwell descubrió. Tomando la divergencia de esta

ecuación (IV en la tabla 18-1), debemos obtener que la divergencia del segundo miembro es cero:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=0. \tag{18.3}$$

En el segundo término se puede invertir el orden de las derivadas respecto a las coordenadas y al tiempo, así que se puede volver a escribir la ecuación en la forma siguiente:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}+\epsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=0. \tag{18.4}$$

Pero la primera ecuación de Maxwell dice que divergencia de $\boldsymbol{E}$ es ρ/ϵ_0. Sustituyendo esta igualdad en la ecuación (18.4), obtenemos la ecuación (18.2) de vuelta, la cual sabemos que es verdadera. Inversamente, si aceptamos las ecuaciones de Maxwell —porque nunca nadie ha encontrado un experimento que esté en desacuerdo con ellas— tenemos que concluir que la carga siempre se conserva.

Las leyes de la física no tienen respuesta para la pregunta: ¿qué ocurre si repentinamente se crea una carga en este punto?, ¿qué efectos electromagnéticos se producen? No se puede dar ninguna respuesta porque nuestras ecuaciones dicen que no ocurre. Si *ocurriera*, necesitaríamos nuevas leyes, pero no podemos decir cuáles serían. No hemos tenido la oportunidad de observar cómo se comporta un mundo sin conservación de carga. Conforme a nuestras ecuaciones, si colocan de repente una carga en un punto, han tenido que llevarla allí desde alguna otra parte. En ese caso podemos decir lo que ocurriría.

Cuando agregamos un nuevo término a la ecuación para el rotor de $\boldsymbol{E}$, encontramos que toda una nueva clase de fenómenos quedaba descrita. Veremos que el pequeño agregado de Maxwell a la ecuación para $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}$ también tiene consecuencias de mucho alcance. En este capítulo sólo podemos tocar unas pocas.

18-2 Cómo trabaja el nuevo término

Como primer ejemplo consideramos lo que ocurre con una distribución radial de corrientes con simetría esférica. Supongan que imaginamos una pequeña esfera con material radiactivo sobre ella. Este material radiactivo suelta partículas cargadas como en chisguete; o bien, podríamos imaginar un gran bloque de gelatina* con un pequeño agujero en el centro en el que se ha inyectado carga con una aguja hipodérmica y del cual la carga se está filtrando lentamente. En cualquiera de los dos casos tenemos una corriente que se dirige radialmente hacia afuera en todo punto. Supondremos que tiene la misma magnitud en todas direcciones.

Sea $Q(r)$ la carga contenida dentro de cualquier radio r. Si la densidad de corriente radial en el mismo radio es $\boldsymbol{j}(r)$, la ecuación (18.2) exige que Q disminuya a razón de

$$\frac{\partial Q(r)}{\partial t}=-4\pi r^2 j(r). \tag{18.5}$$

Preguntamos ahora cuál es el campo magnético producido por las corrientes en esta situación. Supongan que dibujamos un lazo Γ sobre una esfera de radio r, como muestra la figura 18-1. Hay cierta corriente a través de este lazo, así que es de esperar que se encuentre un campo magnético circulando en la dirección mostrada.

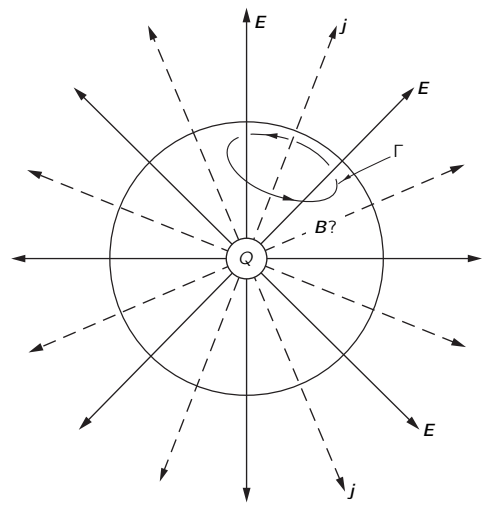


Figura 18-1. ¿Cuál es el campo magnético de una corriente con simetría esférica?

Pero ya estamos en dificultades. ¿Cómo puede tener $\boldsymbol{B}$ una dirección particular sobre la esfera? Una elección diferente Γ nos permitiría concluir que su dirección es exactamente opuesta a la mostrada. Así pues, ¿cómo *puede* haber circulación de $\boldsymbol{B}$ alrededor de las corrientes?

Estamos salvados gracias a las ecuaciones de Maxwell. La circulación de $\boldsymbol{B}$ no sólo depende de la *corriente* total a través de Γ, sino también de la derivada temporal del *flujo eléctrico* a través de él. Tiene que ser que esas dos partes se compensen exactamente. Veamos si esto funciona.

* N. del T.: la palabra que usa el autor (proveniente de la marca registrada "Jell-O") se usa para designar un postre de gelatina, por lo común del color y el sabor de alguna fruta.

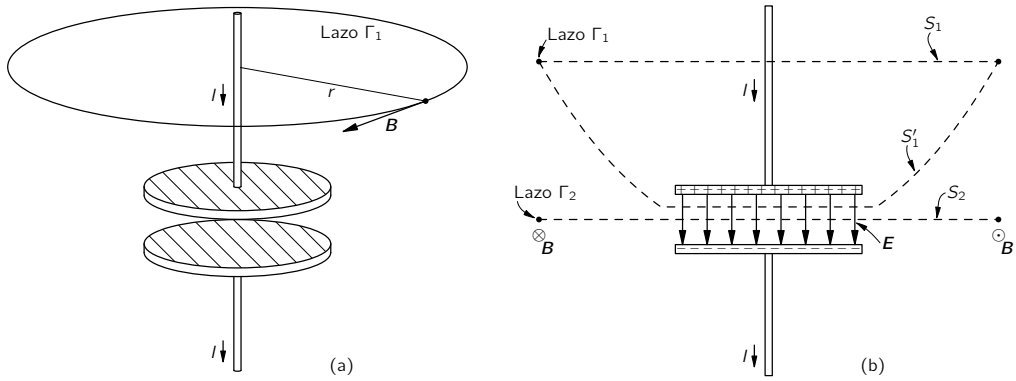


Figura 18-2. El campo magnético cerca de un capacitor que se está cargando.

El campo eléctrico en el radio r debe ser $Q(r)/4\pi\epsilon_0 r^2$ —en tanto la carga esté distribuida simétricamente, como suponemos—. Es radial y su derivada respecto al tiempo es entonces

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2}\,\frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{18.6}$$

Comparándola con la ecuación (18.5), vemos que para cualquier radio

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{j}{\epsilon_0}. \tag{18.7}$$

En la ecuación IV los dos términos de fuente se cancelan y el rotor de $\boldsymbol{B}$ siempre es cero. No hay campo magnético en nuestro ejemplo.

Como segundo ejemplo consideremos el campo magnético de un alambre utilizado para cargar un condensador de placas paralelas (véase figura 18-2). Siempre que la carga Q en las placas está variando en el tiempo (pero no demasiado rápido) la corriente en los alambres es igual a dQ/dt. Sería de esperar que esa corriente produjera un campo magnético rodeando el alambre. Con seguridad, cerca de la placa la corriente tiene que producir el campo magnético normal —no puede depender de adónde va la corriente—.

Supongan que tomamos un lazo Γ_1 que es una circunferencia de radio r, como muestra la parte (a) de la figura. La integral de línea del campo magnético debe ser igual a la corriente I dividida entre $\epsilon_0 c^2$. Tenemos lo siguiente:

$$2\pi r B = \frac{I}{\epsilon_0 c^2}. \tag{18.8}$$

Esto es lo que obtendríamos para una corriente estacionaria, pero también es correcto con el agregado de Maxwell, porque si consideramos la superficie plana S dentro de la circunferencia, no hay campos eléctricos sobre ella (suponiendo que el alambre es un conductor muy bueno). La integral de superficie de $\partial\boldsymbol{E}/\partial t$ es cero.

Supongan ahora, sin embargo, que movemos lentamente la curva hacia abajo. Obtenemos siempre el mismo resultado hasta casi rodear las placas del condensador. Luego la corriente I va a cero. ¿Desaparece el campo magnético? Sería muy extraño. Veamos lo que la ecuación de Maxwell dice para la curva Γ_2, que es una circunferencia de radio r cuyo plano pasa por las placas del condensador [figura 18-2(b)]. La integral de líneas de $\boldsymbol{B}$ alrededor de Γ_2 es $2\pi r B$. Esto debe ser igual a la derivada temporal del flujo de $\boldsymbol{E}$ a través de la superficie plana circular S_2. Sabemos por la ley de Gauss que este flujo de $\boldsymbol{E}$ debe ser igual a $1/\epsilon_0$ por la carga Q sobre una de las placas del condensador. Tenemos lo siguiente

$$c^2\, 2\pi r B = \frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{\epsilon_0}\right). \tag{18.9}$$

Esto es muy conveniente. Es el mismo resultado que encontramos en la ecuación (18.8). Integrar sobre el campo eléctrico variable da el mismo campo magnético que integrar sobre la corriente del alambre. Naturalmente, eso es justamente lo que dice la ecuación de Maxwell. Es fácil darse cuenta que siempre será así al aplicar los mismos razonamientos a las dos superficies S_1 y S_1', limitadas por la misma circunferencia Γ_1 en la figura 18-2(b). A través de S_1 hay corriente I pero no hay flujo eléctrico. A través de S_1', no hay corriente sino un flujo eléctrico que varía a razón de I/ϵ_0. Se obtiene el mismo $\boldsymbol{B}$ si usamos la ecuación IV con cualquiera de las dos superficies.

Por lo discutido hasta ahora sobre el nuevo término de Maxwell, puede que tengan la impresión de que éste no agrega mucho —que sólo hace que las ecuaciones concuerden con lo que es de esperar—. Es cierto que si sólo consideramos la ecuación IV *en sí misma*, no resulta nada nuevo. Sin embargo, las palabras *en sí misma* son de suma importancia. El pequeño cambio de Maxwell en la ecuación IV, *combinado con las otras* ecuaciones, produce por cierto muchas cosas nuevas e importantes. Sin embargo, antes de ocuparnos de esto queremos decir un poco más acerca de la tabla 18-1.

18-3 Toda la física clásica

Observemos que en la tabla 18-1 tenemos todo lo que se conocía de la física *clásica* fundamental, es decir, la física que se conocía antes de 1905. Toda ella está en esta tabla y por medio de sus ecuaciones podemos comprender el dominio completo de la física clásica.

Tenemos primero las ecuaciones de Maxwell —tanto en la forma desarrollada como en la forma matemática abreviada—. Luego está la conservación de la carga, que incluso está escrita entre paréntesis porque en el momento en que tenemos las ecuaciones de Maxwell completas, podemos deducir de ellas la conservación de la carga. Así pues, la tabla es hasta un poco redundante. A continuación hemos escrito la ley de fuerza, pues tener todos los campos eléctricos y magnéticos no nos dice nada hasta que sepamos qué es lo que le hacen a las cargas. Sin embargo, conociendo $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ podemos encontrar la fuerza sobre un objeto con una carga q moviéndose con velocidad $\boldsymbol{v}$. Finalmente, tener la fuerza no nos dice nada hasta que sepamos qué ocurre cuando una fuerza tira de algo y por ello necesitamos la ley de movimiento, que dice que la fuerza es igual a la derivada del momentum respecto al tiempo. (¿Recuerdan?, lo discutimos en el volumen I.) Incluimos hasta los efectos relativistas escribiendo el momentum como $\boldsymbol{p} = m_0\boldsymbol{v}/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

Y para completar, debemos agregar una ley más —la ley de gravitación de Newton—, así que la ponemos al final.

Por lo tanto, tenemos en una pequeña tabla todas las leyes fundamentales de la física clásica —y hasta nos queda espacio para escribirlas en palabras y con cierta redundancia—. ¡Éste es un gran momento! ¡Hemos escalonado un alto pico! Nos encontramos en la cima de K-2 —estamos casi listos para el Monte Everest, que es la mecánica cuántica—. Hemos escalonado el pico de una "Great Divide" y ahora podemos descender por el lado opuesto.

Fundamentalmente, nos hemos concentrado en la comprensión de las ecuaciones. Ahora que las tenemos todas juntas vamos a estudiar qué significan —qué cosas nuevas dicen que todavía no hemos visto—. Hemos trabajado duro para llegar a este punto. Ha sido un gran esfuerzo, pero ahora nos divertiremos deslizándonos cuesta abajo a medida que veamos todas las consecuencias de lo que hemos logrado.

18-4 Un campo viajero

Y enfrentémonos a las nuevas consecuencias. Provienen de reunir todas las ecuaciones de Maxwell. Veamos primero qué ocurriría en una circunstancia especialmente simple. Suponiendo que todas las cantidades varían únicamente en una coordenada, tendremos un problema unidimensional. La figura 18-3 muestra la situación. Tenemos una hoja de cargas ubicada en el plano yz. La hoja está

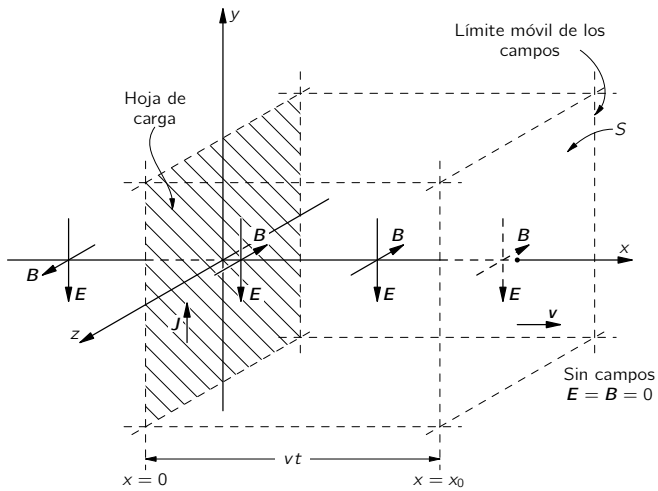


Figura 18-3. Una hoja infinita de carga se pone repentinamente en movimiento paralela a sí misma. Hay campos eléctricos y magnéticos que se propagan desde la hoja a velocidad constante.

inicialmente en reposo, luego se le da instantáneamente una velocidad u en la dirección y y se deja moviéndose a esta velocidad constante. Puede que les preocupe tener esa aceleración "infinita" pero, en realidad, no importa; imaginen simplemente que la velocidad u es llevada muy rápido. Por lo que, súbitamente tenemos una corriente superficial J (J es la corriente por unidad de ancho en la dirección z). Para que el problema se mantenga simple, suponemos que también hay una hoja en reposo de carga de signo opuesto superpuesta sobre el plano yz, así que no hay efectos electrostáticos. Además, aunque en la figura mostramos únicamente lo que está ocurriendo en una región finita, imaginamos que la hoja se extiende hasta el infinito en $\pm y$ y $\pm z$. En otras palabras, tenemos una situación en la que no hay corriente y luego hay repentinamente una hoja uniforme de corriente. ¿Qué ocurrirá?

Bueno, cuando hay una hoja de corriente en la dirección más y, se genera, como sabemos, un campo magnético que estará en la dirección menos z para $x > 0$ y en dirección opuesta para $x < 0$. Podríamos hallar la magnitud de $\boldsymbol{B}$ empleando el hecho de que la integral de línea del campo magnético será igual a la corriente sobre $\epsilon_0 c^2$. Obtendríamos que $B = J/2\epsilon_0 c^2$ (ya que la corriente I en una franja de ancho w es Jw y la integral de línea de $\boldsymbol{B}$ es $2Bw$).

Esto nos da el campo cerca de la hoja —para x pequeño— pero como estamos imaginando una hoja infinita, es de esperar que el mismo razonamiento dé el campo magnético más lejos para valores mayores de x. Sin embargo, eso significaría que en el instante en que conectamos la corriente, el campo magnético varía de repente de cero a un valor distinto de cero en todo punto. ¡Un momento! Si se varía el campo magnético de repente, se producirán efectos eléctricos tremendos. (Hay efectos eléctricos si varía de *cualquier* manera.) Así pues, porque se mueve la hoja de carga, se produce un campo magnético variable y, por lo tanto, se deben generar campos eléctricos. Si se generan campos eléctricos, tuvieron que comenzar en cero y variar hasta algún otro valor. Será cierto que $\partial \boldsymbol{E}/\partial t$ dará una contribución, junto con la corriente J, a la producción del campo magnético. Hay, pues, un entremezclado mayor a través de las diversas ecuaciones y tenemos que tratar de resolverlas a la vez para obtener los campos.

Examinando las ecuaciones de Maxwell únicamente, no es fácil ver directamente cómo obtener la solución. Por eso mostraremos primero cuál es la respuesta y luego verificaremos que verdaderamente satisface las ecuaciones. La respuesta es la siguiente: El campo $\boldsymbol{B}$ que calculamos se genera, en efecto, justo al lado de la hoja de corriente (para x pequeños). Debe ser así porque si hacemos un lazo menor alrededor de la hoja, no hay lugar para que ningún campo eléctrico lo atraviese. Pero el campo $\boldsymbol{B}$ más lejos —para x mayores— es cero al principio. Se queda en cero por unos instantes y luego se enciende de repente. En suma, conectamos la corriente y el campo magnético en su vecindad inmediata crece

hasta un valor constante $\boldsymbol{B}$; luego el crecimiento de $\boldsymbol{B}$ se extiende desde la región de la fuente. Después de cierto tiempo hay un campo magnético uniforme en todas partes hasta cierto valor de x y más allá no hay nada. Debido a la simetría, se extiende en ambas direcciones, más y menos x.

El campo $\boldsymbol{E}$ hace lo mismo. Antes de $t = 0$ (cuando conectamos la corriente), el campo es cero en todas partes. Luego, después de un tiempo t, tanto $\boldsymbol{E}$ como $\boldsymbol{B}$ son uniformes hasta una distancia $x = vt$ y cero en adelante. Los campos avanzan como una ola de marea, con un frente que se mueve a velocidad uniforme que resulta ser c, pero que por unos momentos la llamaremos simplemente v. La figura 18-4(a) muestra una gráfica de la magnitud de $\boldsymbol{E}$ o $\boldsymbol{B}$ en función de x, como aparece en el tiempo t. Considerando nuevamente la figura 18-3, vemos que al tiempo t la región entre $x = \pm vt$ está "llena" de los campos, pero que éstos todavía no han llegado más allá. Recalcamos de nuevo que estamos suponiendo que la hoja de corriente y, por lo tanto, los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$, se extienden hasta el infinito tanto en la dirección y como en la z. (No podemos dibujar una hoja infinita, así que hemos mostrado únicamente lo que ocurre en una región finita.)

Ahora queremos analizar cuantitativamente lo que está ocurriendo. Para hacerlo, queremos considerar dos cortes, uno visto de arriba mirando hacia abajo según el eje y, como muestra la figura 18-5, y una vista lateral mirando hacia atrás según el eje z, como muestra la figura 18-6. Supongan que empezamos con la vista lateral. Vemos la hoja cargada moviéndose; el campo magnético entra en la página con $+x$ y sale de la página con $-x$, y el campo eléctrico está hacia abajo en todas partes, hasta $x = \pm vt$.

Veamos si estos campos son compatibles con las ecuaciones de Maxwell. Dibujemos primero uno de esos lazos que usamos para calcular una integral de línea, digamos que el rectángulo Γ_2, mostrado en la figura 18-6. Ven que un lado del rectángulo está en la región donde hay campos, pero que un lado está en la región que los campos todavía no han alcanzado. Hay cierto flujo magnético a través de este lazo. Si está variando, debe haber una fem a su alrededor. Si el frente de onda se está moviendo, tendremos un flujo magnético variable, porque el área en la cual existe $\boldsymbol{B}$ está aumentando progresivamente con velocidad v. El flujo dentro de Γ_2 es B multiplicado por el área dentro de Γ_2 el cual tiene un campo magnético. Como la magnitud de $\boldsymbol{B}$ es constante, la derivada del flujo respecto al tiempo es la magnitud por la derivada del área respecto al tiempo. La derivada del área respecto al tiempo es fácil. Si L es el ancho del rectángulo Γ_2, el área donde existe $\boldsymbol{B}$ varía en $Lv\Delta t$ en el intervalo Δt. (Véase figura 18-6.) La derivada del flujo respecto al tiempo es entonces BLv. De acuerdo con la ley de Faraday, esto debe ser igual a menos la integral de línea de $\boldsymbol{E}$ alrededor de Γ_2, la cual es simplemente EL. Tenemos la siguiente ecuación:

$$E = vB. \tag{18.10}$$

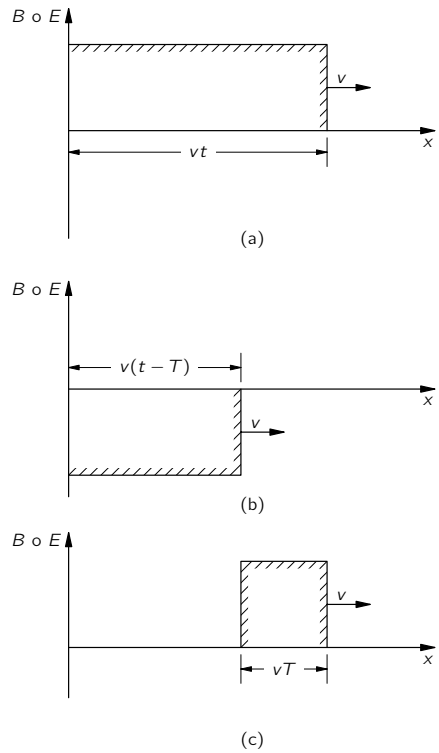


Figura 18-4. (a) El módulo de $\boldsymbol{B}$ (o $\boldsymbol{E}$) en función de x en el instante t después de que la hoja de carga se pone en movimiento. (b) Los campos de una hoja de carga puesta en movimiento en $t = T$ hacia y negativa. (c) La suma de (a) y (b).

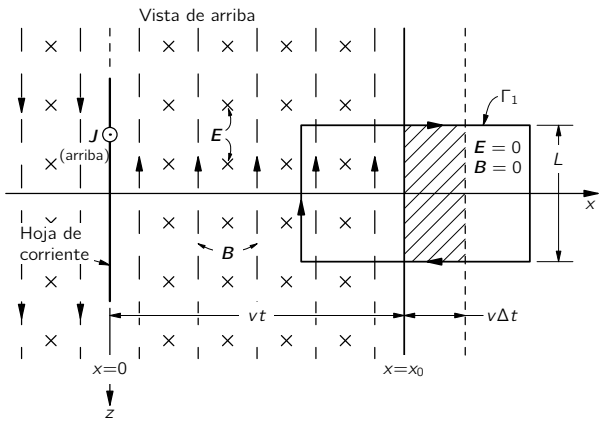


Figura 18-5. Vista de arriba de la figura 18-3.

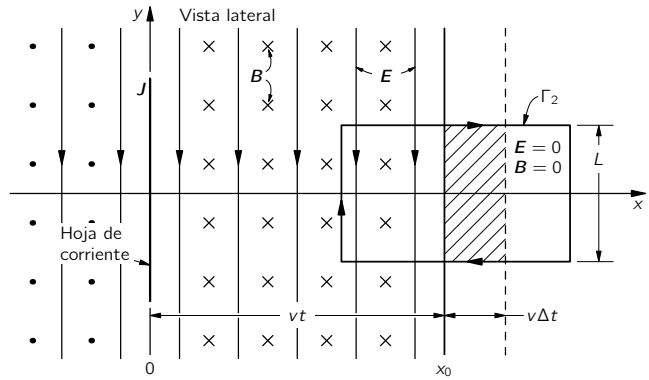


Figura 18-6. Vista lateral de la figura 18-3.

Luego, si el cociente entre E y B es v, los campos que hemos supuesto satisfarán la ecuación de Faraday.

Pero ésa no es la única ecuación; tenemos, además, la otra ecuación que relaciona $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$:

$$c^2\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0}+\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{18.11}$$

Para aplicar esta ecuación, consideremos la vista de arriba en la figura 18-5. Hemos visto que esta ecuación nos dará el valor de B cerca de la hoja de corriente. Además, para cualquier lazo dibujado fuera de la hoja pero detrás del frente de onda, no hay ni rotor de $\boldsymbol{B}$ ni ninguna $\boldsymbol{j}$ ni $\boldsymbol{E}$ variable, así que ahí la ecuación es correcta. Examinemos ahora lo que ocurre para la curva Γ_1 que intercepta el frente de onda, como muestra la figura 18-5. Aquí no hay corrientes, así que se puede escribir la ecuación (18.11) —en forma integral— como:

$$c^2\oint_{\Gamma_1}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s}=\frac{d}{dt}\int_{\text{dentro de }\Gamma_1}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\,da. \tag{18.12}$$

La integral de línea de $\boldsymbol{B}$ es simplemente B por L. La derivada del flujo de $\boldsymbol{E}$ respecto al tiempo se debe únicamente al frente de onda que avanza. El área dentro de Γ_1 donde $\boldsymbol{E}$ no es cero está aumentando a razón de vL. El segundo miembro de la ecuación (18.12) es entonces vLE. Esa ecuación se convierte en:

$$c^2B=Ev. \tag{18.13}$$

Tenemos una solución con un $\boldsymbol{B}$ constante y un $\boldsymbol{E}$ constante detrás del frente, y perpendiculares entre sí. Las ecuaciones de Maxwell especifican el cociente entre E y B. De las ecuaciones (18.10) y (18.13),

$$E=vB,\qquad\text{y}\qquad E=\frac{c^2}{v}\,B.$$

¡Un momento! Hemos encontrado *dos* condiciones *diferentes* sobre el cociente E/B. ¿Puede existir realmente un campo como el que describimos? Naturalmente, hay sólo una velocidad v para la cual ambas ecuaciones pueden ser válidas: $v=c$. El frente de onda debe viajar con la velocidad c. Tenemos un ejemplo en el que la influencia eléctrica de una corriente se propaga a cierta velocidad finita c.

Preguntemos ahora qué ocurre si detenemos repentinamente el movimiento de la hoja cargada después de que se ha estado desplazando durante un corto tiempo T. Podemos ver lo que ocurrirá por medio del principio de superposición. Teníamos una corriente que era cero y luego dejaba de serlo de repente. Conocemos la solución para este caso. Ahora vamos a agregar otro conjunto de campos. Tomamos otra hoja cargada y la empezamos a mover de repente en la dirección opuesta con la misma velocidad, sólo que un tiempo T después de que comenzamos la primera corriente. La corriente total de las dos juntas es primero cero, luego se prenden durante un tiempo T, luego se apaga de nuevo —porque las dos corrientes se compensan—. Tenemos un "pulso" cuadrado de corriente.

Además, la nueva corriente negativa produce los mismos campos que la positiva, sólo que con todos los signos invertidos y, por supuesto, retardados un intervalo T en el tiempo. De nuevo, un frente de onda viaja a la velocidad c. Al tiempo t ha cubierto la distancia $x=\pm c(t-T)$, como muestra la figura 18-4(b). Así pues, tenemos dos "bloques" de campo marchando a velocidad c, como en las partes (a) y (b) de la figura 18-4. Los campos combinados son como muestra la parte (c) de la figura. Los campos son cero para $x>ct$, son constantes (con los valores que encontramos antes) entre $x=c(t-T)$ y $x=ct$, y nuevamente cero para $x<c(t-T)$.

En resumen, tenemos un pequeño pedazo de campo —un bloque de espesor cT— que ha dejado la hoja corriente y está viajando por sí mismo a través del espacio. Los campos han "despegado"; se están propagando libremente a través

del espacio, totalmente desconectados ya de la fuente. ¡La oruga se ha convertido en mariposa!

¿Cómo puede este manojo de campos eléctricos y magnéticos mantenerse? La respuesta es: por los efectos combinados de la ley de Faraday, $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\partial\boldsymbol{B}/\partial t$, y de nuevo el término de Maxwell, $c^2\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \partial\boldsymbol{E}/\partial t$. No pueden evitar mantenerse. Supongan que desapareciera el campo magnético. Habría un campo magnético variable que produciría un campo eléctrico. Si este campo eléctrico tratara de irse, el campo eléctrico variable crearía nuevamente un campo magnético. Así, por un intercambio perpetuo —por un latiguear de un campo al otro— deben continuar eternamente. Es imposible que desaparezcan.* Se mantienen en una especie de danza —uno produciendo el otro, el segundo produciendo el primero— avanzando por el espacio.

18-5 La velocidad de la luz

Tenemos una onda que deja la fuente material y sale a velocidad c, que es la velocidad de la luz. Pero regresemos por un momento. Desde el punto de vista histórico, no se sabía que el coeficiente c en las ecuaciones de Maxwell era también la velocidad de propagación de la luz. Había simplemente una constante en las ecuaciones. La hemos llamado c desde el principio porque sabíamos qué es lo que iba a ser. No pensamos que fuera sensato hacerles aprender las fórmulas con una constante diferente y luego volver atrás para sustituir c en donde correspondiera. No obstante, desde el punto de vista de la electricidad y el magnetismo, empezamos con dos constantes, ϵ_0 y c^2, que aparecen en las ecuaciones de la electrostática y de la magnetostática:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{18.14}$$

y

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0 c^2}. \tag{18.15}$$

Si tomamos cualquier definición *arbitraria* de la unidad de carga, podemos determinar experimentalmente la constante ϵ_0 necesaria en la ecuación (18.14) —digamos que midiendo la fuerza entre dos cargas unitarias en reposo, empleando la ley de Coulomb—. También tenemos que determinar experimentalmente la constante $\epsilon_0 c^2$ que aparece en la ecuación (18.15), lo cual podemos hacer, por ejemplo, midiendo la fuerza entre dos corrientes unitarias. (Una corriente unitaria significa una unidad de carga por segundo.) El cociente entre estas dos constantes experimentales es c^2 —simplemente otra "constante electromagnética"—.

Observen que esta constante c^2 es la misma, cualquiera que sea la unidad de carga que elijamos. Siempre y cuando pongamos el doble de "carga" —duplicamos el número de cargas protónicas— digamos en nuestra "unidad" de carga, ϵ_0 tendría que ser un cuarto de grande. Cuando pasamos dos de estas "unidades" de corriente por dos alambres, hay el doble de "carga" por segundo en cada alambre, de modo que la fuerza es cuatro veces mayor. La constante $\epsilon_0 c^2$ se tiene que reducir cuatro veces. Pero el cociente $\epsilon_0 c^2/\epsilon_0$ no cambia.

Así pues, por medio de experimentos con cargas y corrientes únicamente encontramos un número c^2 que resulta ser el cuadrado de la velocidad de propagación de las influencias electromagnéticas. A partir de medidas estáticas —midiendo las fuerzas entre dos cargas unitarias y entre dos corrientes unitarias— encontramos que $c = 3.00\times10^8$ metros/segundo. Cuando Maxwell hizo por primera vez este cálculo con sus ecuaciones, dijo que manojos de campos eléctricos y magnéticos se debían propagar a esta velocidad. También recalcó la misteriosa coincidencia de que fuera igual a la velocidad de la luz. "Apenas si podemos evitar la inferencia",

* En realidad, no tanto. Pueden ser "absorbidos" si entran en una región donde hay cargas. Con esto queremos significar que se pueden producir otros campos en alguna parte, los cuales se superponen a estos campos y los "cancelan" por interferencia destructiva (véase capítulo 31 del volumen 1).

dijo Maxwell, "de que la luz consiste en ondulaciones transversales del mismo medio que es la causa de los fenómenos eléctricos y magnéticos".

Maxwell había hecho una de las grandes unificaciones de la física. Antes de su época había luz y había electricidad y magnetismo. Los dos últimos habían sido unificados por el trabajo experimental de Faraday, Oersted y Ampère. Entonces, de repente, la luz ya no fue "algo más" sino únicamente electricidad y magnetismo en esta forma nueva —pequeños pedazos de campos eléctricos y magnéticos que se propagan a través del espacio por sí mismos—.

Les hemos llamado la atención sobre algunas características de esta solución especial que, sin embargo, son válidas para *cualquier* onda electromagnética, o sea, que el campo magnético es perpendicular a la dirección de movimiento del frente de onda; que el campo eléctrico es también perpendicular a la dirección de movimiento del frente de onda, y que los dos vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ son perpendiculares entre sí. Más aún, la magnitud E del campo eléctrico es igual a c por el módulo B del campo magnético. Estos tres hechos —que los dos campos son transversales a la dirección de propagación, que $\boldsymbol{B}$ es perpendicular a $\boldsymbol{E}$ y que $E = cB$— son válidos en general, para cualquier onda electromagnética. Nuestro caso especial es aceptable: muestra las principales características de las ondas electromagnéticas.

18-6 Resolver las ecuaciones de Maxwell; los potenciales y la ecuación de onda

Pasamos, ahora, a una parte matemática: escribir las ecuaciones de Maxwell en una forma más simple. Puede que consideren que las estamos complicando, pero si tienen un poco de paciencia, se darán cuenta cuán simples son. Aunque ustedes están familiarizados con las ecuaciones de Maxwell, hay muchas piezas que se deben juntar y esto es lo que nos proponemos hacer.

Comenzamos con $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ —la más simple de las ecuaciones—. Sabemos que implica que $\boldsymbol{B}$ es el rotor de algo. Así pues, si escribimos lo siguiente:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}, \tag{18.16}$$

ya hemos resuelto una de las ecuaciones de Maxwell. (Naturalmente, se dan cuenta que sigue siendo válido que otro vector $\boldsymbol{A}'$ sería igualmente bueno si $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\psi$ —donde ψ es cualquier campo escalar— porque el rotor de $\boldsymbol{\nabla}\psi$ es cero y $\boldsymbol{B}$ sigue siendo el mismo. Sobre esto hablamos anteriormente.)

Tomamos luego la ley de Faraday, $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\partial\boldsymbol{B}/\partial t$, porque en ella no intervienen ni corrientes ni cargas. Si escribimos $\boldsymbol{B}$ como $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$ y derivamos respecto a t, podemos escribir la ley de Faraday en la forma siguiente:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\,\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}.$$

Como podemos derivar primero tanto respecto al tiempo como respecto al espacio, también podemos escribir esta ecuación de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = 0. \tag{18.17}$$

Vemos que $\boldsymbol{E} + \partial\boldsymbol{A}/\partial t$ es un vector cuyo rotor es igual a cero. Por lo tanto, ese vector es el gradiente de algo. Cuando trabajábamos con la electrostática, teníamos $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$ y decidimos, entonces, que $\boldsymbol{E}$ era el gradiente de algo. Lo tomamos igual al gradiente de $-\phi$ (el menos es por conveniencia técnica). Hagamos lo mismo para $\boldsymbol{E} + \partial\boldsymbol{A}/\partial t$; podemos escribir,

$$\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\phi. \tag{18.18}$$

Usamos el mismo símbolo ϕ de modo que en el caso electrostático, donde nada varía en el tiempo y el término $\partial\boldsymbol{A}/\partial t$ desaparece, $\boldsymbol{E}$ sea nuestro antiguo $-\boldsymbol{\nabla}\phi$. Así pues, se puede poner la ecuación de Faraday en la forma:

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}. \tag{18.19}$$

Ya hemos resuelto dos de las ecuaciones de Maxwell y hemos encontrado que para describir los campos electromagnéticos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$, necesitamos cuatro funciones potenciales: un potencial escalar ϕ y un potencial vectorial $\boldsymbol{A}$ que es, naturalmente, tres funciones.

Ahora que $\boldsymbol{A}$ determina parte de $\boldsymbol{E}$ además de $\boldsymbol{B}$, ¿qué ocurre cuando cambiamos de $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\psi$? En general, $\boldsymbol{E}$ cambiaría si no tomáramos una precaución especial. En efecto, podemos seguir permitiendo que $\boldsymbol{A}$ cambie de esta manera sin afectar los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ —es decir, sin cambiar lo físico— si cambiamos siempre $\boldsymbol{A}$ y ϕ *juntos* conforme a las reglas

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{\nabla}\psi, \qquad \phi' = \phi - \frac{\partial\psi}{\partial t}. \tag{18.20}$$

Entonces no cambia ni $\boldsymbol{B}$ ni $\boldsymbol{E}$, obtenidos de la ecuación (18.19).

Anteriormente escogimos $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = 0$ para que las ecuaciones de la estática fueran más simples. Ahora haremos una elección diferente. Sin embargo, esperaremos un poco antes de decir cuál es; más tarde se aclarará *por qué* se ha hecho dicha elección.

Volvamos a las dos ecuaciones restantes de Maxwell que nos darán relaciones entre los potenciales y las fuentes ρ y $\boldsymbol{j}$. Una vez que podamos determinar $\boldsymbol{A}$ y ϕ de las corrientes y las cargas, siempre podemos obtener $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ de las ecuaciones (18.16) y (18.19), así que tendremos otra forma de las ecuaciones de Maxwell.

Comenzamos sustituyendo la ecuación (18.19) en $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$, obteniendo:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(-\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

la cual podemos escribir también en la forma

$$-\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{18.21}$$

Ésta es una ecuación que relaciona ϕ y $\boldsymbol{A}$ con las fuentes.

Nuestra ecuación final será la más complicada. Comenzamos volviendo a escribir la cuarta ecuación de Maxwell en la forma

$$c^2\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} - \frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0},$$

y expresamos luego $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{E}$ en términos de los potenciales, usando las ecuaciones (18.16) y (18.19) tenemos lo siguiente:

$$c^2\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) - \frac{\partial}{\partial t}\left(-\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0}.$$

Se puede transformar el primer término utilizando la identidad algebraica de la siguiente manera: $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) - \nabla^2\boldsymbol{A}$; obtenemos:

$$-c^2\nabla^2\boldsymbol{A} + c^2\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}) + \frac{\partial}{\partial t}\,\boldsymbol{\nabla}\phi + \frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0}. \tag{18.22}$$

¡No es muy simple que digamos!

Afortunadamente, ahora podemos hacer uso de nuestra libertad de elegir arbitrariamente la divergencia de $\boldsymbol{A}$. Se trata de usar nuestra elección de modo que las ecuaciones para $\boldsymbol{A}$ y ϕ se separen, pero tengan la misma forma. Podemos hacerlo tomando*

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = -\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial\phi}{\partial t}. \tag{18.23}$$

Si hacemos esto, los dos términos centrales en $\boldsymbol{A}$ y ϕ de la ecuación (18.22) se simplifican y esa ecuación se hace mucho más simple:

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0 c^2}. \tag{18.24}$$

* Elegir $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}$ se llama "elegir una medida". Cambiar $\boldsymbol{A}$ agregando $\boldsymbol{\nabla}\psi$ se llama "transformación de medida". La ecuación (18.23) se llama "medida de Lorenz".

Y nuestra ecuación para ϕ —la ecuación (18.21)— asume la misma forma:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{18.25}$$

¡Qué hermoso conjunto de ecuaciones! Son hermosas, primero porque se separan limpiamente —con la densidad de carga va ϕ; con la corriente va $\boldsymbol{A}$—. Más aún, aunque el lado izquierdo parece un poco divertido —un laplaciano junto con una $\partial^2/\partial t^2$— cuando lo desarrollamos vemos:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{18.26}$$

Tiene una linda simetría en x, y, z, t —siendo necesario el $-1/c^2$ porque, naturalmente, el tiempo y el espacio *son* diferentes; tienen unidades diferentes—.

Las ecuaciones de Maxwell nos han llevado a una nueva clase de ecuación para los potenciales ϕ y $\boldsymbol{A}$, pero a la misma forma matemática para las cuatro funciones ϕ, A_x, A_y y A_z. Tan pronto sabemos resolver estas ecuaciones podemos obtener $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{E}$ de $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ y $-\boldsymbol{\nabla}\phi - \partial\boldsymbol{A}/\partial t$. Tenemos otra forma de las leyes electromagnéticas exactamente equivalente a las ecuaciones de Maxwell y en muchas ocasiones más fáciles de usar.

De hecho, ya hemos resuelto una ecuación muy parecida a la ecuación (18.26). Al estudiar el sonido en el capítulo 47 del volumen I, tuvimos una ecuación de la siguiente forma:

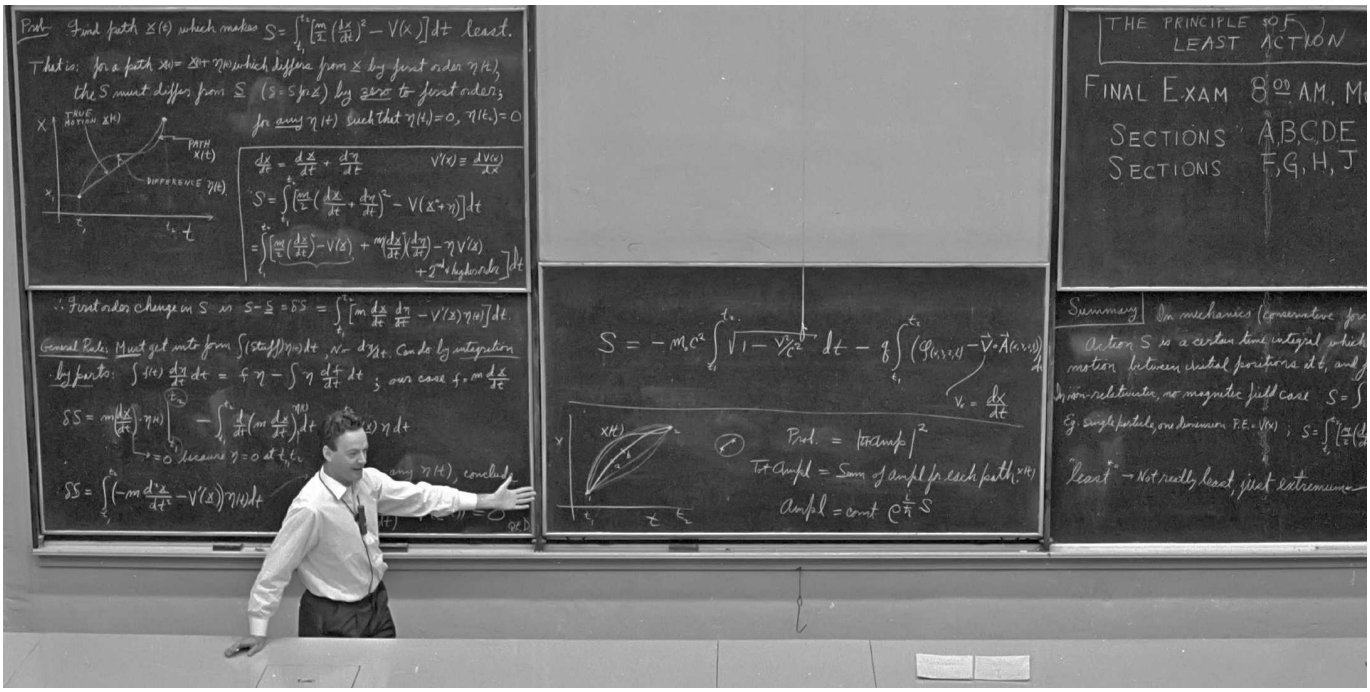
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2},$$

y vimos que describía la propagación de ondas en la dirección x a la velocidad c. La ecuación (18.26) es la correspondiente ecuación de onda para tres dimensiones. Así pues, en las regiones donde ya no hay ni corrientes ni cargas, la solución de estas ecuaciones *no* es que ϕ y $\boldsymbol{A}$ son cero. (Aunque ésta es, por cierto, una solución posible.) Hay soluciones con un conjunto de ϕ y $\boldsymbol{A}$ que están variando en el tiempo, pero siempre moviéndose a velocidad c. Los campos avanzan por el espacio libre, como en nuestro ejemplo al principio del capítulo.

Con el nuevo término de Maxwell en la ecuación IV, hemos podido escribir las ecuaciones de campo en términos de $\boldsymbol{A}$ y ϕ en una forma que es simple y que hace inmediatamente aparente que hay ondas electromagnéticas. Para muchos fines prácticos, todavía será conveniente usar las ecuaciones originales en términos de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$. Pero están del otro lado de la montaña que acabamos de escalar. Ahora estamos listos para cruzar la otra ladera del pico. La visión será diferente —estamos listos para unas nuevas y hermosas vistas—.

19

El principio de mínima acción



19-1 Clase especial —prácticamente palabra por palabra—*

"Cuando estaba en el bachillerato mi profesor de física —cuyo apellido era Bader— me llamó un día después de clase y me dijo: 'Usted parece aburrido; quiero contarle algo interesante'. Y me contó algo que me resultó completamente fascinante y que nunca ha dejado de fascinarme. Cada vez que el problema surge, trabajo en él. De hecho, cuando comencé a preparar esta clase me encontré realizando más análisis sobre el asunto. Y en vez de preocuparme por la clase me vi envuelto en un nuevo problema. El tema es éste —el principio de mínima acción—.

"Bader me dijo lo siguiente: Suponga que tiene una partícula (en un campo gravitatorio, por ejemplo) que parte desde un cierto lugar y se mueve libremente hasta algún otro punto —lanza la partícula, y ella sube y baja—.

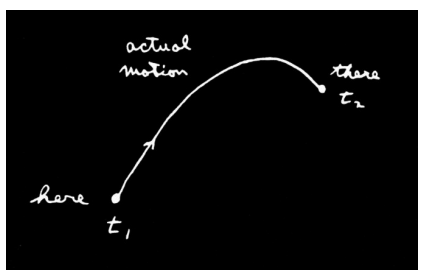
Realiza el recorrido desde el punto original hasta el final en un cierto tiempo. Ahora intente un movimiento diferente. Suponga que para ir desde aquí hasta allí, la partícula lo hiciera así

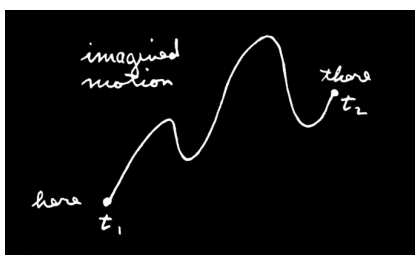
pero que llegara hasta allí exactamente en el mismo tiempo. Y entonces dijo: Si calcula la energía cinética en cada instante de la trayectoria, le resta la energía potencial e integra respecto al tiempo sobre la trayectoria recorrida, encontrará que el valor obtenido es *mayor* que para el movimiento real.

"En otras palabras, la ley de Newton podría enunciarse no en la forma $F = ma$ sino en la forma: la energía cinética media menos la energía potencial media es tan pequeña como sea posible para la trayectoria de un objeto que va desde un punto hasta otro.

19-1 Clase especial —prácticamente palabra por palabra—

19-2 Nota agregada después de la clase

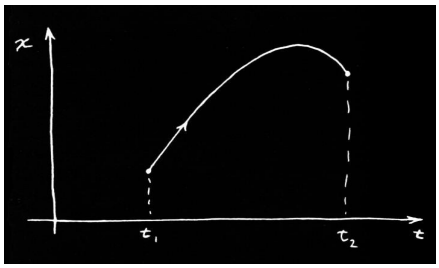




t_1 Aquí / Movimiento real / Allá t_2

t_1 Aquí / Movimiento imaginario / Allá t_2

* Los capítulos siguientes no dependen del contenido de esta clase especial —cuya intención es "entretener"—.

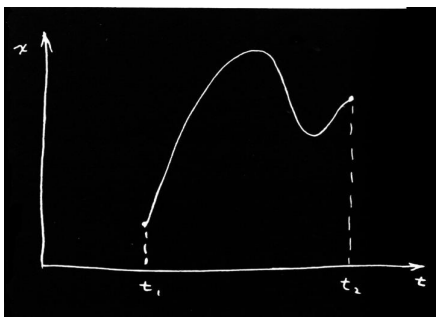


"Déjeme ilustrarle un poco mejor lo que esto significa. Si toma el caso del campo gravitatorio y si la partícula tiene la trayectoria $x(t)$ (por el momento consideraremos el caso de una sola dimensión; tomamos una trayectoria que va hacia arriba y hacia abajo pero no hacia los costados) donde x es la altura sobre el suelo, la energía cinética es $\frac{1}{2}m(dx/dt)^2$ y la energía potencial en cada instante es mgx. Ahora tomo la energía cinética menos la potencial en cada instante a lo largo de la trayectoria e integro respecto al tiempo desde el instante inicial hasta el final. Supongamos que en el instante inicial t_1 partimos de una cierta altura y que en el instante final t_2 llegamos decididamente a otro lugar.

"Entonces la integral es

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - mgx\right]dt.$$

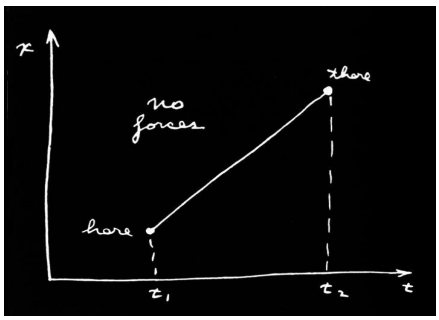
El movimiento real sigue alguna clase de curva —es una parábola si la representamos con relación al tiempo— y da un cierto valor de la integral. Pero podemos *imaginar* algún otro tipo de movimiento que suba y baje de alguna manera peculiar.



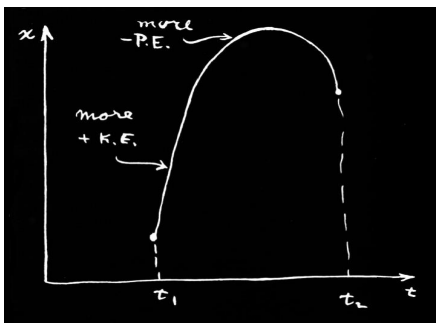
Podemos calcular la energía cinética menos la potencial e integrar para esa trayectoria... o para cualquier otra que deseemos. Lo milagroso es que la trayectoria verdadera es aquella para la cual la integral es mínima.

"Intentémoslo. Primero supongamos que tomamos el caso de una partícula libre que no tenga ninguna energía potencial. Según la regla, cuando va de un punto a otro en un tiempo dado, la integral de la energía cinética es mínima y entonces debe avanzar a una velocidad uniforme. (Sabemos que ésta es la respuesta correcta —ir en un movimiento uniforme—.) ¿Por qué es así? Porque si la partícula realizara otro tipo de movimiento, las velocidades serían a veces mayores y a veces menores que la velocidad media. La velocidad media es la misma en todos los casos porque la partícula debe ir desde 'aquí' hasta 'allí' en un tiempo dado.

"Como ejemplo digamos que usted debe ir en automóvil desde su casa hasta la escuela en un tiempo dado. Puede hacerlo de diferentes maneras: puede acelerar como loco al principio y disminuir luego la velocidad cuando está llegando o puede ir con velocidad uniforme, o puede retroceder y luego avanzar y, así, sucesivamente. El hecho es que la velocidad media debe ser evidentemente la distancia total recorrida dividida entre el tiempo. Si hace cualquier cosa, excepto ir a velocidad uniforme, deberá a veces ir más rápido y a veces más lento. Ahora bien, el promedio del *cuadrado* de algo que se desvía de un valor medio, como se sabe, es siempre mayor que el cuadrado del promedio; así pues, la integral de la energía cinética deberá ser siempre mayor si marcha a velocidad irregular que si lo hace a velocidad uniforme. Vemos así que la integral es mínima si la velocidad es constante (cuando no hay fuerzas). La trayectoria correcta es así.



"Ahora bien, un objeto lanzado hacia lo alto en un campo gravitatorio se eleva primero rápidamente y luego va más lentamente. Esto se debe a que también hay energía potencial, y debemos tener un mínimo para la *diferencia* entre las energías cinéticas y potencial medias. Como la energía potencial crece a medida que subimos en el espacio, tendremos una *diferencia* menor si podemos llegar lo más pronto posible hasta donde hay una energía potencial alta. Entonces podemos quitar ese potencial de la energía cinética y obtener un promedio menor. Así pues, es mejor tomar un camino que suba y obtener un montón de cantidad negativa de la energía potencial.



"Por otra parte, no puede subir ni demasiado rápido, ni demasiado alto porque entonces utilizará demasiada energía cinética —tiene que andar muy rápido para subir y bajar en el tiempo fijo disponible—. Así que no quiere subir demasiado alto, pero quiere subir un poco. Vemos, así, que la solución es una especie de

Aquí / Ninguna perdida / Allá.
Más + EC / más EP.

balance que consiste en tratar de adquirir una mayor energía potencial con el mínimo de energía cinética adicional —tratar de que la diferencia, cinética menos potencial, sea lo más pequeña posible—.

"Esto es todo lo que me dijo mi profesor, porque era muy buen profesor y sabía cuándo debía dejar de hablar. Pero yo no sé cuándo debo dejar de hablar. Entonces, en lugar de dejar esto como comentario interesante los voy a horrorizar y a disgustar con las complejidades de la vida demostrando que es así. La clase de problema matemático que tendremos es muy difícil y de un nuevo tipo. Tenemos una cierta cantidad llamada *acción*, S. Es la diferencia entre la energía cinética y la potencial, integrada respecto al tiempo.

$$\text{Acción} = S = \int_{t_1}^{t_2} (\text{EC} - \text{EP})\, dt.$$

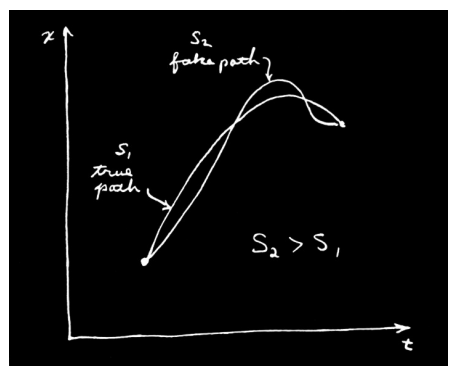
Recuerden que EP y EC son funciones del tiempo. Para cada trayectoria posible distinto obtendrán un número diferente para esta acción. Nuestro problema matemático es encontrar la curva para la cual este valor es mínimo.

"Ustedes dirán: Ah, esto es simplemente el cálculo ordinario de máximos y mínimos. Calcula la acción y luego deriva para encontrar el mínimo.

"Pero, ¡mucho cuidado! Comúnmente partimos de una función de una cierta variable, y debemos encontrar el valor de esta *variable* para la cual la función es mínima o máxima. Por ejemplo, tenemos una varilla que ha sido calentada en el medio y el calor se propaga. Para cada punto de la varilla tenemos una temperatura y debemos encontrar el punto en el cual la temperatura es mayor. Pero ahora para *cada camino en el espacio* tenemos un número —algo completamente diferente— y debemos encontrar *el camino en el espacio* para el cual el número es un mínimo. Ésta es una rama de la matemática completamente diferente. No es el cálculo diferencial ordinario. De hecho, se le llama *cálculo de variaciones*.

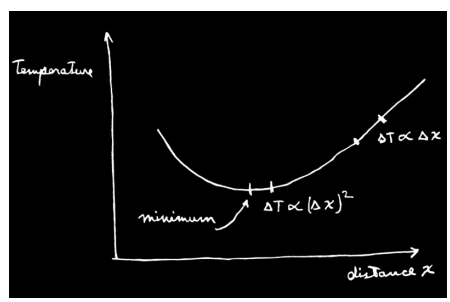
"Hay muchos problemas en esta clase de matemáticas. Por ejemplo, la circunferencia comúnmente se define como el lugar geométrico de todos los puntos que están a una distancia constante de un punto fijo, pero otra forma de definir una circunferencia es ésta: circunferencia es aquella curva *de longitud dada* que encierra la mayor superficie posible. Cualquier otra curva encierra menor superficie para un perímetro dado, que la circunferencia. Así pues, si planteamos el problema: hallar la curva que encierre la mayor superficie para un perímetro dado, tendremos un problema de cálculo de variaciones —un cálculo diferencial diferente de aquél al que están habituados—.

"Realicemos pues el cálculo de la trayectoria de un objeto. Ésta es la forma en que lo haremos. La idea fundamental es que imaginamos que hay una trayectoria verdadera y que cualquier otra curva que dibujemos es una trayectoria falsa, de manera que si calculamos la acción para la trayectoria falsa obtenemos un valor que es mayor que si calculamos la acción para la trayectoria verdadera.



"Problema: Hallar la trayectoria verdadera. ¿Dónde está? Una forma es, por supuesto, calcular la acción para millones de trayectorias y ver cuál es la más baja. Cuando encuentren la más baja, ésa es la trayectoria verdadera.

"Éste es un método posible. Pero podemos hacerlo mejor. Cuando tenemos una cantidad que tiene un mínimo —por ejemplo, en una función ordinaria como la temperatura—, una de las propiedades del mínimo es que, si nos apartamos de él en una cantidad de *primer* orden, la desviación de la función respecto a su valor mínimo es solamente de *segundo* orden. En cualquier otro lugar sobre la curva, si nos apartamos una pequeña distancia, el valor de la función cambia también en una cantidad de primer orden. Pero en el mínimo un pequeño apartamiento no produce, en la primera aproximación, ninguna diferencia.

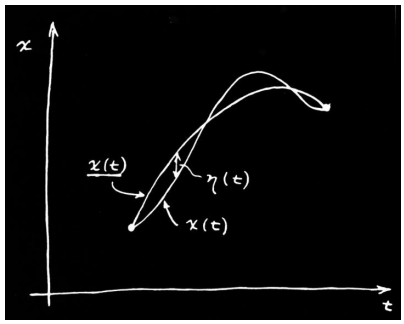


"Esto es lo que vamos a usar en el cálculo de la trayectoria verdadera. Si tenemos una trayectoria verdadera, una curva que difiera de ella sólo un poco no producirá, en primera aproximación, ninguna diferencia en la acción. Si realmente tenemos un mínimo cualquier diferencia será en segunda aproximación.

"Esto es fácil de demostrar. Si hay un cambio en el primer orden cuando me desvío de la curva en cierta forma, hay un cambio en la acción que es *proporcional*

S_1 Camino verdadero / S_2 Camino falso
Temperatura / Mínima / Distancia x

a la desviación. El cambio implica un aumento de la acción; en caso contrario no tenemos un mínimo. Pero entonces si el cambio es *proporcional* a la desviación, cambiando el signo de la desviación haremos la acción menor. Podríamos lograr que la acción aumentara o disminuyera según el signo del apartamiento. La única posibilidad para que la acción sea realmente un mínimo, es que no varíe en *primera* aproximación, que el cambio sea proporcional al cuadrado de la desviación respecto a la trayectoria verdadera.



"Así pues, trabajamos de esta manera: llamemos $\underline{x(t)}$ (subrayado) a la trayectoria verdadera —la que estamos buscando—. Tomamos alguna trayectoria de prueba $x(t)$ que difiere de la trayectoria verdadera en una pequeña cantidad que llamaremos $\eta(t)$ (eta de t).

"Así, la idea es que si calculamos la acción S para el camino $x(t)$ entonces la diferencia entre esta S y la acción que calculamos para el camino $\underline{x(t)}$ —que para simplificar la notación podemos llamar $\underline{S}$— la diferencia entre $\underline{S}$ y S debe ser cero en primer orden de aproximación para η pequeña. Puede diferir en el segundo orden pero en el primero la diferencia debe ser cero.

"Y esto debe ser cierto para cualquier η. Bueno, no exactamente. El método no tiene ningún sentido a menos que consideremos las trayectorias que empiecen y terminen en los mismos dos puntos —cada trayectoria comienza en un determinado punto en el instante t_1 y termina en otro punto en un tiempo t_2 y tanto estos puntos como el tiempo se mantienen fijos. Así pues, la desviación de nuestra η debe ser cero en cada extremo, $\eta(t_1) = 0$ y $\eta(t_2) = 0$. Con estas condiciones hemos especificado nuestro problema matemático.

"Si ustedes no conocieran nada de cálculo diferencial, podrían hacer lo mismo para determinar el mínimo de una función cualquiera $f(x)$. Podrían estudiar que sucede si toman $f(x)$ y le suman una pequeña cantidad h a x y obliga que la corrección sobre $f(x)$ para el primer orden de h sea nula en el mínimo. Sustituirán x por $x + h$ y desarrollarán hasta el primer orden de h ... exactamente como lo vamos a hacer para η.

"La idea es entonces sustituir $x(t) = \underline{x(t)} + \eta(t)$ en la fórmula para la acción:

$$S = \int \left[\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 - V(x) \right] dt,$$

donde llamo $V(x)$ a la energía potencial. La derivada dx/dt es, por supuesto, la derivada de $\underline{x(t)}$ más la derivada de $\eta(t)$ de manera que obtengo la siguiente expresión para la acción:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d\underline{x}}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \right)^2 - V(\underline{x} + \eta) \right] dt.$$

"Ahora tengo que escribir esto en más detalle. Para el término cuadrático obtengo

$$\left(\frac{d\underline{x}}{dt} \right)^2 + 2 \, \frac{d\underline{x}}{dt} \, \frac{d\eta}{dt} + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2.$$

Un momento. No me interesan órdenes más elevados que el primero, de manera que pondré todos los términos donde intervengan η^2 o potencias mayores en un pequeño paréntesis que llamaré 'términos de segundo orden en adelante'. Del término que estoy considerando obtengo solamente el segundo orden pero obtendré más de otra parte. Entonces la parte de la energía cinética es

$$\frac{m}{2} \left(\frac{d\underline{x}}{dt} \right)^2 + m \, \frac{d\underline{x}}{dt} \, \frac{d\eta}{dt} + (\text{términos de segundo orden en adelante}).$$

"Ahora necesitamos el potencial V en $\underline{x} + \eta$. Considero η pequeña de manera que puedo escribir $V(x)$ en serie de Taylor. Es aproximadamente $V(\underline{x})$; en la siguiente aproximación (por las propiedades de las derivadas) la corrección es η por la derivada de V respecto a x, y así sucesivamente:

$$V(\underline{x} + \eta) = V(\underline{x}) + \eta V'(\underline{x}) + \frac{\eta^2}{2} \, V''(\underline{x}) + \cdots$$

He llamado V' a la derivada de V respecto a x a fin de simplificar la notación. El término en η^2 y los siguientes entran en la categoría 'términos de segundo orden en adelante' y no nos interesan. Juntando todo esto,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{d\underline{x}}{dt} \right)^2 - V(\underline{x}) + m \, \frac{d\underline{x}}{dt} \, \frac{d\eta}{dt} \right.$$
$$\left. - \eta V'(\underline{x}) + (\text{términos de segundo orden en adelante}) \right] dt.$$

Ahora bien, si observamos cuidadosamente, vemos que los dos primeros términos que hemos colocado aquí corresponden a la ecuación $\underline{S}$ que habría calculado con la trayectoria verdadera $\underline{x}$. Deseo concentrar la atención sobre cómo varía S —la diferencia entre S y $\underline{S}$ que obtendríamos con la trayectoria correcta—. Indicaremos esta diferencia con δS y la llamaremos variación de S.* Despreciando los términos 'de segundo orden en adelante', tengo para δS

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[m \, \frac{d\underline{x}}{dt} \, \frac{d\eta}{dt} - \eta V'(\underline{x}) \right] dt.$$

"Ahora el problema es éste: Tengo aquí una cierta integral. Todavía no sé qué es $\underline{x}$, pero sí sé que, *cualquiera que sea* esta η, su integral debe ser cero. Y bien, ustedes pensarán: la única manera de que esto suceda es que lo que multiplica a η sea cero. Pero ¿y qué sucede con el primer término en $d\eta/dt$? Bien, después de todo, si η puede ser cualquier cosa, su derivada también y concluyen que el coeficiente de $d\eta/dt$ también debe ser cero. Esto no es del todo correcto. No es del todo correcto, porque hay una relación entre η y sus derivadas; no son absolutamente independientes, porque $\eta(t)$ debe ser cero para t_1 y t_2.

"El método para resolver todos los problemas en cálculo de variaciones siempre usa el mismo principio general. Ustedes producen un desplazamiento en lo que desean variar (como hicimos agregando η); consideran los términos de primer orden; *luego* arreglan siempre las cosas de modo que obtengan una integral de la forma 'alguna clase de cosas por el desplazamiento (η)', pero sin ninguna otra derivada (sin $d\eta/dt$). Deben reorganizar los términos como para obtener siempre 'algo' multiplicado por η. Dentro de un momento verán el gran valor de esto. (Hay fórmulas que les dicen cómo operar en ciertos casos sin hacer realmente los cálculos, pero no son suficientemente generales como para que valga la pena preocuparnos; lo mejor es realizar el cálculo de esta manera.)

"¿Cómo puedo reorganizar el término en $d\eta/dt$ para introducir η? Se puede integrar por partes. Se encuentra que toda la astucia del cálculo de variaciones consiste en escribir la variación de S y luego integrar por partes de tal manera que las derivadas de η desaparezcan. Esto es siempre lo mismo para todos los problemas en que aparecen derivadas".

"Recuerden el principio general de la integración por partes. Si tienen cualquier función f por $d\eta/dt$ integrada respecto a t, escriben la derivada de ηf:

$$\frac{d}{dt}(\eta f) = \eta \, \frac{df}{dt} + f \, \frac{d\eta}{dt}.$$

La integral que buscan es sobre el último término, así que

$$\int f \, \frac{d\eta}{dt} \, dt = \eta f - \int \eta \, \frac{df}{dt} \, dt.$$

"En nuestra fórmula para δS, la función f es m por $d\underline{x}/dt$; por lo tanto, tengo la fórmula siguiente para δS.

$$\delta S = \left. m \, \frac{d\underline{x}}{dt} \, \eta(t) \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(m \, \frac{d\underline{x}}{dt} \right) \eta(t) \, dt - \int_{t_1}^{t_2} V'(\underline{x}) \, \eta(t) \, dt.$$

* N. del T.: si bien se usa la misma palabra para designar la variación ordinaria de una función, se ve que la variación definida en el texto, no proviene de una relación funcional entre una variable independiente y una dependiente; es más bien un cambio del valor de la acción originado por un cambio arbitrario (excepto por las limitaciones de tiempo y extremos fijos) hecho en la trayectoria.

El primer término se debe calcular en los dos límites t_1 y t_2. Entonces debo obtener la integral de lo que resta de la integración por partes. El último término se conserva sin cambios.

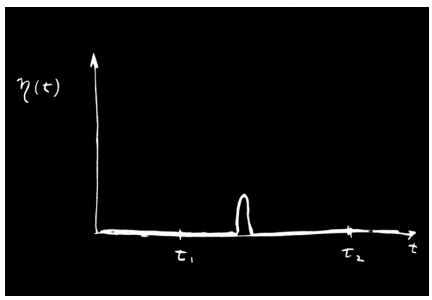
"Hemos llegado a algo que siempre sucede —la parte integrada desaparece—. (En efecto, si la parte integrada no desaparece, ¡vuelven a enunciar el principio agregando condiciones para que esto suceda realmente!) Dijimos anteriormente que η debe ser cero en ambos extremos de la trayectoria, porque el principio dice que la acción es un mínimo a condición de que la curva variada comience y termine en los dos puntos elegidos. La condición es que $\eta(t_1) = 0$ y $\eta(t_2) = 0$. Entonces el término integrado es nulo. Agrupando los otros términos obtenemos:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[-m\,\frac{d^2\underline{x}}{dt^2} - V'(\underline{x}) \right] \eta(t)\,dt.$$

La variación de S está ahora en la forma que queríamos —hay algo entre corchetes, digamos F multiplicado por $\eta(t)$ e integrado desde t_1 hasta t_2—.

"Tenemos que una integral de cualquier cosa por $\eta(t)$ siempre es cero

$$\int F(t)\,\eta(t)\,dt = 0.$$



Tengo una función de t, la multiplico por $\eta(t)$ y la integro desde un extremo hasta el otro. Y cualquiera que sea η siempre será cero. Esto significa que la función $F(t)$ es cero. Esto es evidente, pero de todas maneras les daré una especie de demostración.

"Supongan que tomara para $\eta(t)$ algo que fuera cero para todo t, excepto cerca de un valor particular. Permanece cero hasta acercarse a este t,

luego asciende por un momento para volver luego a ser cero. Al calcular la integral de esta η por una función F, el único lugar en que encuentran algo que no sea cero es donde $\eta(t)$ hace un pico y entonces se obtiene el valor de F en ese lugar multiplicado por la integral del pico. La integral sola sobre el pico no es nula, pero sí cuando se la multiplica por F; luego la función F debe ser nula donde se encuentra el pico. Pero el pico puede estar en cualquier lugar que lo quiera colocar, así que F debe ser cero en todas partes.

"Vemos que si nuestra integral es cero para cualquier η el coeficiente de η debe ser cero. La integral de acción debe ser un mínimo para el camino que satisfaga esta complicada ecuación diferencial:

$$\left[-m\,\frac{d^2\underline{x}}{dt^2} - V'(\underline{x}) \right] = 0.$$

En realidad no es tan complicada; la han visto antes. Es precisamente $F = ma$. El primer término es la masa por la aceleración y el segundo es la derivada de la energía potencial que es la fuerza.

"Así pues, por lo menos para un sistema conservativo, hemos demostrado que el principio de mínima acción da la respuesta correcta; dice que la trayectoria que tiene la mínima acción es aquella que satisface la ley de Newton.

"Observación: no demostré que era un *mínimo* —pudiera ser un máximo—. De hecho, no es necesario que sea realmente un mínimo. Es algo análogo a lo que observamos para el 'principio de tiempo mínimo' que discutimos en óptica. También allí dijimos al comienzo que era un tiempo 'mínimo'. Sin embargo, resultó que hay situaciones en las que no era el tiempo *mínimo*. El principio fundamental era que para cualquier *variación de primer orden* respecto al camino óptico, el *cambio* en el tiempo era cero; es la misma historia. Lo que queremos decir realmente por 'mínimo' es que la variación de primer orden en el valor de S, cuando cambian de camino, es cero. No es necesariamente un 'mínimo'.

"Ahora señalaré algunas generalizaciones. En primer lugar, todo esto se puede realizar en tres dimensiones. En lugar de tener solamente x, tendré x, y y z como funciones de t; la acción es más complicada. Para un movimiento en tres

dimensiones, deben usar la energía cinética completa —$(m/2)$ por el cuadrado de la velocidad total—. Esto es,

$$\text{EC} = \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right].$$

Además, la energía potencial es una función de x, y y z. ¿Y qué sucede con la trayectoria? La trayectoria es cierta curva general en el espacio, que no es tan fácil de dibujar, pero la idea es la misma. ¿Y qué sucede con η? Bueno, η puede tener tres componentes. Pueden desplazar el camino en x, o en y, o en z —o pueden hacerlo en las tres direcciones simultáneamente—. Así pues, η sería un vector. En realidad esto no complica demasiado las cosas. Puesto que solamente la variación de *primer orden* debe ser cero, podemos realizar el cálculo por medio de tres desplazamientos sucesivos. Podemos desplazar η solamente en la dirección x y decir que el coeficiente debe ser cero. Obtenemos una ecuación. Luego producimos el desplazamiento en la dirección y y obtenemos otra. Y en la dirección z obtenemos otra. O, por supuesto, en cualquier otro orden que quieran. De cualquier modo obtienen tres ecuaciones. Por supuesto, la ley de Newton es, en realidad, tres ecuaciones en las tres dimensiones —una para cada componente—. Creo que prácticamente pueden ver que tiene que funcionar, pero les dejo que demuestren por sí mismos el caso de tres dimensiones. Naturalmente, pueden usar el sistema de coordenadas que quieran, polares o cualquier otro, y obtener la ley de Newton adecuada a este sistema, viendo qué sucede cuando se realiza un desplazamiento η según el radio, o según el ángulo, etcétera.

"Análogamente se puede generalizar el método para algún número de partículas. Si tienen dos partículas digamos, con una fuerza entre ellas, de manera que hay una energía potencial mutua, suman la energía cinética de ambas partículas y toman la energía potencial de la interacción mutua. ¿Y qué es lo que hay que variar? Varían la trayectoria de *ambas* partículas. Entonces, para dos partículas que se mueven en tres dimensiones hay seis ecuaciones. Pueden variar la posición de la partícula 1 en la dirección x, en la y y en la z, y, en forma similar, para la partícula 2; así que tienen seis ecuaciones. Y es como debe ser. Hay tres ecuaciones que determinan la aceleración de la partícula 1 en términos de la fuerza actuante sobre ella y tres para la aceleración de la partícula 2, a partir de la fuerza sobre ella. Hacen el mismo juego y obtienen la ley de Newton en tres dimensiones para cualquier número de partículas.

"Estuve diciendo que obtenemos la ley de Newton. No es del todo cierto, porque la ley de Newton incluye fuerzas no conservativas como la fricción. Newton expresó que ma es igual a cualquier F. Pero el principio de mínima acción se aplica solamente a sistemas *conservativos* —donde todas las fuerzas pueden obtenerse de una función potencial—. Saben, sin embargo, que a nivel microscópico —al nivel más profundo de la física— no existen fuerzas no conservativas. Las fuerzas no conservativas, como la fricción, aparecen solamente porque despreciamos complicaciones microscópicas —hay demasiadas partículas para analizar—. Pero las leyes *fundamentales* se *pueden* poner en la forma de un principio de mínima acción.

"Generalicemos aún más. Supongan que nos preguntamos qué sucede si la partícula se mueve relativistamente. No hemos obtenido las ecuaciones relativistas de movimiento; $F = ma$ es solamente correcta en el caso no relativista. El problema es: ¿hay un principio correspondiente al de mínima acción en el caso relativista? Lo hay. En el caso relativista la fórmula es la siguiente:

$$S = -m_0c^2\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{1 - v^2/c^2}\,dt - q\int_{t_1}^{t_2}[\phi(x,y,z,t) - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}(x,y,z,t)]\,dt.$$

La primera parte de la integral de acción es la masa en reposo m_0 por c_2 por la integral de una función de la velocidad, $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Por ello, en lugar de la energía potencial solamente, tenemos una integral sobre el potencial escalar ϕ y sobre el producto de $\boldsymbol{v}$ por el potencial vectorial $\boldsymbol{A}$. Por supuesto que estamos incluyendo solamente fuerzas electromagnéticas. Todos los campos eléctricos y

magnéticos están dados en términos de ϕ y $\boldsymbol{A}$. Esta función de la acción nos da la teoría completa del movimiento relativista de una partícula simple en un campo electromagnético".

"Por consiguiente, dondequiera que escriba $\boldsymbol{v}$, comprenderán que antes de calcular cualquier cosa, deben sustituir dx/dt por v_x y lo mismo para las otras componentes. Además pongan $x(t), y(t), z(t)$ para el punto sobre la trayectoria en el tiempo t y que he escrito solamente x, y, z. Propiamente hablando, sólo después que hayan realizado estos remplazos para los $\boldsymbol{v}$, obtendrán la fórmula de acción para una partícula relativista. Dejaré al más ingenioso de ustedes el problema de demostrar que esta fórmula de la acción conduce en efecto a las ecuaciones correctas del movimiento relativista. ¿Les puedo sugerir encarar el problema sin tener en cuenta $\boldsymbol{A}$, es decir, para ausencia de campo magnético? Deberán obtener, entonces, las componentes de la ecuación de movimiento, $d\boldsymbol{p}/dt = -q\boldsymbol{\nabla}\phi$ donde, como recuerdan $\boldsymbol{p} = m_0\boldsymbol{v}/\sqrt{1 - v^2/c^2}$.

"Es mucho más difícil de considerar el caso que incluye el potencial vectorial. Las variaciones resultan mucho más complicadas. Pero al final el término que da la fuerza resulta igual a $q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$, como debe ser. Pero los dejo para que jueguen con esto.

"Quiero insistir que en el caso general, por ejemplo en la fórmula relativista, el integrando de la acción no se escribe como la diferencia de la energía cinética y de la energía potencial. Esto es correcto solamente en la aproximación no relativista. Por ejemplo, el término $m_0c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}$ no es lo que hemos llamado energía cinética. El problema de saber qué es lo que debe ser la acción en cada caso particular se tiene que resolver por una especie de tanteo. Es precisamente el mismo problema de determinar cuáles son las leyes del movimiento en un principio. Deben jugar con las ecuaciones que conocen para tratar de ponerlas en forma de principio de mínima acción.

"Una última consideración sobre terminología. La función que se integra sobre el tiempo para obtener la acción S se llama *lagrangiano*, $\mathcal{L}$, el cual es función de las velocidades y las posiciones de las partículas únicamente. Por lo tanto, el principio de mínima acción también se puede escribir

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(x_i, v_i)\, dt,$$

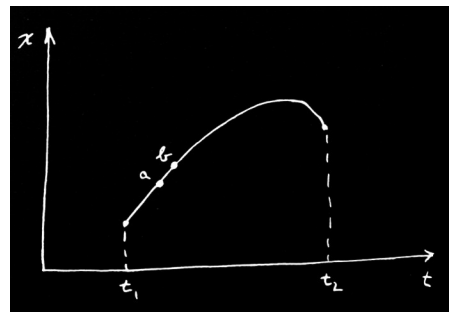
donde por x_i y v_i entendemos todas las componentes de las posiciones y velocidades. Así pues, si oyen hablar del 'lagrangiano' saben que nos estamos refiriendo a la función que se utiliza para encontrar S. Para el movimiento relativista en un campo electromagnético

$$\mathcal{L} = -m_0c^2\sqrt{1 - v^2/c^2} - q(\phi - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}).$$

"Además, debemos decir que la mayoría de la gente más precisa y pedante no llama realmente 'acción' a S. La llaman 'primeras funciones principales de Hamilton'. Pero detesto dar una clase sobre 'el-principio-de-mínima-primera-función-principal-de-Hamilton'. Así pues, la llamaré 'acción'. Además, más y más gente la está llamando 'acción'. Como ven, hubo históricamente otra cosa no tan útil a la que se llamó 'acción', pero pienso que tiene más sentido cambiar a favor de una definición más moderna. Mientras tanto podrán llamar 'acción' a la nueva función, y muy pronto todo el mundo la llamará por su nombre más simple.

"Ahora quiero agregar algo que es similar a la discusión inicial acerca del tiempo mínimo. Hay una gran diferencia en las características de una ley que dice que una cierta integral desde un punto a otro es mínima —que dice algo sobre toda la trayectoria— y una ley que dice que mientras avanzan hay una fuerza que produce una aceleración. La segunda indica cómo realizan el recorrido por la trayectoria en cada punto y la otra es un enunciado general sobre la trayectoria completa. En el caso de la luz hablamos de relación entre estos dos puntos de vista. Ahora les quiero explicar por qué hay leyes diferenciales cuando hay un principio de mínima acción de esta clase. La razón es la siguiente: consideren la trayectoria real en el espacio y en el tiempo. Como antes, consideremos sólo

una dimensión de modo que podamos representar x en función de t. A lo largo de la trayectoria verdadera, S es un mínimo. Supongamos que se conozca la trayectoria verdadera y que pase por un cierto punto a, en el espacio y en el tiempo, y también por otro punto cercano b.



"Ahora bien, si la integral total desde t_1 hasta t_2 es mínima, también la integral a lo largo de un pequeño segmento de a a b es necesariamente un mínimo. Es imposible que la parte relativa a ab sea un poco mayor. En caso contrario podrían jugar con este elemento de la trayectoria de tal manera que la integral total fuera un poco menor.

"Entonces cada subdivisión de la trayectoria debe ser un mínimo. Y esto es cierto, cualquiera que sea el largo de la subdivisión. Por ello, el principio de que la integral total nos da un mínimo se puede enunciar también diciendo que un elemento infinitesimal de la trayectoria es también una curva en la cual la acción es mínima. Si consideramos una porción suficientemente pequeña de la trayectoria —entre dos puntos a y b muy cercanos—, saber cómo varía el potencial de un punto a otro lejano no es lo importante, porque están casi sobre el mismo lugar al recorrer el pequeño pedazo de trayectoria. Lo único que tienen que discutir es la variación de primer orden en el potencial. La respuesta depende solamente de la derivada del potencial y no del potencial mismo en cada punto. Entonces el enunciado relativo a la propiedad general de toda la trayectoria se transforma en un juicio acerca de qué sucede sobre una pequeña sección de la trayectoria —un enunciado diferencial—. Y en este enunciado diferencial intervienen solamente las derivadas del potencial, es decir, la fuerza en cada punto. Ésta es la explicación cualitativa de la relación entre la ley global y la ley diferencial.

"En el caso de la luz discutimos también el siguiente problema: ¿cómo puede la partícula encontrar el camino correcto? Desde el punto de vista diferencial es fácil de comprender. En cada instante sufre una aceleración y sólo lo que debe hacer en ese instante. Pero todas sus nociones intuitivas sobre causa y efecto se harán pedazos cuando digan que la partícula decide tomar el camino según el cual la acción va a ser mínima. ¿Es que 'olfatea' los caminos vecinos a fin de saber si la acción es o no mayor? En el caso de la luz, cuando poníamos bloques a fin de que los fotones no pudieran ensayar todas las trayectorias, encontramos que no podían decidir el camino a seguir y obtuvimos el fenómeno de difracción.

"¿Se cumple lo mismo en la mecánica? ¿Es correcto que la partícula no sólo 'tome la trayectoria verdadera' sino que también examine todas las otras trayectorias posibles? Y si hay obstáculos en el camino, ¿no será que obtendremos un fenómeno análogo a la difracción? Lo milagroso de todo esto es, por supuesto, que suceda precisamente así. Es lo que nos dicen las leyes de la mecánica cuántica. Entonces el enunciado de nuestro principio de mínima acción es incompleto. No es que una partícula tome la trayectoria de mínima acción sino que olfatea todas las trayectorias vecinas y adopta la que tiene la mínima acción por un método análogo al que la luz adopta para el tiempo más corto. Recuerden que la razón por la cual la luz adopta el tiempo más corto es la siguiente: si emprende una trayectoria que emplea un tiempo diferente, llegará con una fase diferente. Y la amplitud total en cada punto es la suma de las contribuciones de la amplitud para todos los diferentes caminos por donde puede llegar la luz. Todos los caminos que dan fases muy diferentes no contribuyen para nada. Pero sí pueden encontrar todo un grupo de trayectorias cuyas fases sean casi iguales y entonces las pequeñas contribuciones se suman y el resultado es que llega a una amplitud total razonable. El camino importante es ahora aquel para el cual hay muchas trayectorias vecinas que tienen la misma fase.

"Es exactamente lo mismo para la mecánica cuántica. La mecánica cuántica (para el caso no relativista y despreciando el espín del electrón) trabaja como sigue: la probabilidad de que una partícula que parte del punto 1 en el tiempo t_1 llegue al punto 2 en el tiempo t_2 es el cuadrado de una amplitud de probabilidad. La amplitud total se puede escribir como la suma de las amplitudes de cada trayectoria posible —para cada manera de llegar—. Para cada $x(t)$ que podamos tener —para cada trayectoria imaginaria posible— debemos calcular una amplitud. Luego las sumamos todas. ¿Qué tomamos como amplitud para

cada trayectoria? Es nuestra integral de acción la que nos indica cuál debe ser la amplitud correspondiente a una sola trayectoria. La amplitud es proporcional a una cierta constante por $e^{iS/\hbar}$, donde S es la acción para la trayectoria. Es decir, si representamos la fase de la amplitud por un número complejo, el ángulo de fase es $S/\hbar$. La acción S tiene dimensiones de energía por tiempo y la constante de Planck $\hbar$ tiene las mismas dimensiones. Es la constante que determina cuándo es importante la mecánica cuántica.

"El funcionamiento es como sigue: supongan que para todas las trayectorias, S es muy grande comparada con $\hbar$. Una trayectoria contribuye con una cierta amplitud. Para una trayectoria vecina la fase es bastante diferente, porque con una S muy grande, un pequeño cambio de S significa una fase completamente diferente —porque $\hbar$ es muy pequeña—. Así pues, trayectorias vecinas cancelarán normalmente sus efectos cuando se haga la suma —excepto para una región, que es donde una trayectoria y otra vecina den la misma fase en primera aproximación (más precisamente la misma acción a menos de $\hbar$)—. Sólo estas trayectorias son importantes. Entonces, en el caso límite donde la constante de Planck $\hbar$ tiende a cero, las leyes correctas de la mecánica cuántica pueden resumirse diciendo simplemente: 'Olvidar todo lo de las amplitudes de probabilidad. La partícula va por una trayectoria especial, aquella para la cual S no varía en primera aproximación'. Ésta es la relación entre el principio de mínima acción y la mecánica cuántica. El hecho de que la mecánica cuántica pudiera formularse de esta forma fue descubierto en 1942 por un estudiante del mismo profesor Bader del principio de la clase. [La mecánica cuántica fue formulada originalmente bajo la forma de una ecuación diferencial para la amplitud (Schrödinger) y, también, bajo la forma del cálculo matricial (Heisenberg).]

"Ahora quiero hablarles de otros principios de mínimo en física. Hay muchos interesantes. No pretendo darles una lista completa, sino solamente describir uno más. Más adelante, cuando lleguemos a un fenómeno físico que tiene un buen principio de mínimo, hablaremos de él. Quiero mostrarles ahora que podemos describir la electrostática no dando una ecuación diferencial para el campo, sino diciendo que una cierta integral es un máximo o un mínimo. Primero consideremos el caso en que se conoce la densidad de carga en todo punto y el problema es encontrar el potencial ϕ en todo punto del espacio. Saben que la respuesta debe ser

$$\nabla^2\phi = -\rho/\epsilon_0.$$

Pero otra forma de decir lo mismo es: calculen la integral U^* donde

$$U^* = \frac{\epsilon_0}{2}\int(\boldsymbol{\nabla}\phi)^2\,dV - \int\rho\phi\,dV,$$

que es una integral de volumen extendida a todo el espacio. Debe ser un mínimo para la distribución de potencial correcta $\phi(x,y,z)$.

"Podemos demostrar que estas dos formas de enunciar la electrostática son equivalentes. Supongamos que tomamos una función cualquiera ϕ. Queremos demostrar que cuando tomamos para ϕ el potencial correcto $\underline{\phi}$, más una pequeña desviación f, entonces el cambio en U^* es cero en primer orden. Escribimos entonces

$$\phi = \underline{\phi} + f.$$

La $\underline{\phi}$ es lo que estamos buscando, pero produciremos una variación sobre ella a fin de comprobar si la variación de U^* es cero en primer orden. Para la primera parte de U^* necesitamos que

$$(\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 = (\boldsymbol{\nabla}\underline{\phi})^2 + 2\,\boldsymbol{\nabla}\underline{\phi}\cdot\boldsymbol{\nabla}f + (\boldsymbol{\nabla}f)^2.$$

El único término de primer orden que varía es

$$2\,\boldsymbol{\nabla}\underline{\phi}\cdot\boldsymbol{\nabla}f.$$

En el segundo término de U^* la integral es

$$\rho\phi = \rho\underline{\phi} + \rho f,$$

donde la parte variable es ρf. Entonces, tomando solamente la parte variable, necesitamos la integral

$$\Delta U^* = \int (\epsilon_0 \boldsymbol{\nabla}\underline{\phi} \cdot \boldsymbol{\nabla} f - \rho f)\, dV.$$

"Ahora bien, siguiendo la vieja regla general, debemos procurar que todo el asunto quede libre de las derivadas de f. Examinemos cómo son las derivadas. El producto escalar es

$$\frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z},$$

que debemos integrar respecto a x, y y z. Éste es el truco: para eliminar $\partial f/\partial x$ integramos por partes respecto a x. De este modo, esto llevará las derivadas a $\underline{\phi}$. Es la misma idea general con que eliminamos las derivadas respecto a t. Utilizamos la igualdad

$$\int \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}\, dx = f\,\frac{\partial \underline{\phi}}{\partial x} - \int f\,\frac{\partial^2 \underline{\phi}}{\partial x^2}\, dx.$$

El término integrado es nulo puesto que f debe ser cero en el infinito. [Corresponde hacer η igual a cero en t_1 y t_2. Entonces nuestro principio debe ser enunciado con más precisión: U^* es menor para la verdadera ϕ que para cualquier otra $\phi(x, y, z)$ que tenga el mismo valor en el infinito.] Podemos hacer lo mismo para y y z. Entonces nuestra integral ΔU^* es

$$\Delta U^* = \int (-\epsilon_0 \nabla^2 \underline{\phi} - \rho) f\, dV.$$

A fin de que esta variación sea nula para cualquier f, no importa cuál, el coeficiente de f debe ser cero y, por lo tanto,

$$\nabla^2 \underline{\phi} = -\rho/\epsilon_0.$$

Volvemos a nuestra vieja ecuación. Entonces nuestra proposición de 'mínimo' es correcta.

"Podemos generalizar nuestra proposición si realizamos el cálculo en una forma un poco diferente. Volvamos a la integración por partes sin pasar por las componentes. Comencemos por analizar la siguiente igualdad:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (f\, \boldsymbol{\nabla}\underline{\phi}) = \boldsymbol{\nabla} f \cdot \boldsymbol{\nabla}\underline{\phi} + f\, \nabla^2 \underline{\phi}.$$

Si realizo la derivada del primer miembro puedo demostrar que es precisamente igual al segundo. Puedo utilizar ahora esta ecuación para integrar por partes. En nuestra integral ΔU^*, remplazamos $\boldsymbol{\nabla}\underline{\phi} \cdot \boldsymbol{\nabla} f$ por $\boldsymbol{\nabla} \cdot (f\, \boldsymbol{\nabla}\underline{\phi}) - f\, \nabla^2 \underline{\phi}$, que integramos sobre el volumen. Se puede remplazar la integral de volumen de la divergencia por una integral de superficie

$$\int \boldsymbol{\nabla} \cdot (f\, \boldsymbol{\nabla}\underline{\phi})\, dV = \int f\, \boldsymbol{\nabla}\underline{\phi} \cdot \boldsymbol{n}\, da.$$

Como estamos integrando sobre todo el espacio, la superficie sobre la que estamos integrando está en el infinito. Entonces f es cero y obtenemos la misma respuesta que antes.

"Sólo ahora vemos cómo resolver el problema cuando *no* sabemos dónde se encuentran todas las cargas. Supongan que tenemos conductores sobre los que hay cargas repartidas de una cierta forma. Podemos utilizar nuestro principio de mínimo si los potenciales de todos los conductores son fijos. Hacemos la integral para U^* solamente sobre el espacio exterior a los conductores. Entonces, como no podemos variar $\underline{\phi}$ sobre el conductor, f es cero sobre toda la superficie, y la integral de superficie

$$\int f\, \boldsymbol{\nabla}\underline{\phi} \cdot \boldsymbol{n}\, da$$

sigue siendo nula. La integral de volumen restante

$$\Delta U^* = \int (-\epsilon_0 \nabla^2 \underline{\phi} - \rho) f \, dV$$

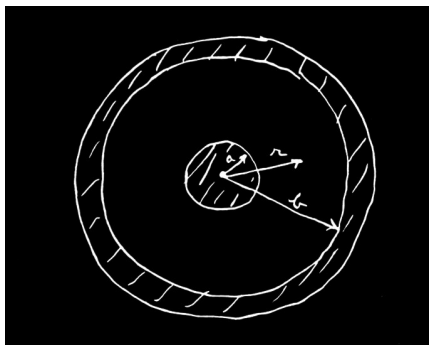
debe extenderse solamente al espacio comprendido entre los conductores. Por supuesto, obtenemos nuevamente la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 \underline{\phi} = -\rho/\epsilon_0.$$

Hemos demostrado, así, que nuestra integral original U^* es también un mínimo si la calculamos sobre el espacio exterior de conductores que están a potenciales fijos [es decir, tal que toda función de prueba $\phi(x, y, z)$ sea igual al potencial dado de los conductores cuando (x, y, z) es un punto sobre la superficie de un conductor.]

"Hay un caso interesante cuando las cargas están sólo sobre los conductores. Entonces

$$U^* = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\boldsymbol{\nabla}\phi)^2 \, dV.$$



Nuestro principio de mínimo dice que en el caso en que los conductores están a ciertos potenciales dados, los potenciales entre ellos se ajustan entre sí de manera que U^* sea mínimo. ¿Qué integral es ésta? El término $\boldsymbol{\nabla}\phi$ es el campo eléctrico de manera que la integral es la energía electrostática. El campo verdadero es aquél, de todos los que provienen de un gradiente de potencial, que tenga la energía total mínima.

"Quiero aplicar este resultado a un cálculo particular, a fin de mostrarles que todo esto es realmente útil en la práctica. Supongan que tomo dos conductores en forma de condensador cilíndrico.

El conductor interior tiene el potencial V y el exterior está a potencial cero. Sea a el radio del conductor interior y b el del exterior. Podemos suponer *cualquier* distribución de potencial entre los dos. Si utilizamos la $\underline{\phi}$ *correcta* y calculamos $(\epsilon_0/2)\int(\boldsymbol{\nabla}\underline{\phi})^2 dV$, debe resultar la energía del sistema: $\frac{1}{2}CV^2$. Podemos entonces calcular C por medio de este principio. Pero si utilizamos una distribución de potencial equivocada para calcular la capacidad C por este método, obtendremos una capacidad muy grande, puesto que V está especificado. Cualquier potencial ϕ que adoptemos y que no sea exactamente correcto conducirá a un valor falso de C que es mayor que el valor correcto. Pero si el falso ϕ es cualquier aproximación bruta al valor correcto, el valor de C que obtendremos será una buena aproximación porque el error en C es de segundo orden en relación al error de ϕ.

"Supongan que no conozco la capacidad del condensador cilíndrico. Puedo utilizar este principio para encontrarla. Ensayo con funciones potencial ϕ hasta obtener el menor valor de C. Supongan, por ejemplo, que adopto un potencial que corresponde a un campo constante. (Por supuesto, saben que el campo aquí no es verdaderamente constante, varía como $1/r$.) Un campo constante implica un potencial que varía linealmente con la distancia. Para que se satisfagan las condiciones sobre los dos conductores es necesario que

$$\phi = V\left(1 - \frac{r-a}{b-a}\right).$$

Esta función vale V en $r = a$, cero en $r = b$, y entre los dos valores tiene una variación constante igual a $-V/(b-a)$. Entonces lo que debemos hacer para encontrar la integral U^* es multiplicar el cuadrado de este gradiente por $\epsilon_0/2$ e integrar sobre todo el volumen. Hagamos este cálculo para un cilindro de longitud unitaria. Un elemento de volumen con radio r es $2\pi r dr$. Haciendo la integral encuentro que mi primer ensayo me da para la capacidad

$$\frac{1}{2} CV^2(\text{primer intento}) = \frac{\epsilon_0}{2} \int_a^b \frac{V^2}{(b-a)^2} \, 2\pi r \, dr.$$

La integral es fácil; vale

$$\pi V^2\left(\frac{b+a}{b-a}\right).$$

Tengo así una fórmula para la capacidad que no es la verdadera sino que se trata de algo aproximado:

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0}=\frac{b+a}{2(b-a)}.$$

Naturalmente es diferente de la respuesta correcta $C=2\pi\epsilon_0/ln(b/a)$, pero no es tan mala. Comparémosla con las respuestas correctas para diferentes valores de b/a. He resumido los resultados en esta tabla:

$\frac{b}{a}$	$\frac{C_{\text{verdadera}}}{2\pi\epsilon_0}$	$\frac{C(\text{primera aprox.})}{2\pi\epsilon_0}$
2	1.4423	1.500
4	0.721	0.833
10	0.434	0.612
100	0.217	0.51
1.5	2.4662	2.50
1.1	10.492059	10.500000

Aun cuando b/a sea tan grande como 2 —que nos da una gran variación en el campo comparada con un campo lineal— obtengo una buena aproximación. La respuesta es, algo elevada, como era de esperar. Las cuestiones resultan peores cuando tienen un alambre muy delgado en el interior de un gran cilindro. En este caso, el campo presenta enormes variaciones y si lo considerasen constante, no lo estarían representando bien. Con $b/a=100$ nos encontramos con un factor cercano a 2. Los resultados son mucho mejores para b/a pequeño. Tomando el caso del extremo opuesto, donde los conductores no están muy apartados —digamos que $b/a=1.1$— entonces el campo constante es una buena aproximación, y obtenemos el valor correcto para C a menos de un décimo por ciento.

"Ahora querría mostrarles cómo mejorar el cálculo. (Por supuesto, *conocen* la respuesta correcta para el cilindro, pero el método es el mismo para algunas otras formas raras, donde no conocen la respuesta correcta.) El próximo paso será buscar una mejor aproximación al valor desconocido y verdadero de ϕ. Por ejemplo, podríamos ensayar para ϕ una constante más una exponencial, etc. ¿Pero cómo saben cuándo tienen la mejor aproximación, a menos que conozcan el verdadero valor de ϕ? Respuesta: calculan C; el menor valor de C es el valor más próximo al verdadero. Desarrollemos esta idea. Supongan que el potencial no es lineal sino cuadrático en r —que el campo eléctrico no sea constante sino lineal—. La forma cuadrática más *general* que cumple $\phi=0$ para $r=b$, y $\phi=V$ para $r=a$ es

$$\phi=V\left[1+\alpha\left(\frac{r-a}{b-a}\right)-(1+\alpha)\left(\frac{r-a}{b-a}\right)^2\right],$$

donde α es un número constante cualquiera. Esta fórmula es algo más complicada. Tiene tanto un término cuadrático en el potencial como un término lineal. Es fácil obtener el campo a partir de ella. El campo es simplemente

$$E=-\frac{d\phi}{dr}=-\frac{\alpha V}{b-a}+2(1+\alpha)\,\frac{(r-a)V}{(b-a)^2}.$$

Debemos ahora elevar al cuadrado e integrar sobre el volumen. Pero, un momento. ¿Qué valor debo tomar para α? Puedo tomar una parábola para ϕ; pero ¿qué parábola? Esto es lo que hago: calculo la capacidad con *un α arbitrario* y obtengo

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0}=\frac{a}{b-a}\left[\frac{b}{a}\left(\frac{\alpha^2}{6}+\frac{2\alpha}{3}+1\right)+\frac{1}{6}\,\alpha^2+\frac{1}{3}\right].$$

Parece un poco complicada, pero es lo que resulta de la integración del cuadrado del campo. Ahora puedo escoger mi α. Sé que el resultado correcto es más bajo que todo lo que voy a calcular; así que, cualquiera sea el valor que dé a α, obtendré una respuesta demasiado grande. Pero si juego con α hasta obtener el menor valor posible, este menor valor es más próximo al valor correcto que todos los demás. Así pues, tomo el valor de α para que me dé el valor mínimo de C. Haciendo esto mediante el cálculo diferencial ordinario obtengo que $\alpha = -2b/(b+a)$ da el valor mínimo de C. Sustituyendo este valor en la fórmula obtengo la capacidad mínima

$$\frac{C}{2\pi\epsilon_0} = \frac{b^2 + 4ab + a^2}{3(b^2 - a^2)}.$$

"He calculado C por medio de esta fórmula para diferentes valores de b/a. Llamo C(cuadrática) a estos números. Ésta es la tabla que compara C(cuadrática) con el valor verdadero de C.

$\frac{b}{a}$	$\frac{C_{\text{verdadera}}}{2\pi\epsilon_0}$	$\frac{C(\text{cuadrática})}{2\pi\epsilon_0}$
2	1.4423	1.444
4	0.721	0.733
10	0.434	0.475
100	0.217	0.346
1.5	2.4662	2.4667
1.1	10.492059	10.492065

"Por ejemplo, cuando la relación entre los radios es 2 a 1, tengo 1.444 que es una buena aproximación al valor verdadero 1.4423. Aun para b/a mayores, la aproximación sigue siendo buena —y es mucho, mucho mejor que la primera aproximación—. También es suficientemente buena —sólo difiere en 10 %— cuando b/a es como 10 a 1. Pero cuando la relación es de 100 a 1 —bueno, la cuestión se pone muy mal—, obtengo que C es 0.346 en vez de 0.217. Por otra parte, para una relación de los radios de 1.5, la respuesta es excelente, y para b/a igual a 1.1 la respuesta es 10.492065 en vez de 10.492059. Donde la respuesta debe ser buena, es muy buena.

"Les he dado este ejemplo, primero, para mostrarles el valor teórico del principio de mínima acción y de los principios de mínimo, en general, y segundo, para mostrarles su utilidad práctica —no sólo para calcular una capacidad cuando conocemos la respuesta correcta—. Para cualquier otra forma, pueden considerar un campo aproximado con algún parámetro desconocido, digamos α, que luego ajustan para obtener un mínimo. Pueden obtener resultados numéricos excelentes para problemas intratables por otros métodos.

19-2 Nota agregada después de la clase

"Quisiera agregar algo que no tuve tiempo de dar en clase. (Parece que siempre preparo más de lo que tengo tiempo de presentarles.) Como dije antes, me interesé en un problema mientras preparaba la clase. Desearía decirles de qué problema se trata. Entre los principios de mínimo que podía mencionar, noté que la mayoría provenía, en una u otra forma, del principio de mínima acción de la mecánica y la electrodinámica. Pero también hay una clase de principios que no. Por ejemplo, si hace pasar corrientes por un pedazo de material que obedece la ley de Ohm, las mismas se distribuyen dentro del pedazo de modo que la rapidez con que se genera calor sea lo menor posible. También podemos decir (si se mantienen condiciones isotérmicas) que la rapidez con que se genera energía es mínima. Ahora bien, este principio vale además, según la teoría clásica, para determinar la distribución de velocidades de los electrones que hay dentro de un metal por el que circula corriente. La distribución de velocidades no es exactamente la distribución de equilibrio [capítulo 40, volumen I; ecuación (40.6)] porque hay una deriva lateral. Se puede hallar la nueva distribución a partir

del principio de que es la distribución para una corriente dada para la cual la entropía desarrollada por segundo por las colisiones es lo más pequeña posible. No obstante, la verdadera descripción del comportamiento de los electrones debiera ser por medio de la mecánica cuántica. La pregunta es: ¿vale también el mismo principio de mínima generación de entropía cuando se describe la situación cuánticamente? Todavía no lo sé.

"Por supuesto que la pregunta es académicamente interesante. Estos principios son fascinantes y siempre vale la pena tratar de ver hasta dónde llega su generalidad. Pero también desde un punto de vista más práctico, *deseo* saberlo. Junto con unos colegas, he publicado un trabajo en el que calculamos aproximadamente por medio de la mecánica cuántica la resistencia eléctrica que experimenta un electrón que se mueve en un cristal iónico como el NaCl. [Feynman, Hellwarth, Iddings y Platzman, "Mobility of Slow Electrons in a Polar Crystal", *Phys. Rev.* **127**, 1004 (1962)]. Pero si existiera un principio de mínimo, podríamos usarlo para obtener resultados más precisos, como el principio de mínimo para la capacidad de un condensador nos permitió obtener esa precisión para la capacidad a pesar de que sólo teníamos un conocimiento aproximado del campo eléctrico."

20

Soluciones de las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre

20-1 Ondas en el espacio libre; ondas planas

En el capítulo 18 llegamos a obtener las ecuaciones de Maxwell en su forma completa. Todo lo que hay que saber acerca de la teoría clásica de los campos eléctricos y magnéticos se puede encontrar en las cuatro ecuaciones:

$$\begin{aligned} &\text{I.}\quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0} && \text{II.}\quad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\ &\text{III.}\quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0 && \text{IV.}\quad c^2\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0}+\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\end{aligned} \tag{20.1}$$

Cuando ponemos todas estas ecuaciones juntas, un nuevo fenómeno notable sucede: campos producidos por las cargas en movimiento pueden abandonar las fuentes y viajar a través del espacio. Consideremos un ejemplo especial en el cual se conecta rápidamente una hoja infinita de corriente. Después que la corriente ha estado durante un tiempo t, hay campos eléctricos y magnéticos uniformes extendiéndose hasta la distancia ct de la fuente. Supongamos que la hoja de corriente yace en el plano yz con una densidad de corriente superficial J viajando hacia la y positiva. El campo eléctrico tendrá solamente la componente y y el campo magnético la componente z. Las componentes del campo están dadas por:

$$E_y=cB_z=-\frac{J}{2\epsilon_0 c}, \tag{20.2}$$

para valores positivos de x menores que ct. Para valores grandes de x los campos son cero. Por supuesto, hay campos similares extendiéndose hasta la misma distancia de la hoja de corriente en la dirección x negativa. En la figura 20-1 mostramos una gráfica del módulo de los campos en función de x en el instante t. A medida que transcurre el tiempo, el "frente de onda" en ct se mueve hacia afuera en la dirección x con velocidad constante c.

Consideremos ahora la siguiente sucesión de eventos. Conectamos una corriente de intensidad unitaria por cierto tiempo, aumentamos repentinamente la intensidad de la corriente a tres unidades y la mantenemos constante en este valor. Entonces, ¿cuál es el aspecto de los campos? Podemos ver qué les sucede a los campos en la forma siguiente. Primero, imaginemos una corriente de intensidad unitaria que se conecta en un $t=0$ y se la deja constante para siempre. Los campos para x positiva están dados por la gráfica (a) de la figura 20-2. Luego preguntamos qué sucedería si conectáramos una corriente estacionaria de dos unidades en el tiempo t_1.

En este caso, los campos serán dos veces mayores que antes, pero se extenderán en x solamente la distancia $c(t-t_1)$, como se muestra en la parte (b) de la figura. Del mismo modo, cuando sumamos estas dos soluciones, utilizando el principio de superposición, encontramos que la suma de las dos fuentes es una corriente de una unidad para el tiempo desde cero a t_1 y una corriente de tres unidades para tiempos más grandes que t_1. En el tiempo t los campos variarán con x como se muestra en la parte (c) de la figura 20-2.

Ahora tomemos un problema más complicado. Consideremos una corriente que se conecta a una unidad por un tiempo, luego se la conecta a tres unidades y después se la apaga. ¿Cuáles son los campos con este tipo de corriente?

20-1 Ondas en el espacio libre; ondas planas
20-2 Ondas tridimensionales
20-3 Imaginación científica
20-4 Ondas esféricas

Revisar
Volumen I, capítulo 47
Sonido. La ecuación de onda
Volumen I, capítulo 28
Radiación electromagnética

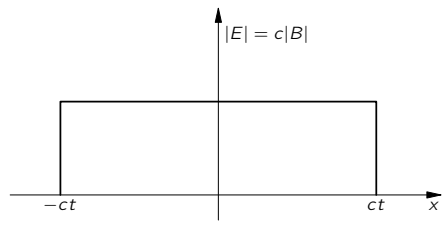


Figura 20-1. El campo eléctrico y magnético en función de x en el tiempo t después de conectar la hoja de corriente.

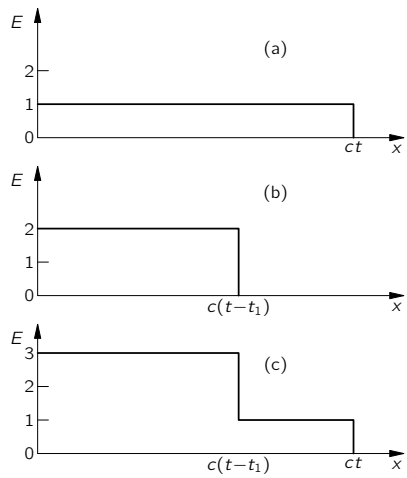


Figura 20-2. El campo eléctrico de una hoja de corriente. (a) Una unidad de corriente conectada en $t=0$; (b) Dos unidades de corrientes conectadas en $t=t_1$; (c) Superposición de (a) y (b).

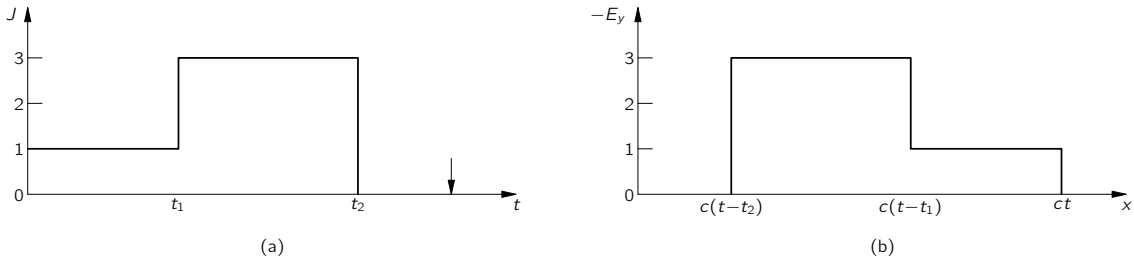


Figura 20-3. Si la intensidad de la fuente de corriente varía como se muestra en (a), entonces en el tiempo t indicado por la flecha, el campo eléctrico en función de x es como se muestra en (b).

Podemos encontrar la solución de la misma manera —sumando las soluciones de tres problemás separados—. En primer lugar, hallamos los campos para un escalón de corriente de intensidad unitaria. (Ya hemos resuelto ese problema.) En segundo lugar, buscamos los campos producidos por un escalón de corriente de dos unidades. Finalmente, hallamos los campos de un escalón de corriente de *menos* tres unidades. Cuando sumemos las tres soluciones, tendremos una corriente de una unidad de intensidad desde $t = 0$ hasta un momento más tarde, digamos t_1, luego tres unidades de intensidad hasta un tiempo t_2 más tarde y después no hay corriente —es decir, es cero—. La figura 20-3(a) muestra una gráfica de la corriente en función del tiempo. Cuando sumamos las tres soluciones para el campo eléctrico, encontramos que su variación con x en un instante dado t, es como se muestra en la figura 20-3(b). El campo es una representación exacta de la corriente. La distribución de campo en el espacio es una gráfica interesante de la variación de la corriente con el tiempo —sólo que dibujada al revés—. A medida que pasa el tiempo, la gráfica se aleja a velocidad c, así que hay una gota pequeña de campo que viaja hacia la x positiva, la cual contiene en forma detallada y completa la historia de todas las variaciones de corriente. Si estuviéramos a kilómetros de distancia, podríamos deducir exactamente de la variación del campo eléctrico o magnético cómo ha variado la corriente en la fuente.

También notarán que mucho tiempo después de haber cesado completamente toda la actividad en la fuente, cuando todas las cargas y corrientes son cero, el bloque de campo continúa viajando a través del espacio. Tenemos una distribución de campos eléctricos y magnéticos que existen independientemente de cualesquiera cargas o corrientes. Ése es el nuevo efecto que proviene del conjunto completo de las ecuaciones de Maxwell. Si queremos podemos dar una representación matemática completa del análisis hecho, escribiendo que el campo eléctrico en un punto dado y en un instante dado es proporcional a la corriente en la fuente, solamente que no en el *mismo* instante, sino en el instante *anterior* $t - x/c$. Podemos describir:

$$E_y(t) = -\frac{J(t - x/c)}{2\epsilon_0 c}. \tag{20.3}$$

Créanlo o no, ya derivamos esta misma ecuación desde otro punto de vista en el volumen I, cuando tratamos la teoría del índice de refracción. Luego tuvimos que hallar qué campos producían una capa delgada de dipolos oscilantes en una hoja de material dieléctrico con los dipolos puestos en movimiento por el campo eléctrico de una onda electromagnética entrante. Nuestro problema fue calcular los campos combinados de la onda original y las ondas radiadas por los dipolos oscilantes. ¿Cómo hemos podido calcular los campos producidos por las cargas en movimiento cuando no teníamos las ecuaciones de Maxwell? En ese tiempo tomamos como punto de partida (sin ninguna derivación) una fórmula para los campos de radiación producidos a grandes distancias por una carga puntual acelerada. Si observan en el capítulo 31 del volumen I, verán que la ecuación (31.9) es justamente lo mismo que la ecuación (20.3) que hemos escrito aquí.

Aunque nuestra derivación anterior fue correcta solamente a grandes distancias de la fuente, ahora vemos que el mismo resultado sigue siendo correcto justo a un lado de la fuente.

Ahora discutiremos, en una forma general, el comportamiento de campos eléctricos y magnéticos en el espacio vacío lejos de las fuentes, dicho de otro modo, de las corrientes y las cargas. Muy cerca de las fuentes —lo suficientemente cerca como para que durante el retardo de transmisión, la fuente no haya tenido tiempo de cambiar mucho— son muy parecidos a los que hemos encontrado en lo que llamamos casos electrostáticos o magnetostáticos. Sin embargo, si nos alejamos a una distancia lo suficientemente grande, tal que los retardos se vuelvan importantes, la naturaleza de los campos puede ser radicalmente diferente de las soluciones encontradas. En un sentido, los campos empiezan a tomar un carácter particular cuando se van lejos de todas las fuentes. Por lo tanto, podemos empezar discutiendo el comportamiento de los campos en una región donde no hay ni corrientes ni cargas.

Supongan que preguntamos: ¿qué clase de campos puede haber en las regiones donde ρ y $\boldsymbol{j}$ son cero? En el capítulo 18 vimos que la física de las ecuaciones de Maxwell también se podría expresar en función de ecuaciones diferenciales para los potenciales escalar y vectorial:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{20.4}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0 c^2}. \tag{20.5}$$

Si ρ y $\boldsymbol{j}$ son cero, estas ecuaciones toman la forma sencilla

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0, \tag{20.6}$$

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0. \tag{20.7}$$

Por lo tanto, en el espacio libre el potencial escalar ϕ y cada componente del potencial vectorial $\boldsymbol{A}$ satisfacen la misma ecuación matemática. Supongan que ψ (psi) represente cualquiera de las cuatro cantidades ϕ, A_x, A_y, A_z; queremos investigar la solución general de la ecuación siguiente:

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \tag{20.8}$$

Esta ecuación se llama ecuación de onda tridimensional —tridimensional, porque la función ψ debe depender, en general, de x, y y z, y necesitamos preocuparnos de las variaciones en las tres coordenadas—. Esto se aclara si escribimos explícitamente los tres términos del operador laplaciano:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \tag{20.9}$$

En el espacio libre, los campos eléctrico $\boldsymbol{E}$ y magnético $\boldsymbol{B}$ también satisfacen la ecuación de onda. Por ejemplo, ya que $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$, podemos obtener una ecuación diferencial para $\boldsymbol{B}$ tomando el rotacional de la ecuación (20.7). El laplaciano es un operador escalar, entonces el orden de las operaciones laplaciano y rotacional se puede intercambiar:

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\nabla^2\boldsymbol{A}) = \nabla^2(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = \nabla^2\boldsymbol{B}.$$

Igualmente, el orden de las operaciones rotacional y $\partial/\partial t$ se puede intercambiar:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}.$$

Usando estos resultados, obtenemos la ecuación diferencial siguiente para $\boldsymbol{B}$:

$$\nabla^2\boldsymbol{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2} = 0. \tag{20.10}$$

Así, cada componente del campo magnético $\boldsymbol{B}$ satisface la ecuación de onda tridimensional. Igualmente, usando el hecho de que $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \partial\boldsymbol{A}/\partial t$, resulta que el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ en el espacio libre también satisface la ecuación de onda tridimensional:

$$\nabla^2\boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{20.11}$$

Todos nuestros campos electromagnéticos satisfacen la misma ecuación de onda, ecuación (20.8). Bien podemos preguntar: ¿cuál es la solución más general de esta ecuación? No obstante, antes de abordar dicha pregunta, consideraremos primero qué se puede decir, en general, acerca de las soluciones donde nada varía ni en y ni en z. (Siempre tomen en primer lugar un caso fácil de modo que puedan ver lo que está sucediendo y así puedan avanzar a casos más complicados.) Supongamos que los módulos de los campos dependen solamente de x —que no hay *variaciones* de los campos con y y z—. Por supuesto, una vez más estamos considerando ondas planas. Sería de esperar que obtuviéramos algunos resultados como los de la sección anterior. En efecto, encontraremos precisamente las mismas respuestas. Podrían preguntar: "¿por qué hacerlo todo otra vez?" Es importante hacerlo nuevamente, primero, porque no demostramos que las ondas que encontramos eran las soluciones más generales para ondas planas, y segundo, porque sólo hallamos los campos provenientes de un tipo muy particular de fuente de corriente. Ahora nos preguntamos ¿cuál es el tipo más general de onda unidimensional que puede haber en el espacio libre? No podemos hallarlo viendo qué sucede para esta o aquella fuente particular, sino trabajando con mayor generalidad. Además, trabajaremos ahora con ecuaciones diferenciales en lugar de formas integrales. Aunque encontraremos los mismos resultados, es una forma de ir practicando uno y otro métodos para demostrar que se llega a lo mismo por cualquier camino que sigan. Deben estar preparados para utilizar todo método, porque cuando tengan un problema difícil, a menudo se darán cuenta que sólo uno de los varios caminos se puede tratar.

Podríamos considerar directamente la solución de la ecuación de onda para algunas cantidades electromagnéticas. En su lugar, queremos empezar desde el comienzo con las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre de modo que puedan ver su estrecha relación con las ondas electromagnéticas. Así pues, empezamos con las ecuaciones (20.1), poniendo las cargas y las corrientes iguales a cero. Se transforman en

$$\begin{aligned}
&\text{I.} \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = 0\\
&\text{II.} \quad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\
&\text{III.} \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0\\
&\text{IV.} \quad c^2\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}
\end{aligned} \tag{20.12}$$

Escribamos la primera ecuación en componentes:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \tag{20.13}$$

Estamos suponiendo que no hay variación con y y z, así que los dos últimos términos son cero. Entonces esta ecuación nos dice que

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0. \tag{20.14}$$

Su solución es que E_x, la componente del campo eléctrico en la dirección x, es una constante en el espacio. Si tienen en cuenta IV de (20.12), suponiendo que no hay

variación alguna en $\boldsymbol{B}$ ni en y ni en z, pueden ver que E_x también es constante en el tiempo. Ese campo podría ser el campo CC uniforme de unas placas de condensador cargadas y separadas una gran distancia. No estamos interesados en tales campos estáticos sin mayor importancia, actualmente estamos interesados solamente en campos dinámicamente variables, para campos *dinámicos*, $E_x = 0$.

Obtenemos un importante resultado, que para la propagación de ondas planas en cualquier dirección, *el campo eléctrico debe ser perpendicular a la dirección de propagación.* Por supuesto, éste puede variar en una forma complicada con la coordenada x.

El campo $\boldsymbol{E}$ transversal siempre se puede resolver en dos componentes, por ejemplo, la componente y y la componente z. Por lo tanto, resolvamos primero un caso en el cual el campo eléctrico sólo tiene una componente transversal. Tomemos, primero, un campo eléctrico que siempre esté en la dirección y, con la componente z nula. Evidentemente, si resolvemos este problema también podemos resolver el caso en que el campo eléctrico siempre esté en la dirección z. La solución general siempre se puede expresar como superposición de dos de tales campos.

Cuán fáciles son ahora nuestras ecuaciones. La única componente del campo eléctrico que no es cero es E_y y todas las derivadas —excepto x— son cero. Las otras ecuaciones de Maxwell se vuelven entonces muy sencillas.

Consideremos ahora la segunda ecuación de Maxwell [II de la ecuación (20.12)]. Escribiendo las componentes del rotacional de $\boldsymbol{E}$, tenemos

$$(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0,$$

$$(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})_y = \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0,$$

$$(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

La componente x de $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}$ es cero porque las derivadas respecto a y y z son cero. Además, la componente y también es cero; el primer término es cero porque la derivada respecto a z es cero, y el segundo término es cero porque E_z es cero. La única componente del rotacional de $\boldsymbol{E}$ que no es cero es la componente z, la cual es igual a $\partial E_y/\partial x$. Igualando las tres componentes de $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}$ a las correspondientes de $-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$, podemos concluir lo siguiente:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial B_y}{\partial t} = 0. \tag{20.15}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x}. \tag{20.16}$$

Como la componente x del campo magnético y la componente y del campo magnético tienen derivada nula respecto al tiempo, estas dos componentes son simplemente campos constantes y corresponden a las soluciones magnetostáticas que encontramos anteriormente. Puede que alguien haya dejado algún imán permanente cerca de donde las ondas se están propagando. Ignoraremos estos campos constantes y pondremos B_x y B_y iguales a cero.

A propósito, ya habíamos concluido que la componente x de $\boldsymbol{B}$ sería cero por una razón diferente. Como la divergencia de $\boldsymbol{B}$ es cero (por la tercera ecuación de Maxwell), aplicando los mismos razonamientos usados anteriormente para el campo eléctrico, habíamos concluido que la componente longitudinal del campo magnético no puede tener ninguna variación con x. Estamos ignorando tales campos uniformes en nuestras soluciones de onda, habíamos puesto B_x igual a cero. En ondas electromagnéticas planas el campo $\boldsymbol{B}$, así como el campo $\boldsymbol{E}$, debe ser perpendicular a la dirección de propagación.

La ecuación (20.16) nos da la proposición adicional de que si el campo eléctrico tiene solamente la componente y, el campo magnético tendrá solamente la componente z. De modo que $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ *son perpendiculares.* Esto es exactamente lo que sucedió en la onda especial que ya hemos considerado.

Ahora estamos listos para usar la última de las ecuaciones de Maxwell para el espacio libre [IV de la ecuación (20.12)]. Escribiendo en componentes, tenemos

$$\begin{aligned} c^2(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})_x &= c^2\,\frac{\partial B_z}{\partial y} - c^2\,\frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial t},\\ c^2(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})_y &= c^2\,\frac{\partial B_x}{\partial z} - c^2\,\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial t},\\ c^2(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})_z &= c^2\,\frac{\partial B_y}{\partial x} - c^2\,\frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{\partial E_z}{\partial t}. \end{aligned} \tag{20.17}$$

De las seis derivadas de las componentes de $\boldsymbol{B}$, solamente el término $\partial B_z/\partial x$ no es igual a cero. Así pues, las tres ecuaciones nos dan simplemente

$$-\,c^2\,\frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{\partial E_y}{\partial t}. \tag{20.18}$$

El resultado de todo nuestro trabajo es que solamente una componente del campo eléctrico y una del campo magnético no son cero, y que estas componentes deben satisfacer las ecuaciones (20.16) y (20.18). Se pueden combinar estas dos ecuaciones en una, si derivamos la primera respecto a x y la segunda respecto a t; el primer miembro de las dos ecuaciones será el mismo (excepto por el factor c^2). Encontramos, pues, que E_y satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0. \tag{20.19}$$

Anteriormente hemos visto la misma ecuación diferencial, cuando estudiamos la propagación de sonido. Es la ecuación de onda para ondas unidimensionales.

Deben notar que en el proceso de nuestra derivación hemos encontrado algo *más* que lo que la ecuación (20.11) contiene. Las ecuaciones de Maxwell nos han dado la información adicional de que las ondas electromagnéticas tienen solamente componentes de campo perpendiculares a la dirección de propagación.

Repasemos lo que conocemos acerca de las soluciones de una ecuación de onda unidimensional. Si cualquier cantidad ψ satisface la ecuación de onda unidimensional

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0, \tag{20.20}$$

entonces una solución posible es una función $\psi(x,t)$ de la forma

$$\psi(x,t) = f(x-ct), \tag{20.21}$$

esto es, alguna función de la *única* variable $(x-ct)$. La función $f(x-ct)$ representa un diagrama "rígido" en x que viaja hacia x positiva a la velocidad c (véase figura 20-4). Por ejemplo, siempre que la función f tiene un máximo cuando su argumento es cero, entonces para $t=0$ el máximo de ψ será en $x=0$. Algún tiempo después, digamos que $t=10$, ψ tendrá su máximo en $x=10c$. A medida que transcurre el tiempo, el máximo se moverá hacia la x positiva a la velocidad c.

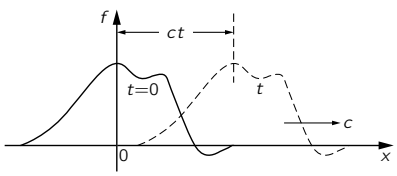


Figura 20-4. La función $f(x-ct)$ representa una "forma" constante que viaja hacia la x positiva con la velocidad c.

Algunas veces es más conveniente decir que una solución de la ecuación de onda unidimensional es una función de $(t-x/c)$. No obstante, estamos indicando lo mismo porque cualquier función de $(t-x/c)$ también es una función de $(x-ct)$:

$$F(t-x/c) = F\left[-\frac{x-ct}{c}\right] = f(x-ct).$$

Demostremos que $f(x-ct)$ realmente es una solución de la ecuación de onda. Como es función de una sola variable —la variable $(x-ct)$— representaremos por f' la derivada de f respecto a su variable y con f'' la segunda derivada de f. Derivando la ecuación (20.21) respecto a x, tenemos

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = f'(x-ct),$$

ya que la derivada de $(x - ct)$ respecto a x es 1. La segunda derivada de ψ respecto a x es claramente

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = f''(x - ct). \tag{20.22}$$

Derivando ψ respecto a t, encontramos

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi}{\partial t} &= f'(x - ct)(-c),\\ \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} &= +c^2 f''(x - ct).\end{aligned} \tag{20.23}$$

Vemos que ψ realmente satisface la ecuación de onda unidimensional.

Puede que se estén preguntando: "Si tengo una ecuación de onda, ¿cómo sé que debo tomar $f(x - ct)$ como solución? No me gusta este método de ir de adelante hacia atrás. ¿No hay alguna forma de ir de atrás hacia *adelante* para encontrar la solución?" Bien, una buena forma de ir de atrás hacia adelante es conocer la solución. Es posible "cocinar" un razonamiento matemático aparentemente de atrás hacia adelante, especialmente porque sabemos cuál deberá ser la solución, pero con una ecuación tan sencilla como ésta no necesitamos estar jugando. Dentro de poco llegarán a un punto tal que cuando observen la ecuación (20.20), poco más o menos verán simultáneamente $\psi = f(x - ct)$ como una solución. (Como ahora cuando ven la integral de $x^2\,dx$, saben inmediatamente que la respuesta es $x^3/3$.)

En realidad, también deben notar un poco más. No sólo cualquier función de $(x - ct)$ es una solución, porque cualquier función de $(x + ct)$ también lo es. Como la ecuación de onda contiene solamente c^2, al cambiar el signo de c no se altera nada. En realidad, la solución *más general* de la ecuación de onda unidimensional es la suma de dos funciones arbitrarias, una de $(x - ct)$ y la otra de $(x + ct)$:

$$\psi = f(x - ct) + g(x + ct). \tag{20.24}$$

El primer término representa una onda viajando hacia la x positiva, y el segundo término una onda arbitraria viajando hacia la x negativa. La solución general es la superposición de las dos ondas, las cuales existen simultáneamente.

Les dejaremos la siguiente cuestión para que se diviertan y piensen en ella. Tomen una función ψ de la forma siguiente:

$$\psi = \cos kx \cos kct.$$

Esta ecuación no está en la forma de una función de $(x-ct)$ o de $(x+ct)$. Sin embargo, se puede demostrar que esta función es una solución de la ecuación de onda por sustitución directa en la ecuación (20.20). ¿Cómo podemos decir entonces que la solución general es de la forma de la ecuación (20.24)?

Aplicando nuestras conclusiones acerca de la solución de la ecuación de onda a la componente y del campo eléctrico E_y, concluimos que E_y puede variar con x en cualquier forma arbitraria. No obstante, los campos que existen, siempre se pueden considerar como la suma de dos diagramas. Una onda viaja por el espacio en una dirección a una velocidad c, con un campo magnético asociado perpendicular al campo eléctrico; otra onda viaja en la dirección opuesta a la misma velocidad. Tales ondas corresponden a las ondas electromagnéticas que conocemos —luz, ondas de radio, radiación infrarroja, radiación ultravioleta, rayos X, etc.—. En el volumen I discutimos detalladamente la radiación de la luz. Como todo lo que aprendimos allí se aplica a cualquier onda electromagnética, no necesitamos considerar aquí el comportamiento de estas ondas con mucho detalle.

Quizá deberíamos agregar ciertas observaciones sobre la cuestión de la polarización de las ondas electromagnéticas. En nuestra solución escogimos considerar

el caso especial en el cual el campo eléctrico tiene solamente la componente y. Claramente hay otra solución correspondiente a ondas que viajan en la dirección más o menos x, con un campo eléctrico que tiene sólo la componente z. Como las ecuaciones de Maxwell son lineales, la solución general para ondas unidimensionales propagándose en la dirección x es la suma de ondas de E_y y de E_z. Esta solución general está resumida en las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= (0, E_y, E_z)\\
E_y &= f(x-ct) + g(x+ct)\\
E_z &= F(x-ct) + G(x+ct)\\
\boldsymbol{B} &= (0, B_y, B_z)\\
cB_z &= f(x-ct) - g(x+ct)\\
cB_y &= -F(x-ct) + G(x+ct).
\end{aligned} \tag{20.25}$$

Tales ondas electromagnéticas tienen un vector $\boldsymbol{E}$ cuya dirección no es constante sino que gira de manera arbitraria en el plano yz. En cada punto el campo magnético es perpendicular al campo eléctrico y a la dirección de propagación.

Si solamente hay ondas que viajan en una dirección, digamos que en la dirección x positiva hay una regla sencilla que nos da la orientación relativa de los campos eléctrico y magnético. La regla es que el producto vectorial $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ —que, por supuesto, es un vector perpendicular a $\boldsymbol{E}$ y a $\boldsymbol{B}$— apunta en la dirección en la cual la onda está viajando. Si $\boldsymbol{E}$ es rotado fijando $\boldsymbol{B}$ con un tornillo de rosca derecha, el tornillo apunta en la dirección de la velocidad de onda. (Más adelante veremos que el vector $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ tiene un significado físico especial: es un vector que describe el flujo de energía en un campo electromagnético.)

20-2 Ondas tridimensionales

Ahora queremos volver al asunto de las ondas tridimensionales. Ya hemos visto que el vector $\boldsymbol{E}$ satisface la ecuación de onda. También se llega fácilmente al mismo resultado razonando directamente a partir de las ecuaciones de Maxwell. Supongan que partimos de la ecuación

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

y tomamos el rotacional de ambos miembros:

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}). \tag{20.26}$$

Recordarán que el rotacional de cualquier vector se puede escribir como la suma de dos términos, en uno de los cuales aparece la divergencia y en el otro el laplaciano.

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}) - \nabla^2\boldsymbol{E}.$$

En el espacio libre, sin embargo, la divergencia de $\boldsymbol{E}$ es cero, así que solamente queda el laplaciano. Además, según la cuarta ecuación de Maxwell en el espacio libre [ecuación (20.12)] la derivada respecto al tiempo de $c^2\,\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}$ es la segunda derivada de $\boldsymbol{E}$ respecto a t:

$$c^2\,\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) = \frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}.$$

Entonces la ecuación (20.26) se transforma en

$$\nabla^2\boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2},$$

que es la ecuación de onda tridimensional. Escrita explícitamente en toda su pompa, esta ecuación es, por supuesto,

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0. \tag{20.27}$$

¿Cómo encontraremos la solución de onda general? La respuesta es que todas las soluciones de la ecuación de onda tridimensional se pueden representar como una superposición de las soluciones unidimensionales que ya hemos encontrado. Obtuvimos la ecuación para ondas que se mueven en la dirección x suponiendo que el campo no depende ni de y ni de z. Evidentemente hay otras soluciones en las cuales los campos no dependen ni de x ni de z, representando ondas que viajan en la dirección y. Luego hay soluciones que no dependen ni de x ni de y, representando ondas que viajan en la dirección z. O, en general, ya que hemos escrito nuestras ecuaciones en forma vectorial, la ecuación de onda tridimensional puede tener soluciones en forma de ondas planas que se mueven en cualquier dirección. De nuevo, puesto que las ecuaciones son lineales, podemos tener simultáneamente tantas ondas planas como queramos, viajando en muchas direcciones diferentes. De este modo, la solución más general de la ecuación de onda tridimensional es una superposición de toda clase de ondas planas moviéndose en todas direcciones.

Intenten imaginar cuál es el aspecto de los campos eléctrico y magnético que están en este salón de clase. Ante todo, hay un campo magnético estático; es producido por las corrientes que hay en el interior de la Tierra —esto es, el campo magnético estático de la Tierra—. Luego hay algunos campos eléctricos casi estáticos irregulares producidos quizá por cargas eléctricas generadas por la fricción de varias personas moviéndose en sus sillas y friccionando las mangas de sus trajes contra los brazos de las sillas. Luego hay otros campos magnéticos producidos por corrientes oscilantes en la red eléctrica —campos que varían a una frecuencia de 60 ciclos por segundo, en sincronismo con el generador de la presa de Boulder—. Pero más interesantes son los campos eléctricos y magnéticos que varían a frecuencias mucho más altas. Por ejemplo, cuando la luz viaja de la ventana al piso y de pared a pared, hay pequeños serpenteos de campos eléctricos y magnéticos moviéndose a cerca de 300 000 kilómetros por segundo. Luego hay ondas infrarrojas viajando de la pared caliente al pizarrón frío. Y hemos olvidado la luz ultravioleta, los rayos X y las ondas de radio que viajan por el salón.

Volando por el salón hay ondas electromagnéticas que llevan música de una orquesta de jazz. Hay ondas moduladas por una serie de impulsos que representan imágenes de lo que sucede en otras partes del mundo, o de aspirinas imaginarias disolviéndose en estómagos imaginarios. Para demostrar la realidad de estas ondas sólo es necesario conectar un equipo electrónico que convierta éstas en imágenes y sonidos.

Si entramos en mayores detalles para analizar hasta los serpenteos más chicos, hay diminutas ondas electromagnéticas que han entrado al salón provenientes de grandes distancias. Ahora hay diminutas oscilaciones del campo eléctrico, cuyas crestas están a 30 centímetros una de otra y que vienen desde millones de kilómetros de distancia, transmitidas a la Tierra desde el vehículo espacial *Mariner II* que acaba de pasar por Venus. Sus señales llevan resúmenes de información tomada por él acerca de los planetas (información obtenida de las ondas electromagnéticas que viajaron del planeta al vehículo espacial).

Hay serpenteos muy diminutos de campos eléctricos y magnéticos que son ondas producidas a miles de millones de años luz —de galaxias en el rincón más remoto del universo—. Se ha demostrado que esto es verdad "llenando el salón con alambres" —construyendo antenas tan grandes como el salón—. Esas ondas de radio se han detectado de lugares del espacio más allá del alcance de los más grandes telescopios ópticos. Incluso hasta los telescopios ópticos son simplemente recolectores de ondas electromagnéticas. Lo que llamamos estrellas son sólo inferencias extraídas de la única realidad física que hasta ahora hemos obtenido de ellas —a partir de un cuidadoso estudio de las ondulaciones interminablemente complejas de los campos eléctricos y magnéticos que nos llegan a la Tierra—.

Por supuesto, hay más: los campos producidos por relámpagos a kilómetros de distancia, los campos de las partículas cargadas de los rayos cósmicos al atravesar

el salón como bala, y más y más. ¡Qué cosa tan complicada es el campo eléctrico en el espacio a su alrededor! No obstante, siempre satisface la ecuación de onda tridimensional.

20-3 Imaginación científica

Les he pedido que intenten visualizar estos campos magnéticos y eléctricos. ¿Saben qué hacen? ¿Saben cómo? ¿Cómo imagino *yo* el campo eléctrico y magnético? ¿Qué veo *yo* realmente? ¿Cuáles son las exigencias de la imaginación científica? ¿Es algo diferente a imaginar que el salón está lleno de ángeles invisibles? No, no es como imaginar ángeles invisibles. Se necesita un grado mayor de imaginación para comprender el campo electromagnético que para comprender ángeles invisibles. ¿Por que? Porque para hacer comprensibles los ángeles invisibles, todo lo que tengo que hacer es alterar sus propiedades un *poquitito* —los hago ligeramente visibles y entonces puedo ver las formas de sus alas y sus cuerpos y sus halos—. Una vez que he logrado imaginar un ángel visible, la abstracción necesaria —que es tomar ángeles casi invisibles e imaginarlos completamente invisibles— es relativamente fácil. Ustedes dirán entonces: "profesor, deme una descripción aproximada de las ondas electromagnéticas, aunque sea ligeramente inexacta, de modo que yo también pueda verlas como puedo ver ángeles casi invisibles. Luego modificaré la imagen hasta llegar a la abstracción necesaria".

Lo siento, no puedo hacer eso. No sé cómo hacerlo. No tengo ninguna imagen de este campo electromagnético que sea precisa de algún modo. Sé lo que es el campo electromagnético desde hace algún tiempo —hace 25 años estuve en la misma posición que ustedes ahora y he tenido 25 años más de experiencia pensando en estas ondas serpenteantes—. Cuando empiezo a describir el movimiento del campo electromagnético por el espacio, hablo de los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$, agito mis brazos y se imaginan que los puedo ver. Les diré lo que veo. Veo algo así como líneas serpenteantes borrosas —aquí y allí hay un E y un B escritos sobre ellas en alguna forma y además algunas de las líneas tienen flechas—, una flecha aquí o allí que desaparece cuando la miro más atentamente. Cuando hablo de campos cortando el espacio, tengo una confusión terrible entre los símbolos que uso para describir los objetos y los objetos mismos. Realmente no puedo hacerme una imagen siquiera parecida a las ondas verdaderas. Así que si tienen alguna dificultad en formarse una imagen, no crean que es una dificultad poco común.

Nuestra ciencia presenta terribles exigencias a la imaginación. El grado de imaginación necesario es mucho más extremo que el necesario para algunas ideas antiguas. Las ideas modernas son mucho más difíciles de imaginar. Y usamos un montón de herramientas. Usamos ecuaciones y reglas matemáticas y construimos un montón de imágenes. De lo que me doy cuenta es que cuando hablo del campo electromagnético en el espacio, veo una especie de superposición de todos los diagramas que siempre he visto dibujados al respecto. No veo pequeños haces de líneas de campo corriendo por ahí porque me preocupa que si corriera a una velocidad diferente los haces desaparecerían. Y no siempre veo los campos eléctricos y magnéticos porque a veces pienso que debería haber formado una imagen con el potencial vectorial y el potencial escalar puesto que quizá sean ellos las cosas físicamente más significativas que serpentean.

Tal vez, ustedes dirán, la única esperanza es tomar un punto de vista matemático. ¿Y qué es un punto de vista matemático? Desde un punto de vista matemático hay un vector campo eléctrico y un vector campo magnético en cada punto del espacio; es decir, hay seis números asociados con cada punto. ¿Pueden imaginar seis números asociados con cada punto del espacio? Es muy difícil. ¿Pueden imaginar incluso *un* número asociado en cada punto? ¡Yo no puedo! Puedo imaginar cosas como la temperatura a cada punto del espacio. Eso sí parece comprensible. Hay una frialdad y un calor que varían de un lugar a otro. Pero honestamente no entiendo la idea de un *número* en cada punto.

Así pues, quizá deberíamos preguntar: ¿podemos representar el campo eléctrico por algo parecido a la temperatura, por ejemplo, como el desplazamiento de un pedazo de gelatina? Supongan que empezamos por imaginar que el mundo

estuviera lleno de una gelatina fina y que los campos representaran una distorsión —un estiramiento o torcedura digamos— de la gelatina. Entonces podríamos visualizar el campo. Después de "ver" cuál es su aspecto, sacaríamos la gelatina por abstracción. Durante muchos años eso es lo que la gente trató de hacer. Maxwell, Ampère, Faraday y otros trataron de comprender el electromagnetismo en esta forma. (A veces ellos llamaron "éter" a la gelatina abstracta.) Pero resulta que la tentativa de imaginar el campo electromagnético en esta forma era realmente estacionarse en la vía del progreso. Desafortunadamente estamos limitados a la abstracción, a usar instrumentos para detectar el campo, a usar símbolos matemáticos para describir el campo, etc. Sin embargo, en cierto sentido los campos son reales, porque después de haber terminado de perder el tiempo con las ecuaciones matemáticas —haciendo o no imágenes y dibujos, o tratando o no de visualizar los objetos— todavía podemos hacer que los instrumentos detecten las señales procedentes del *Mariner II* y hacer descubrimientos sobre galaxias a mil millones de kilómetros de distancia, y así sucesivamente.

Toda esta cuestión de la imaginación en ciencia a menudo es mal entendida por los que se dedican a otras disciplinas. Tratan de poner a prueba nuestra imaginación en la forma siguiente. Dicen: "Aquí tiene el cuadro de cierta persona en una situación. ¿Qué se imagina que sucederá luego?" Y cuando contestamos: "No me lo puedo imaginar", puede que piensen que tenemos muy poca imaginación. Pasan por alto el hecho de que todo lo que nos está *permitido* imaginar en ciencia debe ser *compatible con todo lo demás que conocemos:* los campos y las ondas de que hemos hablado no son simplemente pensamientos felices que somos libres de concebir como queramos, sino ideas que deben ser compatibles con todas las leyes conocidas de la física. No nos podemos permitir imaginar seriamente cosas que estén en contradicción evidente con las leyes conocidas de la naturaleza. Y así, nuestra clase de imaginación es un juego muy difícil. Se debe tener suficiente imaginación como para concebir algo que nunca se haya visto, que nunca se haya oído. Al mismo tiempo los pensamientos están confinados en una camisa de fuerza, por así decirlo, limitados por las condiciones que provienen de nuestro conocimiento de lo que realmente es la naturaleza. El problema de crear algo que sea nuevo, pero compatible con todas las cosas que se han visto antes, es una dificultad extrema.

Ya que estamos en el tema quiero hablar acerca de si alguna vez será posible imaginar la *belleza* que no podemos *ver*. Es una cuestión interesante. Cuando miramos un arco iris, nos parece bello. Todo el mundo dice: "Ah, un arco iris". (Pueden notar lo científico que soy. Tengo miedo de decirles que algo es bello porque no tengo una forma experimental de definirlo.) Pero ¿cómo describiríamos un arco iris si estuviésemos ciegos? *Estamos* ciegos cuando medimos el coeficiente de reflexión infrarroja del cloruro de sodio, o bien, cuando hablamos de las frecuencias de las ondas que vienen de alguna galaxia que no podemos ver —hacemos un diagrama, una gráfica—. Por ejemplo, para el arco iris, tal gráfica sería la intensidad de radiación en función de la longitud de onda medida con un espectrofotómetro para cada dirección del firmamento. Generalmente esas mediciones darían una curva que sería bastante chata. Luego, cierto día, alguien descubriría que para ciertas condiciones del tiempo y a cierto ángulo en el firmamento, el espectro de la intensidad en función de la longitud de onda se comportaría extrañamente, tendría una giba. Cuando el ángulo del instrumento se variara sólo un poquitito, el máximo de la giba se movería de una longitud de onda a otra. Después un día la revista de física de los ciegos publicaría un artículo técnico con el título "La intensidad de radiación en función del ángulo bajo ciertas condiciones del tiempo". En este artículo aparecería una gráfica como la de la figura 20-5. Tal vez el autor señalaría que para ángulos grandes hubo más radiación a longitudes de ondas largas, mientras que para ángulos pequeños el máximo de la radiación caía en longitudes de ondas más cortas. (Desde nuestro punto de vista, diríamos que a 40° la luz es predominantemente verde y a 42° la luz es predominantemente roja.)

Ahora bien, ¿encontramos bella la gráfica de la figura 20-5? Contiene muchos más detalles de los que percibimos cuando miramos un arco iris, porque nuestros

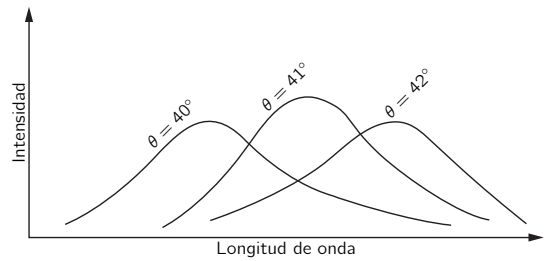


Figura 20-5. La intensidad de las ondas electromagnéticas en función de la longitud de onda para tres ángulos (medidas en la dirección opuesta al Sol), observada solamente con ciertas condiciones meteorológicas.

ojos no pueden ver los detalles exactos de la forma de un espectro. Sin embargo, el ojo encuentra que el arco iris es hermoso. ¿Tenemos suficiente imaginación para ver en las curvas espectrales la misma belleza que vemos al mirar directamente el arco iris? No lo sé.

Pero supongan que tengo una gráfica del coeficiente de reflexión de un cristal de cloruro de sodio en función de la longitud de onda en el infrarrojo y también en función del ángulo. Tendría una representación de cómo aparecería a mis ojos si vieran en el infrarrojo —tal vez algún "verde" refulgente y brillante, mezclado con las reflexiones de la superficie en un "rojo metálico"—. Sería bello, pero no sé si alguna vez podré mirar una gráfica del coeficiente de reflexión del NaCI medido por algún instrumento y decir que tiene la misma belleza.

Por otra parte, aunque no podamos ver belleza en el resultado particular de una medición *podemos* ya pretender ver una cierta belleza en las ecuaciones que describen las leyes físicas generales. Por ejemplo, en la ecuación de onda (20.9) hay algo bello en la regularidad de aparición de la x, la y, la z y la t. Y esta bella simetría de aparición de x, y, z y t sugiere a la mente una gran belleza que tiene que ver con las cuatro dimensiones, la posibilidad de que el espacio tenga simetría de cuatro dimensiones, la posibilidad de analizar esto y el desarrollo de la teoría especial de la relatividad. Hay, pues, belleza intelectual abundante asociada con las ecuaciones.

20-4 Ondas esféricas

Hemos visto que hay soluciones de la ecuación de onda que corresponden a ondas planas y que cualquier onda electromagnética se puede describir como una superposición de muchas ondas planas. En ciertos casos especiales, sin embargo, es más conveniente describir el campo de ondas en una forma matemática diferente. Ahora discutiremos la teoría de ondas esféricas —ondas que corresponden a superficies esféricas que se extienden desde algún centro—. Cuando se lanza una piedra en un lago, los movimientos se extienden en ondas circulares sobre la superficie —son ondas bidimensionales—. Una onda esférica es algo similar excepto que se extiende en tres dimensiones.

Antes de empezar a describir las ondas esféricas necesitamos un poco de matemática. Supongan que tenemos una función que depende solamente de la distancia radial r desde un origen determinado —en otras palabras, una función esféricamente simétrica—. Llamaremos $\psi(r)$ a la función donde por r entendemos

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

la distancia radial al origen. Para hallar qué funciones $\psi(r)$ satisfacen la ecuación de onda, necesitamos una expresión para el laplaciano de ψ. Así pues, queremos encontrar la suma de las derivadas de ψ respecto a x, y y z. Usaremos la notación de que $\psi'(r)$ representa la derivada de ψ respecto a r y $\psi''(r)$ la segunda derivada de ψ respecto a r.

Hallaremos primero las derivadas respecto a x. La derivada primera es

$$\frac{\partial\psi(r)}{\partial x} = \psi'(r)\,\frac{\partial r}{\partial x}.$$

La derivada segunda de ψ respecto a x es

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \psi''\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \psi'\,\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}.$$

Podemos calcular las derivadas parciales de r respecto a x de

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right).$$

Por tanto, la derivada segunda de ψ, respecto a x es

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^2}\,\psi'' + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{x^2}{r^2}\right)\psi'. \tag{20.28}$$

De igual modo,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^2}\,\psi'' + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right)\psi', \tag{20.29}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = \frac{z^2}{r^2}\,\psi'' + \frac{1}{r}\left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right)\psi'. \tag{20.30}$$

El laplaciano es la suma de estas tres derivadas. Recordando que $x^2+y^2+z^2 = r^2$, obtenemos

$$\nabla^2\psi(r) = \psi''(r) + \frac{2}{r}\,\psi'(r). \tag{20.31}$$

A menudo es más conveniente escribir esta ecuación en la forma siguiente:

$$\nabla^2\psi(r) = \frac{1}{r}\,\frac{d^2}{dr^2}(r\psi). \tag{20.32}$$

Si llevan a cabo la derivación indicada en la ecuación (20.32) verán que el segundo miembro es igual al de la ecuación (20.31).

Si queremos considerar los campos de simetría esférica que se pueden propagar como ondas esféricas, nuestra cantidad de campo debe ser una función de r y de t. Así, supongan que preguntamos entonces cuáles funciones $\psi(r,t)$ son soluciones de la ecuación de onda tridimensional

$$\nabla^2\psi(r,t) - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\psi(r,t) = 0. \tag{20.33}$$

Como $\psi(r,t)$ depende de las coordenadas espaciales solamente a través de r, podemos usar la ecuación para el laplaciano encontrada antes, ecuación (20.32). Sin embargo, para ser precisos, como ψ también es función de t, debemos escribir las derivadas respecto a r como derivadas parciales. Así, la ecuación de onda se transforma en

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}\,(r\psi) - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\psi = 0.$$

Ahora debemos resolver esta ecuación, que parece ser mucho más complicada que para el caso de ondas planas. Pero notemos que si multiplicamos esta ecuación por r, obtenemos

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\,(r\psi) - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,(r\psi) = 0. \tag{20.34}$$

Esta ecuación nos dice que la función $r\psi$ satisface la ecuación de onda unidimensional en la variable r. Usando el principio general al cual a menudo hemos dado énfasis, que ecuaciones iguales siempre tienen soluciones iguales, sabemos que si $r\psi$ es una función de $(r - ct)$ solamente, será una solución de la ecuación (20.34). Sabemos así que las ondas esféricas deben tener la forma

$$r\psi(r,t) = f(r - ct).$$

O bien, como hemos visto anteriormente, podemos decir igualmente que $r\psi$ puede tener la forma

$$r\psi = f(t - r/c).$$

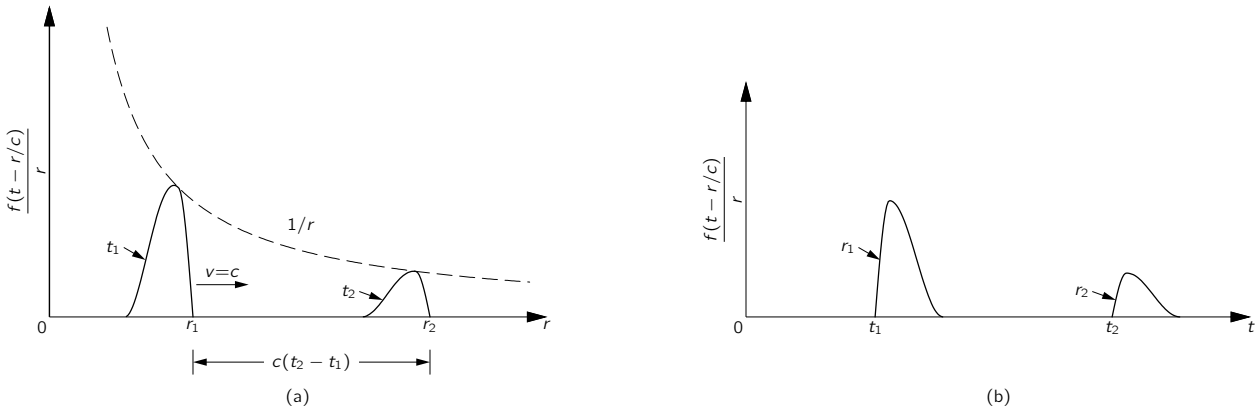


Figura 20-6. Una onda esférica $\psi = f(t - r/c)/r$. (a) ψ en función de r para $t = t_1$ y la misma onda para un tiempo posterior t_2. (b) ψ en función de t para $r = r_1$ y la misma onda vista en r_2.

Dividiendo entre r, encontramos que la cantidad de campo ψ (cualquiera que sea) tiene la forma siguiente:

$$\psi = \frac{f(t - r/c)}{r}. \tag{20.35}$$

Tal función representa una onda esférica general viajando hacia afuera desde un origen a la velocidad c. Si nos olvidamos de la r en el denominador por un momento, entonces la amplitud de la onda en función de la distancia al origen en un tiempo dado tiene una cierta forma que viaja hacia afuera a la velocidad c. No obstante, el factor r en el denominador indica que la amplitud de la onda decrece proporcionalmente a $1/r$ a medida que la onda se propaga. En otras palabras, a diferencia de una onda plana en la cual la amplitud permanece constante a medida que la onda se propaga, en una onda esférica la amplitud decrece uniformemente, como lo muestra la figura 20-6. Este efecto es fácil de entender con un razonamiento físico simple.

Sabemos que la densidad de energía en una onda depende del cuadrado de la amplitud de onda. A medida que la onda se extiende, su energía se extiende y en áreas cada vez mayores proporcionales al cuadrado de la distancia radial. Si la energía total se conserva, la densidad de energía decrece en $1/r^2$ y la amplitud de la onda debe decrecer como $1/r$. Así pues la ecuación (20.35) es la forma "razonable" de una onda esférica.

Hemos pasado por alto la segunda solución posible de la ecuación de onda unidimensional:

$$r\psi = g(t + r/c),$$

o sea:

$$\psi = \frac{g(t + r/c)}{r}.$$

Ésta también representa una onda esférica, pero que viaje *hacia adentro* desde un gran r hacia el origen.

Ahora formularemos una hipótesis especial. Sin ninguna demostración, decimos que las únicas ondas generadas por una fuente son las ondas que van *hacia afuera*. Como sabemos que las ondas son producidas por el movimiento de cargas, pensamos que las ondas se alejan de las cargas. Sería algo extraño imaginar que antes de que las cargas estuvieran en movimiento, una onda esférica viniera desde el infinito y llegara a las cargas en el instante justo en que empiezan a moverse. Ésta es una solución posible, pero la experiencia demuestra que cuando las cargas aceleran las ondas viajan alejándose de las cargas. Aunque las ecuaciones de Maxwell admiten cualquier posibilidad, introduciremos una *hipótesis adicional*

—basada en la experiencia— que únicamente la solución de ondas salientes tiene "sentido físico".

No obstante, debemos advertir que hay una consecuencia interesante de esta hipótesis adicional: estamos eliminando la simetría respecto al tiempo que existe en las ecuaciones de Maxwell. Las ecuaciones originales para $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$, y también las ecuaciones de onda derivadas de ellas, tienen la propiedad que si cambiamos el signo de t, la ecuación no cambia. Estas ecuaciones dicen que para cada solución correspondiente a una onda que viaja en una dirección hay una solución igualmente válida para una onda que viaja en la dirección opuesta. Nuestra aserción de que consideraremos solamente las ondas esféricas salientes es una hipótesis adicional importante. (Se ha estudiado cuidadosamente una formulación de la electrodinámica en la cual se evita esta hipótesis adicional. Sorprendentemente, en muchas circunstancias, *no* conduce a ninguna conclusión física absurda; pero discutir estas ideas justamente ahora nos apartaría demasiado del tema. Hablaremos de ellas un poco más en el capítulo 28.)

Debemos mencionar otro punto importante. En nuestra solución para una onda saliente, ecuación (20.35), la función ψ es infinita en el origen. Esto es algo peculiar. Nos gustaría tener una solución ondulatoria que fuera uniforme en cualquier parte. Nuestra solución debe representar una situación física en la cual hay una fuente en el origen. En otras palabras, inadvertidamente hemos cometido un error. No hemos resuelto la ecuación de onda libre (20.33) *en todas partes*; hemos resuelto la ecuación (20.33) con el segundo miembro nulo en todo lugar excepto en el origen. Se nos coló el error porque algunos de los pasos de nuestra deducción no son "legales" cuando $r = 0$.

Demostremos que es fácil cometer la misma clase de error en un problema electrostático. Supongan que queremos una solución de la ecuación para un potencial electrostático en el espacio libre, $\nabla^2\phi = 0$. El laplaciano es igual a cero, porque estamos suponiendo que no hay cargas en ninguna parte. Pero ¿qué me dicen de una solución esféricamente simétrica de esta ecuación —esto es, cierta función ϕ que dependa solamente de r—? Usando la fórmula de la ecuación (20.32) para el laplaciano, tenemos:

$$\frac{1}{r}\,\frac{d^2}{dr^2}\,(r\phi) = 0.$$

Multiplicando esta ecuación por r, tenemos una ecuación que se integra fácilmente:

$$\frac{d^2}{dr^2}\,(r\phi) = 0.$$

Si integramos una vez respecto a r, encontramos que la primera derivada de $r\phi$ es una constante que podemos llamar a:

$$\frac{d}{dr}\,(r\phi) = a.$$

Integrando de nuevo, encontramos que $r\phi$ es de la forma

$$r\phi = ar + b,$$

donde b es otra constante de integración. Así pues, hemos hallado que la siguiente ϕ es una solución para el potencial electrostático en el espacio libre:

$$\phi = a + \frac{b}{r}.$$

Evidentemente algo está mal. En la región donde no hay cargas eléctricas, conocemos la solución para el potencial electrostático: el potencial es constante en todas partes. Esto corresponde al primer término de nuestra solución. Pero también tenemos el segundo término, que dice que hay una contribución al potencial que varía como uno sobre la distancia al origen. Sin embargo, sabemos que tal potencial corresponde a una carga puntual en el origen. Así pues, aunque

creímos estar hallando el potencial en el espacio libre, nuestra solución también da el campo de una fuente puntual en el origen. ¿Ven la similitud entre lo que sucede ahora y lo que sucedió cuando hallamos una solución esféricamente simétrica de la ecuación de onda? Si realmente no hubiera cargas o corrientes en el origen, no habría ondas esféricas salientes. Por supuesto, las ondas esféricas deben ser producidas por fuentes en el origen. En el capítulo siguiente investigaremos la conexión entre las ondas electromagnéticas salientes, las corrientes y voltajes que las producen.

21

Soluciones de las ecuaciones de Maxwell con corrientes y cargas

21-1 Luz y ondas electromagnéticas
21-2 Ondas esféricas procedentes de una fuente puntual
21-3 La solución general de las ecuaciones de Maxwell
21-4 Los campos de un dipolo oscilante
21-5 Los potenciales de una carga en movimiento; la solución general de Liénard y Wiechert
21-6 Los potenciales de una carga moviéndose a velocidad constante; la fórmula de Lorentz

21-1 Luz y ondas electromagnéticas

Vimos en el capítulo anterior que en medio de sus soluciones, las ecuaciones de Maxwell tienen ondas de electricidad y magnetismo. Estas ondas corresponden a los fenómenos de radio, luz, rayos X, etc., dependiendo de la longitud de onda. En el volumen I estudiamos la luz en una forma detallada. En este capítulo queremos unir los dos temas —queremos demostrar que las ecuaciones de Maxwell pueden formar realmente la base de nuestro tratamiento anterior de los fenómenos luminosos—.

Cuando estudiamos la luz comenzamos escribiendo ecuaciones para los campos eléctricos y magnéticos producidos por una carga que se mueve de manera arbitraria. Esas ecuaciones eran,

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{\boldsymbol{e}_{r'}}{r'^2} + \frac{r'}{c}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\boldsymbol{e}_{r'}}{r'^2}\right) + \frac{1}{c^2}\,\frac{d^2}{dt^2}\,\boldsymbol{e}_{r'}\right] \tag{21.1}$$

y

$$c\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_{r'} \times \boldsymbol{E}.$$

[Véanse las ecuaciones (28.3) y (28.4) del volumen I. Como se explica a continuación, los signos aquí son los antiguos negativos.]

Si una carga se mueve de manera arbitraria, el campo eléctrico que encontraríamos *ahora* en un punto depende únicamente de la posición y el movimiento de la carga, no ahora, sino en un instante *anterior* —en un instante que es antes en el momento en que tardaría la luz, a velocidad c, en recorrer la distancia r' desde la carga hasta el punto del campo—. En otras palabras, si queremos el campo eléctrico en el punto (1) en el instante t, tenemos que calcular la ubicación (2′) de la carga y su movimiento en el instante $(t - r'/c)$, donde r' es la distancia entre el punto (1) y la posición (2′) de la carga en el instante $(t - r'/c)$. Así, la prima es para recordar que r' es llamada "distancia retardada" entre el punto (2′) y el punto (1), y no la verdadera distancia entre el punto (2), posición de la carga en el instante t, y el punto (1) del campo (véase figura 21-1). Observen que ahora estamos empleando una convención diferente para la *dirección* del vector $\boldsymbol{e}_r$. En los capítulos 28 y 34 del volumen I era conveniente tomar $\boldsymbol{r}$ (y por lo tanto $\boldsymbol{e}_r$) apuntando *hacia* la fuente. Ahora estamos siguiendo la definición que tomamos para la ley de Coulomb, en la cual $\boldsymbol{r}$ está dirigido *desde* la carga en (2) *hacia* el punto del campo en (1). La única diferencia es, naturalmente, que nuestros nuevos $\boldsymbol{r}$ (y $\boldsymbol{e}_r$) son los antiguos con signo opuesto.

Revisar
Volumen I, capítulo 28,
Radiación electromagnética
Volumen I, capítulo 31,
El origen del índice de refracción
Volumen I, capítulo 34,
Efectos relativistas en la radiación

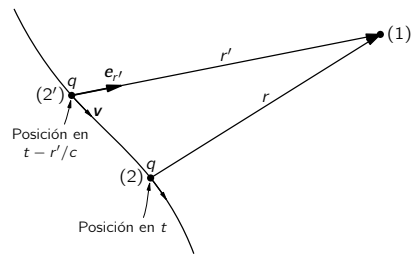


Figura 21-1. Los campos en (1) al instante t dependen de la posición (2′) ocupada por la carga q al instante $(t - r'/c)$.

También hemos visto que si la velocidad v de una carga es siempre mucho menor que c, y consideramos únicamente puntos a grandes distancias de la carga, de modo que sólo el último término de la ecuación (21.1) sea importante, también se pueden escribir los campos en la siguiente forma:

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r'}\begin{bmatrix}\text{aceleración de la carga en } (t - r'/c)\\ \text{proyectado en los ángulos rectos a } r'\end{bmatrix} \tag{21.1′}$$

y

$$c\boldsymbol{B} = \boldsymbol{e}_{r'} \times \boldsymbol{E}.$$

Examinemos lo que dice la ecuación completa, ecuación (21.1), un poco más detalladamente. El vector $\boldsymbol{e}_{r'}$ es el vector unitario desde la posición retardada (2′) hasta el punto (1). Así, el primer término es entonces lo que habría que

esperar para el campo de Coulomb de la carga en su posición retardada —lo podemos llamar "campo de Coulomb retardado"—. El campo eléctrico depende inversamente del cuadrado de la distancia y está dirigido alejándose de la posición retardada de la carga (esto es, en la dirección de $\boldsymbol{e}_{r'}$).

Pero ése es sólo el primer término. Los otros términos significan que las leyes de la electricidad *no* dicen que todos los campos son los mismos que los estáticos, únicamente que retardados (que es lo que a la gente le gusta decir a veces). Además, al "campo de Coulomb retardado" debemos agregar los otros dos términos. Así, el segundo término dice que hay una "corrección" al campo de Coulomb retardado, que es la *derivada respecto al tiempo* del campo de Coulomb retardado multiplicada por el retardo r'/c. De modo que este término propende a *compensar* el retardo en el primer término. Así, los *dos* primeros términos corresponden a calcular el "campo de Coulomb retardado" y luego extrapolarlo hacia el futuro en la cantidad r'/c, es decir, *¡justo hasta el instante t!* La extrapolación es lineal, como si supusiéramos que el "campo de Coulomb retardado" hubiera de continuar variando con la rapidez calculada con la carga en el punto $(2')$. Si el campo está variando lentamente, el término de corrección compensa casi completamente el efecto del retardo y los dos términos juntos nos dan un campo eléctrico que es el "campo de Coulomb instantáneo" —es decir, el campo de Coulomb de la carga en el punto (2)— con una aproximación muy buena.

Finalmente, hay un tercer término en la ecuación (21.1) que es la derivada segunda del vector unitario $\boldsymbol{e}_{r'}$. Para estudiar los fenómenos luminosos utilizamos el hecho de que muy lejos de la carga los dos primeros términos variaban inversamente con el cuadrado de la distancia y, para grandes distancias, se hacían muy débiles en comparación con el último término, que decrece como $1/r$. Así, nos concentramos enteramente en el último término y demostramos que es (también para grandes distancias) proporcional a la componente de la aceleración de la carga perpendicular a la línea de visión. (Para la mayoría de nuestro trabajo en el volumen I, tomamos el caso en que las cargas se estaban moviendo en forma no relativista. Consideramos los efectos relativistas solamente en un capítulo, el capítulo 34.)

Ahora trataremos de juntar ambas cosas. Tenemos las ecuaciones de Maxwell y tenemos la ecuación (21.1) para el campo de una carga puntual. Debemos preguntar, por cierto, si son equivalentes. Si podemos deducir la ecuación (21.1) de las ecuaciones de Maxwell, comprenderemos realmente la conexión entre la luz y el electromagnetismo. Así pues, el objeto principal de este capítulo es realizar dicha conexión.

Pero no lo haremos del todo —los detalles matemáticos se hacen demasiado complicados como para que los llevemos a cabo con todos sus horribles detalles—. A pesar de que nos acercaremos lo suficiente, como para que puedan ver de qué modo se haría dicha conexión. Las piezas que falten estarán únicamente en los detalles matemáticos. Por ello, puede que algunos de ustedes tropiecen con la matemática de este capítulo y puede que no deseen seguir el razonamiento muy de cerca. Sin embargo, pensamos que es importante hacer la conexión entre lo que han aprendido antes y lo que están aprendiendo ahora, o, por lo menos, indicar cómo se puede hacer esa conexión. Si examinan los capítulos anteriores, observarán que siempre que hemos tomado un enunciado como punto de partida para una discusión, explicamos con cuidado si se trataba de una nueva "hipótesis" que es una "ley básica", o si en última instancia se podía deducir de otras leyes. En el espíritu de estas lecciones, les debemos esta conexión de la luz y las ecuaciones de Maxwell. Si a ratos resultara difícil, bueno, así es la vida —no hay otra manera—.

21-2 Ondas esféricas procedentes de una fuente puntual

En el capítulo 18 detectamos que se podía resolver las ecuaciones de Maxwell poniendo lo siguiente:

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \tag{21.2}$$

y

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}, \tag{21.3}$$

donde ϕ y $\boldsymbol{A}$ tienen que ser entonces soluciones de las ecuaciones:

$$\nabla^2\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \tag{21.4}$$

y

$$\nabla^2\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0 c^2}, \tag{21.5}$$

y tienen que satisfacer también la condición:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}. \tag{21.6}$$

Ahora hallaremos las soluciones de las ecuaciones (21.4) y (21.5). Para ello tenemos que hallar la solución ψ de la siguiente ecuación:

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -s, \tag{21.7}$$

donde s, que llamamos fuente, es conocida. Por supuesto, s corresponde a ρ/ϵ_0 y ψ a ϕ para la ecuación (21.4), o s es $j_x/\epsilon_0 c^2$ siempre que ψ es A_x etc., pero queremos resolver la ecuación (21.7) como un problema matemático, sean lo que sean ψ y s físicamente.

En los lugares donde ρ y $\boldsymbol{j}$ son cero —en lo que hemos llamado espacio "libre"— los potenciales ϕ y $\boldsymbol{A}$, y los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ satisfacen la ecuación de onda tridimensional sin fuentes, cuya forma matemática es:

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \tag{21.8}$$

En el capítulo 20 vimos que las soluciones de esta ecuación pueden representar ondas de diversos tipos: ondas planas en la dirección x, $\psi = f(t - x/c)$; ondas planas en la dirección y, o bien en la z o también en cualquier otra dirección; u ondas esféricas de la siguiente forma:

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{f(t - r/c)}{r}. \tag{21.9}$$

(Las soluciones se pueden escribir aun de otras maneras, por ejemplo ondas cilíndricas que se extienden hacia afuera desde un eje.)

También señalamos que, físicamente, la ecuación (21.9) no representa una onda en el espacio libre —debe haber cargas en el origen para hacer que arranque la onda saliente—. Es decir, la ecuación (21.9) es una solución de la ecuación (21.8) en todo punto excepto bien cerca de $r = 0$, donde debe ser solución de la ecuación completa (21.7), incluyendo alguna fuente. Veamos cómo funciona esto. ¿Qué tipo de fuente s en la ecuación (21.7) daría lugar a una onda como en la ecuación (21.9)?

Supongan que tenemos la onda esférica de la ecuación (21.9) y consideramos lo que está ocurriendo para r muy pequeño. Entonces se puede despreciar el retardo $-r/c$ en $f(t - r/c)$ —siempre que f sea una función continua— y ψ se convierta en:

$$\psi = \frac{f(t)}{r} \qquad (r \to 0). \tag{21.10}$$

Por lo tanto, ψ es justamente como un campo de Coulomb de una carga en el origen que varía en el tiempo. Esto es, si tuviéramos un montoncito de carga, limitado a una región muy pequeña cerca del origen, con densidad ρ, sabríamos lo siguiente:

$$\phi = \frac{Q/4\pi\epsilon_0}{r},$$

donde $Q = \int \rho\, dV$. Ahora bien, sabemos que ese ϕ satisface la ecuación

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Siguiendo los mismos pasos matemáticos, diríamos que la ψ de la ecuación (21.10) satisface

$$\nabla^2\psi = -s \qquad (r \to 0), \tag{21.11}$$

donde s está relacionada con f mediante

$$f = \frac{S}{4\pi},$$

con

$$S = \int s\, dV.$$

La única diferencia es que en el caso general, s, y por lo tanto, S, pueden ser funciones del tiempo.

Ahora bien, lo importante es que si ψ satisface la ecuación (21.11) para r pequeño, también satisface la ecuación (21.7). Cuando nos acercamos mucho al origen, la dependencia de $1/r$ en ψ hace que las derivadas espaciales se hagan muy grandes. Pero las derivadas temporales mantienen los mismos valores. [Son simplemente las derivadas temporales de $f(t)$.] Así, cuando r tiende a cero, el término $\partial^2\psi/\partial t^2$ de la ecuación (21.7) se puede despreciar en comparación con $\boldsymbol{\nabla}^2\psi$, y la ecuación (21.7) se hace equivalente a (21.11).

Resumiendo, si la función fuente $s(t)$ de la ecuación (21.7) está localizada en el origen y tiene la intensidad total

$$S(t) = \int s(t)\, dV, \tag{21.12}$$

la solución de la ecuación (21.7) es

$$\psi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi}\,\frac{S(t - r/c)}{r}. \tag{21.13}$$

El único efecto del término $\partial^2\psi/\partial t^2$ de la ecuación (21.7) es introducir el retardo $(t - r/c)$ en el potencial tipo de Coulomb.

21-3 La solución general de las ecuaciones de Maxwell

Hemos encontrado la solución de la ecuación (21.7) para una fuente "puntual". La pregunta siguiente es: ¿Cuál es la solución para una fuente extendida? Es fácil, podemos considerar cualquier fuente $s(x, y, z, t)$ como resultado de la suma de muchas fuentes "puntuales", una para cada elemento de volumen dV, y cada una de intensidad $s(x, y, z, t)\, dV$. Como la ecuación (21.7) es lineal, el campo resultante es la superposición de los campos de todos esos elementos de fuente.

Usando los resultados de la sección precedente [ecuación (21.13)] sabemos que el campo $d\psi$ en el punto (x_1, y_1, z_1) —o (1) para abreviar— en el instante t, debido a un elemento de fuente $s\, dV$ en el punto (x_2, y_2, z_2) —o (2) para abreviar— está dado por:

$$d\psi(1, t) = \frac{s(2, t - r_{12}/c)\, dV_2}{4\pi r_{12}},$$

donde r_{12} es la distancia de (2) a (1). Por eso, sumar las contribuciones de todos los pedazos de la fuente significa, naturalmente, hacer una integral sobre cada una de las regiones donde $s \neq 0$; tenemos pues:

$$\psi(1, t) = \int \frac{s(2, t - r_{12}/c)}{4\pi r_{12}}\, dV_2. \tag{21.14}$$

Es decir, el campo en (1) en el instante t es la suma de todas las ondas esféricas que dejan los elementos de fuente en (2) en los instantes $(t - r_{12}/c)$. Ésta es la solución de nuestra ecuación de onda para cualquier conjunto de fuentes.

Vemos ahora cómo obtener una solución general de las ecuaciones de Maxwell. Siempre que entendamos por ψ el potencial escalar ϕ, la función fuente s es ρ/ϵ_0. O bien, podemos hacer que ψ represente una de cualquiera de las tres componentes del potencial vectorial $\boldsymbol{A}$, remplazando s por la componente de $\boldsymbol{j}/\epsilon_0 c^2$ correspondiente. Por lo tanto, si conocemos la densidad de carga $\rho(x, y, z, t)$ y la densidad de corriente $\boldsymbol{j}(x, y, z, t)$ en todo punto, podemos escribir inmediatamente las soluciones de las ecuaciones (21.4) y (21.5), las cuales son:

$$\phi(1,t) = \int \frac{\rho(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}\, dV_2 \tag{21.15}$$

y

$$\boldsymbol{A}(1,t) = \int \frac{\boldsymbol{j}(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_{12}}\, dV_2. \tag{21.16}$$

Con las ecuaciones (21.2) y (21.3) podemos hallar los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ derivando los potenciales. [Naturalmente, es posible verificar que el ϕ y el $\boldsymbol{A}$ obtenidos de las ecuaciones (21.15) y (21.16) satisfacen realmente la igualdad (21.6).]

Hemos resuelto las ecuaciones de Maxwell. Así, dadas las corrientes y las cargas en cualquier circunstancia, podemos hallar los potenciales directamente de estas integrales y luego derivar para obtener los campos. Así pues, hemos terminado con la teoría de Maxwell. Además, esto nos permite cerrar el anillo volviendo a nuestra teoría de la luz, porque para conectar con nuestro trabajo anterior sobre la luz sólo necesitamos calcular el campo eléctrico de una carga en movimiento. Todo lo que resta es tomar una carga en movimiento, calcular los potenciales con estas integrales y luego derivar para hallar $\boldsymbol{E}$ de $-\boldsymbol{\nabla}\psi - \partial\boldsymbol{A}/\partial t$. Debemos obtener la ecuación (21.1). Nos ocasionará muchísimo trabajo, pero ése es el principio.

Aquí está, pues, el centro del universo del electromagnetismo —la teoría completa de la electricidad y el magnetismo, y de la luz; una descripción completa de los campos producidos por cargas cualesquiera en movimiento, y aún más—. Todo está aquí. Está la estructura construida por Maxwell, completa en todo su poder y su belleza. Es probablemente una de las más grandes realizaciones de la física. Para recordarles su importancia, juntaremos todo en un lindo cuadro.

Ecuaciones de Maxwell:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad c^2\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$$

Sus soluciones:

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$$

$$\phi(1,t) = \int \frac{\rho(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}\, dV_2$$

$$\boldsymbol{A}(1,t) = \int \frac{\boldsymbol{j}(2, t - r_{12}/c)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_{12}}\, dV_2$$

21-4 Los campos de un dipolo oscilante

Todavía no hemos cumplido con nuestra promesa de deducir la ecuación (21.1) para el campo eléctrico de una carga puntual en movimiento. Incluso con los resultados que ya tenemos, es algo relativamente complicado de deducir. Así, la ecuación (21.1) no aparece en ninguna parte de la bibliografía publicada excepto en el volumen I de estas lecciones.* Pueden darse cuenta que no es fácil de deducir. (Los campos de una carga en movimiento han sido escritos en muchas otras formas que, por supuesto, son equivalentes.) Tendremos que limitarnos aquí a demostrar únicamente que, en unos pocos ejemplos, las ecuaciones (21.15) y (21.16) dan los mismos resultados que la ecuación (21.1). Demostraremos que la ecuación (21.1) da los campos correctos con la única restricción de que el movimiento de la partícula cargada no sea relativista. (Este caso especial dará cuenta por sí solo de 90 % o más, de lo que hemos dicho acerca de la luz.)

Ahora bien, consideramos una situación en la que tenemos una gota de carga que se está moviendo de alguna manera en una región pequeña, y hallaremos los campos muy lejos. Dicho de otro modo, estamos hallando el campo a cualquier distancia de una carga puntual que se está agitando de un lado a otro en movimientos pequeños. Como por lo común la luz es emitida por objetos neutros como los átomos, consideraremos que nuestra carga oscilante q está ubicada cerca de una carga igual y opuesta en reposo. Si la separación entre los centros de las cargas es $\boldsymbol{d}$, las mismas tendrán un momento dipolar $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$, que es la función del tiempo. Es de esperar que si examinamos los campos cerca de las cargas, no tendremos que preocuparnos del retardo; el campo eléctrico será exactamente igual al que hemos calculado antes para un dipolo electrostático —usando, por supuesto, el momento dipolar instantáneo $\boldsymbol{p}(t)$—. Pero si nos alejamos mucho, deberíamos encontrar en el campo un término que cayera como $1/r$ y dependiera de la aceleración de la carga perpendicular a la línea de visión. Veamos si obtenemos ese resultado.

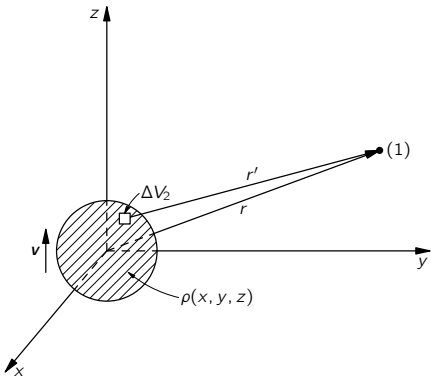


Figura 21-2. Los potenciales en (1) están dados por integrales sobre la densidad de ρ.

Calcularemos el potencial vectorial $\boldsymbol{A}$, empleando la ecuación (21.16). Supongan que nuestra carga en movimiento está en una pequeña gota cuya densidad de carga está dada por $\rho(x, y, z)$ y que el todo se está moviendo en cualquier instante con velocidad $\boldsymbol{v}$. Entonces la densidad de corriente $\boldsymbol{j}(x, y, z)$ será igual a $\boldsymbol{v}\rho(x, y, z)$. Será conveniente tomar nuestro sistema de coordenadas de modo que el eje z esté en la dirección de $\boldsymbol{v}$; entonces la geometría de nuestro problema es como muestra la figura 21-2. Queremos la integral

$$\int \frac{\boldsymbol{j}(2, t - r_{12}/c)}{r_{12}}\, dV_2. \tag{21.17}$$

Ahora bien, si el tamaño de la gota de carga es realmente muy pequeño frente a r_{12}, en el denominador podemos hacer r_{12} igual a r, distancia al centro de la carga, y sacar r fuera de la integral. A continuación, vamos a hacer $r_{12} = r$ en el numerador también, aunque realmente no es del todo correcto. No es correcto porque, por ejemplo, en la parte de arriba de la gota deberíamos tomar $\boldsymbol{j}$ en un instante ligeramente diferente del que usamos para $\boldsymbol{j}$ en la parte de abajo de la gota. Al poner $r_{12} = r$ en $\boldsymbol{j}(t - r_{12}/c)$, estamos tomando la densidad de corriente para toda la gota en el mismo instante $(t - r/c)$. Es una aproximación que será buena si la velocidad v de la carga es mucho menor que c. Así pues, estamos haciendo un cálculo no relativista. Remplazando $\boldsymbol{j}$ por $\rho\boldsymbol{v}$, la integral (21.17) se convierte en:

$$\frac{1}{r}\int \boldsymbol{v}\rho(2, t - r/c)\, dV_2.$$

Como toda la carga tiene la misma velocidad, esta integral es simplemente $\boldsymbol{v}/r$ por la carga total q. Pero $q\boldsymbol{v}$ es justamente $\partial\boldsymbol{p}/\partial t$, la derivada del momento dipolar respecto al tiempo —que, por supuesto, se debe calcular en el instante

* La fórmula fue publicada por Oliver Heaviside en 1902. Además, la fórmula fue independientemente deducida por R. P. Feynman alrededor de 1950 y presentada en unas lecciones como una buena manera de considerar la radiación sincrotrónica.

retardado $(t - r/c)$—. La escribiremos $\dot{\boldsymbol{p}}(t - r/c)$. Por lo tanto, obtenemos para el potencial vectorial:

$$\boldsymbol{A}(1,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{\dot{\boldsymbol{p}}(t - r/c)}{r}. \tag{21.18}$$

Nuestro resultado dice que la corriente de un dipolo oscilante variable produce un potencial vectorial en forma de ondas esféricas cuya intensidad de fuente es $\dot{\boldsymbol{p}}/\epsilon_0 c^2$.

Ahora podemos obtener el campo magnético de $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$. Como $\dot{\boldsymbol{p}}$ está enteramente en la dirección z, $\boldsymbol{A}$ tiene únicamente la componente z; hay sólo dos derivadas, no nulas en el rotacional. Luego, $B_x = \partial A_z/\partial y$ y $B_y = -\partial A_z/\partial x$. Examinemos primero B_x:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\dot{p}(t - r/c)}{r}. \tag{21.19}$$

Para llevar a cabo la derivación, debemos recordar que $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, así que podemos escribir

$$B_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\dot{p}(t - r/c)\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial y}\,\dot{p}(t - r/c). \tag{21.20}$$

Recordando que $\partial r/\partial y = y/r$, el primer término da:

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{y\dot{p}(t - r/c)}{r^3}, \tag{21.21}$$

que cae como $1/r^2$, igual que el potencial de un dipolo estático (porque y/r es constante para una dirección dada).

El segundo término de la ecuación (21.20) nos da los efectos nuevos. Llevando a cabo la derivación, obtenemos:

$$-\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{y}{cr^2}\,\ddot{p}(t - r/c), \tag{21.22}$$

donde $\ddot{p}$ significa, naturalmente, la segunda derivada de p respecto a t. Este término, que proviene de derivar el numerador, es responsable de la radiación. Primero, describe un campo que decrece con la distancia sólo como $1/r$. Segundo, depende de la *aceleración* de la carga. Pueden empezar a ver cómo obtendremos un resultado parecido a la ecuación (21.1′), el cual describe la radiación de luz.

Examinemos con más detalles cómo resulta este término de radiación —es un resultado tan interesante e importante—. Partimos de la expresión (21.18), que tiene una dependencia de $1/r$ y, por lo tanto, es como un potencial de Coulomb, excepto por el término de retardo en el numerador. ¿Por qué, entonces, cuando derivamos respecto a las coordenadas espaciales obtenemos campos, no obtenemos simplemente un campo como $1/r^2$ —por supuesto que con los retardos temporales correspondientes—?

Podemos darnos cuenta del porqué de la siguiente manera: supongamos que dejamos que nuestro dipolo oscile hacia arriba y hacia abajo en un movimiento sinusoidal. Entonces tendríamos:

$$p = p_z = p_0 \operatorname{sen} \omega t$$

y

$$A_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{\omega p_0 \cos\omega(t - r/c)}{r}.$$

Si representamos A_z en función de r en un instante dado, obtenemos la curva mostrada en la figura 21-3. La amplitud de pico decrece como $1/r$, pero hay además una oscilación en el espacio limitada por la envolvente $1/r$. Al tomar las derivadas espaciales, éstas serán proporcionales a la *pendiente* de la curva. Así, en la figura observamos que hay pendientes mucho más empinadas que la

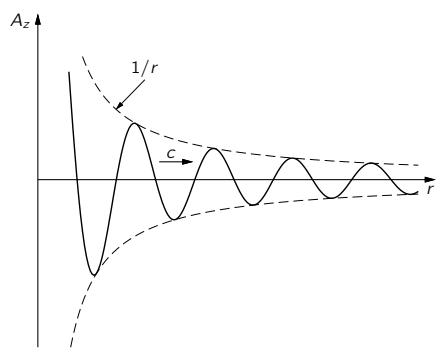


Figura 21-3. La componente z de $\boldsymbol{A}$ en función de r en el instante t para la onda esférica proveniente de un dipolo oscilante.

pendiente de la curva $1/r$. Así, es evidente que para una frecuencia dada las pendientes en los picos son proporcionales a la amplitud de la onda, la cual varía como $1/r$. Así pues, esto explica la rapidez de caída del término de radiación.

Todo proviene de que las variaciones *temporales* en la fuente se traducen en variaciones *espaciales* a medida que las ondas se propagan hacia afuera, y de que los campos magnéticos dependen de las derivadas *espaciales* del potencial.

Volvamos atrás y terminemos nuestro cálculo del campo magnético. Tenemos para B_x los dos términos (21.21) y (21.22), así que:

$$B_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left[-\frac{y\dot{p}(t-r/c)}{r^3} - \frac{y\ddot{p}(t-r/c)}{cr^2}\right].$$

Con los mismos pasos matemáticos obtenemos:

$$B_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left[\frac{x\dot{p}(t-r/c)}{r^3} + \frac{x\ddot{p}(t-r/c)}{cr^2}\right]$$

También podemos juntar todo en una bonita fórmula vectorial:

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{[\dot{\boldsymbol{p}} + (r/c)\ddot{\boldsymbol{p}}]_{t-r/c}\times\boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{21.23}$$

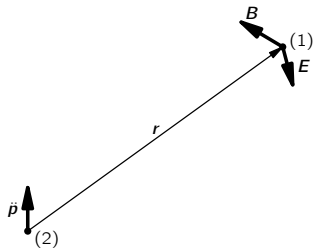


Figura 21-4. Los campos de radiación $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{E}$ de un dipolo oscilante.

Examinemos ahora esta fórmula. Primero, siempre que nos alejamos muchísimo en r, solamente importa el término $\ddot{\boldsymbol{p}}$. La dirección de $\boldsymbol{B}$ está dada por $\ddot{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{r}$, que es perpendicular al radio $\boldsymbol{r}$ y perpendicular también, a la aceleración, como en la figura 21-4. Todo se está desenvolviendo bien, es el mismo resultado que obtuvimos de la ecuación (21.1′).

Examinemos aquello a lo cual no estamos acostumbrados; lo que ocurre más cerca. En la sección 14-7 obtuvimos la ley de Biot y Savart para el campo magnético de un elemento de corriente. Encontramos que el elemento de corriente $\boldsymbol{j}\,dV$ contribuye al campo magnético con la cantidad:

$$d\boldsymbol{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{r}}{r^3}\,dV. \tag{21.24}$$

Ven que esta fórmula es muy parecida al primer término de la ecuación (21.23) si recordamos que $\dot{\boldsymbol{p}}$ es la corriente. Pero hay una diferencia. En la ecuación (21.23) hay que calcular la corriente en el instante $(t-r/c)$, lo cual no aparece en la ecuación (21.24). Pero en la práctica la ecuación (21.24) sigue siendo buena para r pequeño, porque el *segundo* término de la ecuación (21.23) tiende a cancelar el efecto de retardo del primer término. Los dos *juntos* dan un resultado muy cercano a la ecuación (21.24) cuando r es chico.

Podemos verlo de esta manera: cuando r es pequeño, $(t-r/c)$ no es muy diferente de t, así que podemos desarrollar el corchete de la ecuación (21.23) en una serie de Taylor. Para el primer término,

$$\dot{\boldsymbol{p}}(t-r/c) = \dot{\boldsymbol{p}}(t) - \frac{r}{c}\,\ddot{\boldsymbol{p}}(t) + \text{etc.},$$

y hasta el mismo orden en r/c,

$$\frac{r}{c}\,\ddot{\boldsymbol{p}}(t-r/c) = \frac{r}{c}\,\ddot{\boldsymbol{p}}(t) + \text{etc.}$$

Cuando sumamos, se cancelan los dos términos en $\ddot{\boldsymbol{p}}$ y nos queda la corriente *no retardada* $\dot{\boldsymbol{p}}$, es decir, $\dot{\boldsymbol{p}}(t)$ —más términos del orden de $(r/c)^2$ o mayor [por ejemplo, $\frac{1}{2}(r/c)^2\dddot{\boldsymbol{p}}$] que serán muy chicos para r lo suficientemente pequeño como para que $\dot{\boldsymbol{p}}$ no se altere notablemente en el tiempo r/c.

Así pues, la ecuación (21.23) da campos muy parecidos a los de la teoría instantánea —mucho más que los de la teoría instantánea con retardo; los efectos de primer orden del retardo son eliminados por el segundo término—. Las fórmulas estáticas son muy precisas, mucho más precisas de lo que pudieran pensar. Por supuesto, la compensación únicamente trabaja para puntos cercanos. Para puntos

lejanos la corrección se hace muy mala, porque los retardos temporales producen un efecto muy grande y obtenemos el considerable término $1/r$ de la radiación.

Todavía nos queda el problema de calcular el campo eléctrico y demostrar que es igual a la ecuación (21.1′). Para grandes distancias podemos ver que la respuesta va a salir muy bien. Sabemos que lejos de las fuentes, donde tenemos una onda que se propaga, $\boldsymbol{E}$ es perpendicular a $\boldsymbol{B}$ (y también a $\boldsymbol{r}$), como en la figura 21.4, y que $cB = E$. Así pues, $\boldsymbol{E}$ es proporcional a la aceleración $\ddot{\boldsymbol{p}}$, como era de esperar de la ecuación (21.1′).

Para obtener el campo eléctrico a todas las distancias, necesitamos hallar el potencial electrostático. Cuando calculamos la integral de corriente para obtener $\boldsymbol{A}$ de la ecuación (21.18), hicimos una aproximación dejando de lado la ligera variación de r en los términos de retardo. Esto no sirve para el potencial electrostático, porque entonces obtendríamos $1/r$ por la integral de la densidad de carga, lo cual es una constante. Esta aproximación es demasiado burda. Necesitamos ir hasta el siguiente orden. En vez de meternos directamente en ese cálculo de orden superior, podemos hacer otra cosa; determinar el potencial escalar con la ecuación (21.6) usando el potencial vectorial que ya hemos encontrado. En nuestro caso, la divergencia de $\boldsymbol{A}$ es simplemente $\partial A_z/\partial z$, ya que A_x y A_y son idénticamente nulas. Derivando en la misma forma que para hallar $\boldsymbol{B}$ antes,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left[\dot{p}(t-r/c)\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\dot{p}(t-r/c)\right]\\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\left[-\frac{z\dot{p}(t-r/c)}{r^3}-\frac{z\ddot{p}(t-r/c)}{cr^2}\right].\end{aligned}$$

O sea, en notación vectorial,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{[\dot{\boldsymbol{p}}+(r/c)\ddot{\boldsymbol{p}}]_{t-r/c}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Usando la ecuación (21.6), tenemos una ecuación para ϕ:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{[\dot{\boldsymbol{p}}+(r/c)\ddot{\boldsymbol{p}}]_{t-r/c}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}.$$

Integrar respecto a t es sencillamente quitar un punto de cada una de las $\boldsymbol{p}$, así que obtenemos

$$\phi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{[\boldsymbol{p}+(r/c)\dot{\boldsymbol{p}}]_{t-r/c}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{21.25}$$

(La constante de integración correspondería a un campo estático superpuesto que, sin duda, podría existir. Para el dipolo oscilante que hemos tomado, no hay campo estático.)

Ahora estamos en condiciones de hallar el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ a partir de:

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}.$$

Como los pasos son tediosos aunque no complicados [siempre que recuerden que $\boldsymbol{p}(t-r/c)$ y sus derivadas temporales dependen de x, y, z a través del retardo r/c], sólo daremos el resultado:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3}\left[\frac{3(\boldsymbol{p}^*\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^2}-\boldsymbol{p}^*+\frac{1}{c^2}\{\ddot{\boldsymbol{p}}(t-r/c)\times\boldsymbol{r}\}\times\boldsymbol{r}\right] \tag{21.26}$$

con

$$\boldsymbol{p}^* = \boldsymbol{p}(t-r/c)+\frac{r}{c}\,\dot{\boldsymbol{p}}(t-r/c). \tag{21.27}$$

Aunque el resultado parece bastante complicado, es fácil de interpretar. El vector $\boldsymbol{p}^*$ es el momento dipolar retardado y luego "corregido" por el retardo, así que los dos términos con $\boldsymbol{p}^*$ dan precisamente el campo dipolar estático cuando r

es pequeño. [Véase el capítulo 6, ecuación (6.14).] Cuando r es grande, el término en $\ddot{\boldsymbol{p}}$ domina y el campo eléctrico es proporcional a la aceleración de las cargas, perpendicular a $\boldsymbol{r}$ y dirigido, de hecho, según la proyección de $\ddot{\boldsymbol{p}}$ sobre un plano perpendicular a $\boldsymbol{r}$.

El resultado coincide con lo que habríamos obtenido usando la ecuación (21.1). Naturalmente, la ecuación (21.1) es más general; sirve para cualquier movimiento, en cambio, la ecuación (21.26) es válida sólo para pequeños movimientos, para los cuales podemos tomar el retardo r/c como constante en toda la fuente. De todas maneras, ahora hemos enfocado toda nuestra discusión anterior de la luz (salvo algunos puntos discutidos en el capítulo 34 del volumen I), puesto que todo giraba sobre el último término de la ecuación (21.26). A continuación discutiremos cómo obtenemos los campos de cargas que se mueven más rápidamente (lo cual lleva a los efectos relativistas del capítulo 34 del volumen I).

21-5 Los potenciales de una carga en movimiento; la solución general de Liénard y Wiechert

En la última sección hicimos una simplificación al calcular nuestra integral para $\boldsymbol{A}$ considerando únicamente velocidades bajas. Pero al hacer esto se nos escapó un punto importante y también uno en el que es fácil equivocarse. En consecuencia, realizaremos ahora un cálculo de los potenciales de una carga moviéndose de cualquier manera —aún con una velocidad relativista—. Una vez que tengamos este resultado, tendremos el electromagnetismo completo de cargas eléctricas. Hasta la ecuación (21.1) se puede obtener entonces tomando derivadas. La historia estará completa. Así pues, tengan paciencia con nosotros.

Tratemos de calcular el potencial escalar $\phi(1)$ en el punto (x_1, y_1, z_1) producido por una carga *puntual*, como un electrón, moviéndose de cualquier manera que sea. Por carga "puntual" entendemos una bolita de carga muy chica, encogida todo lo que quieran, con una densidad de carga $\rho(x, y, z)$. Podemos hallar ϕ con la ecuación (21.15):

$$\phi(1,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(2, t - r_{12}/c)}{r_{12}}\, dV_2. \tag{21.28}$$

Parecería como si la respuesta fuese —y en primera instancia casi todo el mundo lo pensaría— que la integral de ρ sobre esa carga "puntual" es simplemente la carga total q, de modo que:

$$\phi(1,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{r'_{12}} \qquad \text{(equivocada)}.$$

Por $\boldsymbol{r}'_{12}$ se entiende el radio vector desde la carga en el punto (2) hasta el punto (1) en el instante retardado $(t - r_{12}/c)$. Esto es incorrecto. La respuesta correcta es:

$$\phi(1,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{q}{r'_{12}}\cdot\frac{1}{1 - v_{r'}/c}, \tag{21.29}$$

donde $v_{r'}$, es la componente de la velocidad de la carga paralela a $\boldsymbol{r}'_{12}$ —o sea, hacia el punto (1)—. Les demostraremos por qué. Para el razonamiento será más fácil de seguir, primero haremos el cálculo para una carga "puntual" en forma de un pequeño cubo de carga moviéndose hacia el punto (1) con velocidad v, como se observa en la figura 21-5(a). Sea a la longitud del lado del cubo, la cual viene a ser muchísimo menor que r_{12}, la distancia del centro de la carga al punto (1).

Ahora bien, para calcular la integral de la ecuación (21.28) volveremos a principios básicos; la escribiremos como la suma

$$\sum_i \frac{\rho_i\,\Delta V_i}{r_i}, \tag{21.30}$$

donde r_i, es la distancia del punto (1) al i-ésimo elemento de volumen ΔV_i y ρ_i es la densidad de carga en ΔV_i en el instante $t_i = t - r_i/c$. Como $r_i \gg a$,

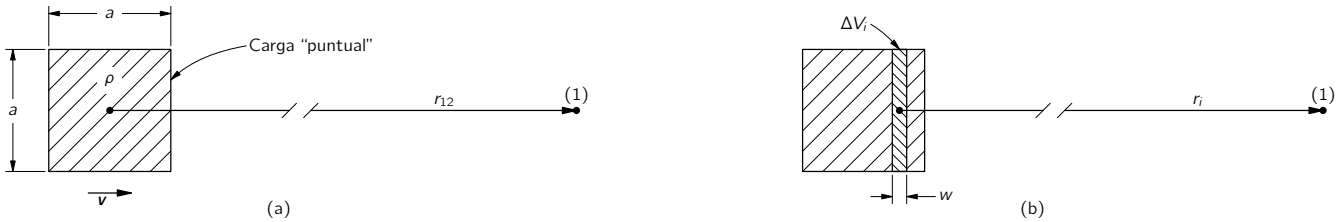


Figura 21-5. (a) Una carga "puntual" —considerada como una pequeña distribución cúbica de carga— moviéndose con velocidad v y hacia el punto (1)—. (b) El elemento de volumen ΔV_i se usa para calcular los potenciales.

siempre será conveniente tomar nuestros ΔV_i en forma de rebanadas rectangulares delgadas perpendiculares a $\boldsymbol{r}_{12}$, como muestra la figura 21-5(b).

Supongan que empezamos tomando los elementos de volumen ΔV_i de cierto espesor w mucho menor que a. Así pues, los elementos individuales se presentarán como muestra la figura 21-6(a), donde hemos introducido más que suficientes para cubrir la carga. Pero *no* hemos mostrado la carga, y por una buena razón. ¿Dónde debemos dibujarla? Para cada elemento de volumen ΔV_i tenemos que tomar ρ en el instante $t_i = (t - r_i/c)$, pero como la carga se está *moviendo*, ¡está en un *lugar diferente para cada elemento de volumen* ΔV_i!

Digamos que empezamos con el elemento de volumen marcado con "1" en la figura 21-6(a), elegido de manera que en el instante $t_1 = (t - r_1/c)$ el borde "de atrás" de la carga ocupa ΔV_i, como muestra la figura 21-6(b). Al calcular luego $\rho_2 \Delta V_2$, tenemos que usar la posición de la carga en el instante ligeramente *posterior* $t_2 = (t - r_2/c)$, cuando la carga esté en la posición mostrada en la figura 21-6(c). Y así sucesivamente para ΔV_3, ΔV_4, etc. Ahora estamos listos para poder calcular la suma.

Como el espesor de cada ΔV_i es w, su volumen es wa^2. Entonces cada elemento de volumen que traslapa la distribución de carga contiene la cantidad de carga $wa^2\rho$, donde ρ es la densidad de carga dentro del cubo —que suponemos uniforme—. Así pues, cuando la distancia de la carga al punto (1) es grande, cometeremos un error despreciable haciendo todas las r_i de los denominadores iguales a algún valor medio, digamos que la posición retardada r' del centro de la carga. Luego, la suma (21.30) es la siguiente:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\rho w a^2}{r'},$$

donde ΔV_N es el último ΔV_i que traslapa las distribuciones de carga, como muestra la figura 21-6(e). Claramente, la suma es:

$$N\,\frac{\rho w a^2}{r'} = \frac{\rho a^3}{r'}\left(\frac{Nw}{a}\right).$$

Ahora bien, ρa^3 es precisamente la carga total q y Nw es la longitud b mostrada en la parte (e) de la figura. Tenemos entonces:

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'}\left(\frac{b}{a}\right). \tag{21.31}$$

¿Qué es b? Es la longitud del cubo de carga *aumentada* en la distancia que se movió la carga entre $t_1 = (t - r_1/c)$ y $t_N = (t - r_N/c)$ —que es la distancia que la carga se mueve en el tiempo—,

$$\Delta t = t_N - t_1 = (r_1 - r_N)/c = b/c.$$

Como la velocidad de la carga es v, la distancia que se movió es $v\Delta t = vb/c$. Pero la longitud b es la distancia agregada a a:

$$b = a + \frac{v}{c}\,b.$$

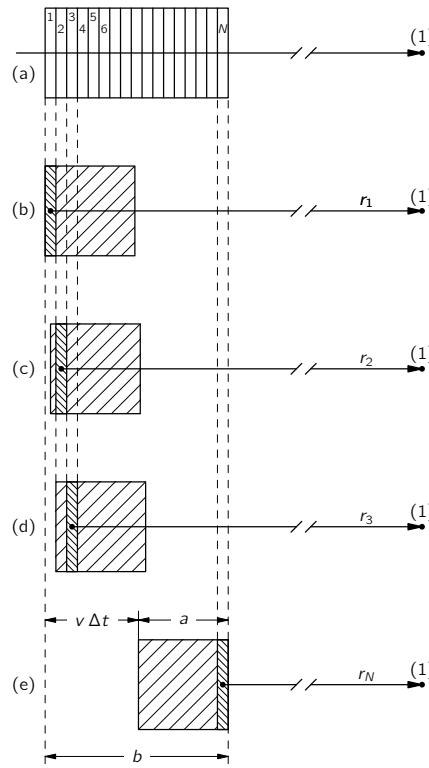


Figura 21-6. Integrando $\rho(t - r'/c)\,dV$ para una carga en movimiento.

Despejando b obtenemos:

$$b = \frac{a}{1-(v/c)}.$$

Naturalmente que por v entendemos la velocidad en el instante retardado $t' = (t - r'/c)$, lo cual podemos indicar escribiendo $[1-(v/c)]_{\text{ret}}$, y la ecuación (21.31) para el potencial se convierte en:

$$\phi(1,t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'}\,\frac{1}{[1-(v/c)]_{\text{ret}}}.$$

Este resultado concuerda con nuestro aserto, ecuación (21.29). Hay un término de corrección que aparece porque la carga se está moviendo a medida que nuestra integral "barre la carga". Así, cuando la carga se está moviendo hacia el punto (1), la contribución a la integral aumenta en el factor b/a. En consecuencia, la integral correcta es q/r' multiplicada por b/a, que es $1/[1-(v/c)]_{\text{ret}}$.

Si la velocidad de la carga no está dirigida hacia el punto de observación (1), pueden ver que lo que importa es la *componente* de su velocidad hacia el punto (1). Llamando v_r a esta componente de la velocidad, el factor de corrección es $1/[1-(v_r/c)]_{\text{ret}}$. Además de que el análisis que hemos hecho se realiza exactamente de la misma manera para una distribución de carga de *cualquier* forma —no tiene por qué ser un cubo—. Como el "tamaño" de la carga q no entra en nuestro resultado final, vale el mismo resultado cuando hacemos que la carga se encoja a cualquier tamaño —aun hasta un punto—. El resultado general es que el potencial escalar de una carga puntual moviéndose a cualquier velocidad es:

$$\phi(1,t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'[1-(v_r/c)]_{\text{ret}}}. \tag{21.32}$$

Esta ecuación se escribe a menudo en la forma equivalente

$$\phi(1,t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0[r-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}/c)]_{\text{ret}}}, \tag{21.33}$$

donde $\boldsymbol{r}$ es el vector de la carga en el punto (1), en el que ϕ se está calculado y todas las cantidades entre corchetes van a obtener sus valores en un tiempo retardado $t' = t - r'/c$.

Ocurre lo mismo cuando calculamos $\boldsymbol{A}$ para una carga puntual, usando la ecuación (21.16). La densidad de corriente es $\rho\boldsymbol{v}$ y la integral sobre ρ es la misma que encontramos para ϕ. El potencial vectorial es:

$$\boldsymbol{A}(1,t) = \frac{q\boldsymbol{v}_{\text{ret}}}{4\pi\epsilon_0 c^2[r-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}/c)]_{\text{ret}}}. \tag{21.34}$$

Liénard y Wiechert fueron los primeros en deducir los potenciales de una carga puntual en esta forma; se les llama *potenciales de Liénard-Wiechert*.

Para cerrar el anillo de vuelta hasta la ecuación (21.1) sólo es necesario calcular $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ a partir de estos potenciales (usando $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \partial\boldsymbol{A}/\partial t$). Ahora es aritmética pura. Sin embargo, la aritmética es bastante complicada, así que no escribiremos los detalles. Quizá nos crean bajo palabra que la ecuación (21.1) es equivalente a los potenciales de Liénard-Wiechert que hemos deducido.*

21-6 Los potenciales de una carga moviéndose a velocidad constante; la fórmula de Lorentz

A continuación nos gustaría utilizar los potenciales de Liénard-Wiechert en un caso especial; encontrar los campos de una carga moviéndose con velocidad uniforme en línea recta. Más tarde lo haremos de nuevo empleando el principio

* Si tienen un montón de papel y tiempo pueden intentar hacerlo por sí mismos. En ese caso, nos gustaría agregar dos sugerencias: primera, no olvidar que las derivadas de r' son complicadas, ya que se trata de una función de t'. Segunda, no tratar de *deducir* (21.1) sino llevar a cabo todas las derivaciones que contiene y luego comparar lo que obtengan con el $\boldsymbol{E}$ obtenido de los potenciales (21.33) y (21.34).

de relatividad. Ya sabemos cuáles son los potenciales cuando nos colocamos en el sistema en reposo de la carga. Así, cuando la carga se está moviendo, podemos calcular todo por medio de una transformación relativista de un sistema a otro diferente. Pero la relatividad tuvo su origen en la teoría de la electricidad y el magnetismo. Las fórmulas de la transformación de Lorentz (capítulo 15 del volumen I) fueron descubrimientos realizados por Lorentz cuando estaba estudiando las ecuaciones de la electricidad y el magnetismo. Para que puedan darse cuenta cómo surgieron quisiéramos demostrarles que las ecuaciones de Maxwell llevan realmente a la transformación de Lorentz. Comencemos calculando los potenciales de una carga que se mueve con velocidad uniforme, directamente de la electrodinámica de las ecuaciones de Maxwell. Hemos demostrado que las ecuaciones de Maxwell conducen a los potenciales de una carga en movimiento que hemos obtenido en la última sección. Así pues, cuando utilizamos estos potenciales, estamos utilizando la teoría de Maxwell.

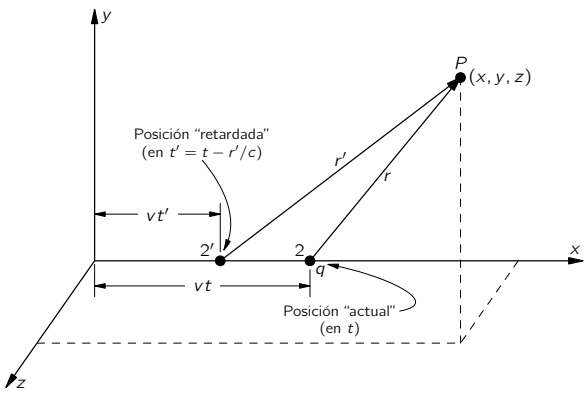


Figura 21-7. Buscando el potencial en P de una carga moviéndose con velocidad uniforme sobre el eje x.

Supongan que tenemos una carga moviéndose sobre el eje x con velocidad v. Los potenciales estarán en el punto $P(x, y, z)$, como muestra la figura 21-7. Si $t = 0$ es el momento en que la carga está en el origen, en el instante t la carga está en $x = vt$, $y = z = 0$. Sin embargo, lo que necesitamos saber es su posición en el instante retardado:

$$t' = t - \frac{r'}{c}, \tag{21.35}$$

donde r' es la distancia desde la carga al punto P *en el instante retardado.* En el instante anterior t' la carga estaba en $x = vt'$, así que se tiene:

$$r' = \sqrt{(x - vt')^2 + y^2 + z^2}. \tag{21.36}$$

Para buscar r' o t' tenemos que combinar esta ecuación con la ecuación (21.35). Primero, eliminamos r' despejándola de la ecuación (21.35) y sustituyéndola en la ecuación (21.36). Luego, elevando ambos miembros al cuadrado, obtenemos:

$$c^2(t - t')^2 = (x - vt')^2 + y^2 + z^2,$$

que es una ecuación cuadrática en t'. Desarrollando los binomios y agrupando términos similares en t', obtenemos:

$$(v^2 - c^2)t'^2 - 2(xv - c^2t)t' + x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0.$$

Despejando t',

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t' = t - \frac{vx}{c^2} - \frac{1}{c}\sqrt{(x - vt)^2 + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}. \tag{21.37}$$

Para obtener r' tenemos que sustituir esta expresión de t', en

$$r' = c(t - t').$$

Ahora estamos listos para encontrar ϕ con la ecuación (21.33) que, como $\boldsymbol{v}$ es constante, se convierte en:

$$\phi(x,y,z,t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r' - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}'/c)}. \tag{21.38}$$

La componente de $\boldsymbol{v}$ en la dirección de $\boldsymbol{r}'$ es $v \times (x - vt')/r'$, así que $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}'$ es simplemente $v \times (x - vt')$ y el denominador completo es:

$$c(t-t') - \frac{v}{c}(x - vt') = c\left[t - \frac{vx}{c^2} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t'\right].$$

Sustituyendo $(1 - v^2/c^2)t'$ por su expresión (21.37), obtenemos para ϕ

$$\phi(x,y,z,t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{(x-vt)^2 + \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)(y^2+z^2)}}.$$

Esta ecuación es más comprensible si la volvemos a escribir en la forma:

$$\phi(x,y,z,t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}\,\frac{1}{\left[\left(\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)^2 + y^2 + z^2\right]^{1/2}}. \tag{21.39}$$

El potencial vectorial $\boldsymbol{A}$ es la misma expresión con un factor adicional $\boldsymbol{v}/c^2$:

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{v}}{c^2}\,\phi.$$

En la ecuación (21.39) pueden ver claramente el comienzo de la transformación de Lorentz. Si la carga estuviera en el origen de su propio sistema en reposo, su potencial sería

$$\phi(x,y,z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{[x^2+y^2+z^2]^{1/2}}.$$

La estamos viendo en un sistema de coordenadas en movimiento y parece que las coordenadas se deben transformar mediante

$$\begin{aligned} x &\to \frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}},\\ y &\to y,\\ z &\to z. \end{aligned}$$

Ésta es justamente la transformación de Lorentz y lo que hemos logrado es esencialmente la manera en que Lorentz la descubrió.

Pero ¿y el factor adicional $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ que aparece delante de la ecuación (21.39)? Además, ¿cómo aparece el potencial vectorial $\boldsymbol{A}$ si es cero para todo punto del sistema en reposo de la partícula? Dentro de poco demostraremos que $\boldsymbol{A}$ y ϕ *juntos* constituyen un vector de cuatro dimensiones, como el momentum $\boldsymbol{p}$ y el total de la energía U de la partícula. El extra $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ en la ecuación (21.39) es el mismo factor que entra siempre que se transforman los componentes de un vector de cuatro dimensiones; exactamente como la densidad de carga ρ se transforma en $\rho/\sqrt{1-v^2/c^2}$. En realidad, está casi a la vista en las ecuaciones (21.4) y (21.5) donde $\boldsymbol{A}$ y ϕ son componentes de un vector de cuatro dimensiones, pues como ya lo mostramos en el capítulo 13, $\boldsymbol{j}$ y ρ son componentes de un vector de dimensión cuatro.

Más adelante trataremos con más detalle la relatividad de la electrodinámica. Aquí sólo nos interesa mostrar cómo las ecuaciones de Maxwell condujeron a la transformación de Lorentz tan naturalmente. No les sorprenderá, pues, encontrar que las leyes de la electricidad y el magnetismo son ya correctas en la relatividad de Einstein. No tendremos que "componerlas" como tuvimos que hacerlo con las leyes de la mecánica de Newton.

22

Circuitos de CA

22-1 Impedancias
22-2 Generadores
22-3 Redes de elementos ideales; leyes de Kirchhoff
22-4 Circuitos equivalentes
22-5 Energía
22-6 Un circuito en escalera
22-7 Filtros
22-8 Otros elementos de circuito

Revisar
Volumen I, capítulo 22, *Álgebra*
Volumen I, capítulo 23, *Resonancia*
Volumen I, capítulo 25, *Sistemas lineales y repaso*

22-1 Impedancias

La mayor parte de nuestro trabajo en este curso ha estado encaminada a obtener las ecuaciones de Maxwell completas. En los dos últimos capítulos estudiamos las consecuencias de estas ecuaciones. Notamos que las ecuaciones contienen todos los fenómenos estáticos estudiados anteriormente, así como también los fenómenos de las ondas electromagnéticas y de la luz que habíamos discutido con ciertos detalles en el volumen I. Las ecuaciones de Maxwell dan ambos fenómenos, según lo que se calcule, los campos cerca de las corrientes y de las cargas o muy lejos de ellas. No hay mucho de interés en que decir sobre la región intermedia; en ella no aparecen fenómenos especiales.

Sin embargo, quedan varios temas de electromagnetismo que debemos tratar. Queremos discutir la cuestión de la relatividad y las ecuaciones de Maxwell como sigue: qué ocurre cuando examinamos las ecuaciones de Maxwell respecto a sistemas de coordenadas en movimiento. También está la cuestión de la conservación de la energía en sistemas electromagnéticos. Luego está el vasto tema de las propiedades electromagnéticas de los materiales; hasta ahora, exceptuando el estudio de las propiedades de los dieléctricos, sólo hemos considerado los campos electromagnéticos en el espacio libre. Y aunque hemos cubierto el tema de la luz con ciertos detalles en el volumen I, quedan aún algunas cuestiones que hacer desde el punto de vista de las ecuaciones de campo.

En particular, queremos tratar de nuevo el tema del índice de refracción, específicamente en materiales densos. Además, están los fenómenos asociados con ondas confinadas en una región limitada del espacio. Tocamos poco este tipo de problemas al estudiar las ondas de sonido. Las ecuaciones de Maxwell también conducen a soluciones que representan ondas confinadas de los campos eléctrico y magnético. Trataremos este tema, que tiene aplicaciones técnicas importantes, en uno de los capítulos que siguen. Para llegar a ese tema, comenzaremos considerando propiedades de los circuitos eléctricos a frecuencias bajas. Así, estaremos en condiciones de hacer una comparación entre las situaciones donde son útiles las aproximaciones casi estáticas de las ecuaciones de Maxwell y las situaciones donde dominan los efectos de alta frecuencia.

Así, descendamos de las alturas grandiosas y esotéricas de los últimos capítulos y dediquémonos al tema de nivel relativamente bajo de los circuitos eléctricos. Veremos, sin embargo, que hasta ese tema mundano puede contener grandes complicaciones cuando se lo examina detalladamente.

Ya hemos estudiado algunas propiedades de los circuitos eléctricos en los capítulos 23 y 25 del volumen I. Ahora cubriremos de nuevo el mismo material pero con mayores detalles. De nuevo vamos a ocuparnos únicamente de sistemas lineales y de voltajes y corrientes que varían senoidalmente; luego será posible representar todos los voltajes y corrientes mediante números complejos, empleando la notación exponencial descrita en el capítulo 23 del volumen I. Por lo cual, escribiremos un voltaje $V(t)$ que varía en el tiempo como sigue:

$$V(t) = \hat{V}e^{i\omega t}, \tag{22.1}$$

donde $\hat{V}$ representa un número complejo independiente de t. Se sobrentiende, por supuesto, que el verdadero voltaje $V(t)$ que varía en el tiempo está dado por la *parte real* de la función compleja del segundo miembro de la ecuación.

Análogamente, tomaremos todas las otras cantidades que varían en el tiempo como variando senoidalmente con la misma frecuencia w. Escribimos, pues,

$$\begin{aligned} I &= \hat{I}\, e^{i\omega t} \quad \text{(corriente)},\\ \mathcal{E} &= \hat{\mathcal{E}}\, e^{i\omega t} \quad \text{(fem)},\\ \boldsymbol{E} &= \hat{\boldsymbol{E}}\, e^{i\omega t} \quad \text{(campo eléctrico)}, \end{aligned} \tag{22.2}$$

y así sucesivamente.

La mayor parte del tiempo escribiremos nuestras ecuaciones en términos de V, I, $\mathcal{E}$, ... (en vez de $\hat{V}$, $\hat{I}$, $\hat{\mathcal{E}}$, ...), recordando, no obstante, que las variaciones temporales son como indica la ecuación (22.2).

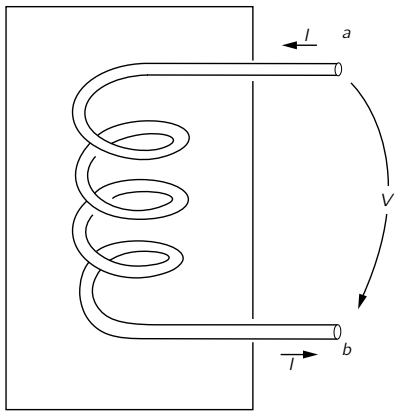


Figura 22-1. Una inductancia.

En nuestro estudio anterior de circuitos, supusimos que cosas como inductancias, capacitancias y resistencias les eran familiares. Ahora examinaremos más detalladamente lo que se entiende por estos elementos de circuito idealizados. Comenzamos con la inductancia.

Una inductancia se hace enrollando muchas vueltas de alambre en forma de bobina y llevando los dos extremos a terminales que están a cierta distancia de la bobina, como muestra la figura 22-1. Suponemos que el campo magnético producido por las corrientes de la bobina no se extiende intensamente por todo el espacio exterior, interactuando con otras partes del circuito. Por lo general, se consigue esto haciendo la bobina en forma de rosca, o confinando el campo magnético enrollando la bobina sobre un núcleo apropiado de hierro, o se coloca la bobina en una caja metálica apropiada, como se indica esquemáticamente en la figura 22-1. Supongamos que hay un campo magnético despreciable en la región externa cerca de los terminales a y b. También vamos a suponer que podemos despreciar la resistencia eléctrica del alambre de la bobina. Para terminar, supondremos que podemos despreciar la cantidad de carga eléctrica que aparece en la superficie de un alambre al establecer los campos eléctricos.

Con todas estas aproximaciones tenemos lo que llamaremos una inductancia "ideal". (Volveremos sobre el asunto más tarde y estudiaremos lo que ocurre en una inductancia real.) Para una inductancia ideal decimos que el voltaje entre los terminales es igual a $L(dI/dt)$. Veamos por qué. Así, cuando hay una corriente por la inductancia, se establece dentro de la bobina un campo magnético proporcional a la corriente. Siempre que la corriente varía en el tiempo, el campo magnético también varía. En general, el rotacional de $\boldsymbol{E}$ es igual a $-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$; o dicho de otra manera, la integral de línea de $\boldsymbol{E}$ a todo lo largo de cualquier camino cerrado es igual a menos la derivada respecto al tiempo del flujo de $\boldsymbol{B}$ a través del lazo. Supongan ahora que consideramos el siguiente camino: empiecen en el terminal a y recorran la bobina (permaneciendo siempre dentro del alambre) hasta el terminal b; luego vuelvan del terminal b al terminal a por el aire en el espacio exterior a la inductancia. La integral de línea de $\boldsymbol{E}$ a lo largo de este camino cerrado se puede escribir como la suma de dos partes:

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = \underbrace{\int_a^b \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}}_{\substack{\text{por la}\\ \text{bobina}}} + \underbrace{\int_b^a \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}}_{\text{fuera}}. \tag{22.3}$$

Como hemos visto antes, no puede haber campos eléctricos dentro de un conductor perfecto. (Los campos más pequeños producirían corrientes infinitas.) En consecuencia, la integral de a a b por la bobina es cero. Toda la contribución a la integral de línea de $\boldsymbol{E}$ proviene del camino exterior a la inductancia desde el terminal b hasta el terminal a. Como hemos supuesto que no hay campos magnéticos en el espacio exterior a la "caja", esta parte de la integral es independiente del camino elegido y podemos definir el potencial de los terminales. Así, la diferencia de estos dos potenciales es lo que llamamos diferencia de voltaje, o simplemente voltaje V, así tenemos

$$V = -\int_b^a \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = -\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}.$$

La integral de línea completa es lo que antes hemos llamado fuerza electromotriz $\mathcal{E}$ y es igual a la derivada respecto al tiempo del flujo magnético en la bobina. Hemos visto antes que esta fem es igual a menos la derivada de la corriente respecto al tiempo, así que tenemos

$$V = -\mathcal{E} = L\,\frac{dI}{dt},$$

donde L es la inductancia de la bobina. Como $dI/dt = i\omega I$, tenemos

$$V = i\omega LI. \tag{22.4}$$

La manera en que hemos descrito la inductancia ideal ilustra el enfoque general de otros elementos de circuito ideales —normalmente llamados elementos "concentrados"—. Se describen completamente las propiedades de éstos en términos de corrientes y voltajes que aparecen en los terminales. Haciendo aproximaciones apropiadas es posible ignorar las grandes complejidades de los campos que aparecen dentro del objeto. Se hace una separación entre lo que ocurre dentro y lo que ocurre fuera.

Para todos los elementos del circuito encontraremos una relación como la de la ecuación (22.4), en la cual el voltaje es proporcional a la corriente con una constante de proporcionalidad que, en general, es un número complejo. Además, este coeficiente de proporcionalidad complejo se llama *impedancia* y, por lo común, se lo designa con z (no confundir con la coordenada z). En general, es función de la frecuencia ω. Así pues, para cualquier elemento concentrado escribimos

$$\frac{V}{I} = \frac{\hat{V}}{\hat{I}} = z. \tag{22.5}$$

Para una inductancia, tenemos

$$z\,(\text{inductancia}) = z_L = i\omega L. \tag{22.6}$$

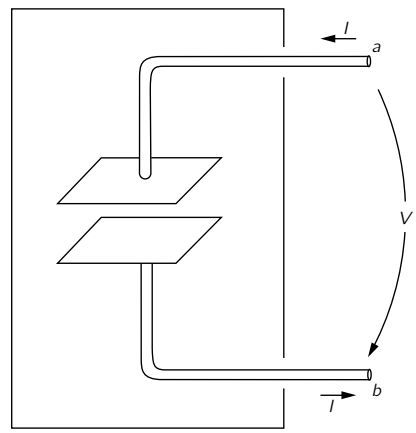


Figura 22-2. Un capacitor (o condensador).

Examinemos ahora un capacitor desde el mismo punto de vista.* Un capacitor consiste en un par de placas conductoras desde las cuales se lleva dos alambres hasta terminales apropiados. Las placas pueden ser de cualquier forma y a menudo están separadas por algún material dieléctrico. Ilustramos esquemáticamente esta situación en la figura 22-2. Hacemos nuevamente aproximaciones simplificadas. Suponemos que las placas y los alambres son conductores perfectos. Suponemos también que la aislación entre las placas es perfecta, de modo que ninguna carga puede fluir a través de la aislación de una placa a la otra. Luego suponemos que los dos conductores están cerca uno de otro pero lejos de cualquier otro conductor, de modo que las líneas de campo que dejan una placa acaban en la otra. De este modo, siempre hay cargas iguales y opuestas en las dos placas y esas cargas que están en las placas son mucho mayores que las cargas que hay en los alambres de entrada. Finalmente, suponemos que no hay campos magnéticos cerca del capacitor.

Supongamos que consideramos la integral de línea de $\boldsymbol{E}$ a lo largo de un lazo cerrado que empezamos en el terminal a, sigue por dentro del alambre hasta la placa superior del capacitor, salta por el espacio entre las placas, pasa de la placa inferior al terminal b por el alambre y vuelve al terminal a por el espacio exterior al capacitor. Como no hay campo magnético, la integral de línea de $\boldsymbol{E}$ a lo largo de este camino cerrado es cero. Se puede separar la integral en tres partes:

* Hay gente que dice que deberíamos llamar a los *objetos* por los nombres de "inductor" y "capacitor" y llamar "inductancia" y "capacitancia" a sus *propiedades* (por analogía con "resistor" y "resistencia"). Preferimos usar las palabras que oirán en el laboratorio. La mayoría de la gente todavía dice "inductancia" al referirse tanto a la bobina física como a su inductancia L. Parece que la palabra "capacitor" se ha popularizado —aunque todavía oirán "condensador" muy a menudo— y la mayoría de la gente todavía prefiere el sonido de "capacidad" al de "capacitancia".
N. del T.: respecto a la nota anterior y la terminología, véase la N. del T. en página 6-12.

$$\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = \int\limits_{\substack{\text{en los}\\ \text{cables}}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} + \int\limits_{\substack{\text{entre las}\\ \text{placas}}} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} + \int_{\substack{b\\ \text{fuera}}}^{a} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s}. \tag{22.7}$$

La integral a lo largo de los alambres es cero porque no hay campos eléctricos dentro de conductores perfectos. La integral de b a a por fuera del capacitor es igual a menos la diferencia de potencial entre los terminales. Como hemos imaginado que las dos placas están aisladas del resto del universo, la carga total sobre las dos placas tiene que ser cero; si hay una carga Q en la placa superior, hay una carga igual y opuesta $-Q$ en la placa inferior. Vimos antes que siempre y cuando dos conductores tengan cargas iguales y opuestas, más y menos Q, la diferencia de potencial entre las placas es igual a Q/C, donde C se llama capacidad de los dos conductores. Según la ecuación (22.7) la diferencia de potencial entre los terminales a y b es igual a la diferencia de potencial entre las placas. Tenemos, en consecuencia,

$$V = \frac{Q}{C}.$$

La corriente eléctrica I que entra al capacitor por el terminal a (y lo deja por el terminal b) es igual a dQ/dt, la derivada respecto al tiempo de la carga eléctrica que hay sobre las placas. Escribiendo $i\omega V$ en vez de dV/dt, podemos poner la relación voltaje-corriente de un capacitor en la siguiente forma:

$$i\omega V = \frac{I}{C},$$

o sea

$$V = \frac{I}{i\omega C}. \tag{22.8}$$

La impedancia z del capacitor es entonces

$$z\,(\text{capacitor}) = z_C = \frac{1}{i\omega C}. \tag{22.9}$$

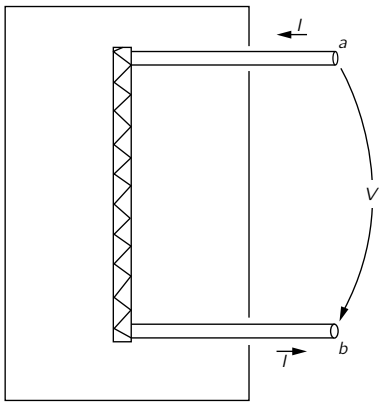


Figura 22-3. Un resistor.

El tercer elemento que queremos considerar es un resistor. Sin embargo, como todavía no estudiamos las propiedades eléctricas de los materiales reales, aún no estamos en condiciones de hablar de lo que ocurre dentro de un conductor real. Simplemente, tendremos que aceptar como un hecho que los campos eléctricos pueden existir dentro de los materiales reales, que estos campos eléctricos originan un flujo de carga eléctrica —es decir, una corriente— y que esta corriente es proporcional a la integral del campo eléctrico desde un extremo al otro del conductor. Podemos imaginar entonces un resistor ideal construido como en el diagrama de la figura 22-3. Dos alambres que suponemos conductores perfectos van desde los terminales a y b hasta los dos extremos de una barra de material resistivo. Siguiendo nuestro razonamiento, la diferencia de potencial entre los terminales a y b es igual a la integral de línea del campo eléctrico externo, así que también es igual a la integral de línea del campo eléctrico a lo largo de la barra de material resistivo. Se deduce entonces que la corriente I por el resistor es proporcional al voltaje V en los terminales:

$$I = \frac{V}{R},$$

donde R se llama resistencia. Veremos más adelante que la relación entre la corriente y el voltaje en los materiales conductores reales es sólo aproximadamente lineal. Veremos también que esta proporcionalidad aproximada es de esperar que sea independiente de la frecuencia de variación de la corriente y del voltaje únicamente si la frecuencia no es demasiado alta. Luego, para corrientes alternas, el voltaje en un resistor está en fase con la corriente, lo cual significa que la impedancia es un número real:

$$z\,(\text{resistancia}) = z_R = R. \tag{22.10}$$

Nuestros resultados para los tres elementos de circuito concentrados —el inductor, el capacitor y el resistor— están representados como se observa en la figura 22-4. En esta figura, como en las anteriores, hemos indicado el voltaje con una flecha dirigida de un terminal al otro. Si el voltaje es "positivo" —es decir, si el terminal a está a un potencial *más alto* que el b— la flecha indica el sentido de una "caída de potencial" positiva.

Aunque estamos hablando de corrientes alternas, podemos incluir, por supuesto, el caso especial de circuitos con corrientes estacionarias tomando el límite de la frecuencia ω tendiendo a cero. Para frecuencia cero —es decir, para CC— la impedancia de un inductor tiende a cero; se convierte en un cortocircuito. Para CC, la impedancia de un condensador va a infinito; se convierte en un circuito abierto. Como la impedancia de un resistor es independiente de la frecuencia, es el único elemento que queda cuando analizamos un circuito con CC.

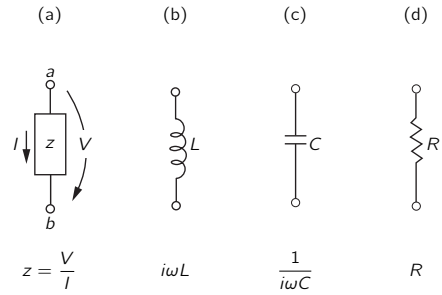


Figura 22-4. Los elementos de circuitos concentrados ideales (pasivos).

En los elementos de circuito que hemos descrito hasta ahora, la corriente y el voltaje son proporcionales entre sí. Si uno es cero también lo es el otro. Por lo general, pensamos en términos como éstos: un voltaje aplicado es "responsable" de la corriente, o una corriente "origina" un voltaje en los terminales; en cierto sentido, los elementos "responden" a las condiciones externas "aplicadas". Por esta razón, estos elementos de circuitos se llaman *elementos pasivos*. Por ello, se los puede oponer a los elementos activos, como los generadores que consideraremos en la próxima sección, que son las *fuentes* de las corrientes oscilantes y voltajes en un circuito.

22-2 Generadores

Trataremos ahora acerca de un elemento de circuito *activo* —un elemento que es una fuente de las corrientes y voltajes en un circuito—, a saber, un *generador*.

Supongan que tenemos una bobina parecida a una inductancia excepto que tiene muy pocas vueltas, así que podemos despreciar el campo magnético de su propia corriente. Sin embargo, esta bobina está en un campo magnético variable, como el que produciría un imán rotando, como se observa en el esquema de la figura 22-5. (Hemos visto antes que también se puede producir ese campo magnético rotante por medio de un conjunto apropiado de bobinas con corrientes alternas.) De nuevo tenemos que hacer varias hipótesis simplificadas. Las hipótesis que haremos son todas las que hicimos en el caso de la inductancia. En particular, supondremos que el campo magnético variable está limitado a una región determinada en la vecindad de la bobina y no aparece fuera del generador en el espacio entre los terminales.

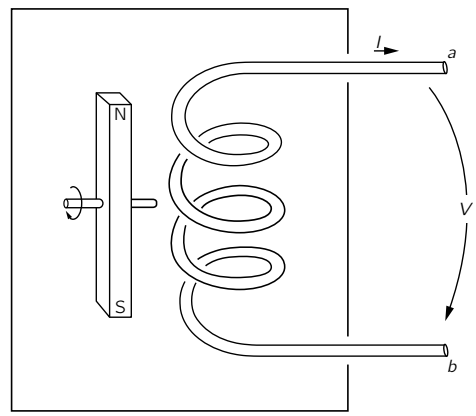


Figura 22-5. Un generador formado por una bobina fija y un campo magnético rotante.

Siguiendo paso a paso el análisis que hicimos para la inductancia, consideremos al integral de línea de $\boldsymbol{E}$ a lo largo de un lazo completo que empieza en el terminal a, va por la bobina hasta el terminal b y vuelve a su punto de partida por el espacio entre los dos terminales. Concluimos de nuevo que la diferencia de potencial entre los terminales es igual a la integral total de línea de $\boldsymbol{E}$ a lo largo del lazo:

$$V = -\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s}.$$

Esta integral de línea es igual a la fem del circuito, así que la diferencia de potencial V en los terminales del generador también es equivalente a la derivada respecto al tiempo del flujo magnético enlazado por la bobina:

$$V = -\mathcal{E} = \frac{d}{dt}\,(\text{flujo}). \tag{22.11}$$

Para un generador ideal suponemos que el flujo magnético que enlaza la bobina está determinado por las condiciones externas —como la velocidad angular de un campo magnético rotante— y no está influido de ninguna manera por las corrientes del generador. Por lo tanto, un generador —por lo menos el generador *ideal* que estamos considerando— no es una impedancia. La diferencia de potencial en sus terminales está determinada por la fuerza electromotriz arbitraria $\mathcal{E}(t)$ dada. Un generador ideal como éste está representado por el símbolo mostrado en la

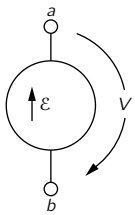


Figura 22-6. Símbolo para un generador ideal.

figura 22-6. La flechita representa el sentido de la fem cuando es positiva. Una fem positiva en el generador de la figura 22-6 producirá un voltaje $V = \mathcal{E}$, con el terminal a al potencial más alto que el terminal b.

Hay otra manera de hacer un generador que es completamente diferente por dentro pero que es indistinguible del que acabamos de describir en lo que respecta a lo que ocurre más allá de sus terminales. Supongan que tenemos una bobina de alambre y la rotamos en un campo magnético *fijo*, como indica la figura 22-7. Mostramos un imán de barra para indicar la presencia de un campo magnético; por supuesto que se lo podría remplazar por cualquier otra fuente de campo magnético estático, como una bobina adicional que lleva una corriente estacionaria. Como muestra la figura, las conexiones de la bobina rotante al mundo externo están hechas por medio de contactos corredizos o "anillos deslizantes". Estamos interesados en la diferencia de potencial que aparece en los dos terminales a y b; por supuesto, es la integral del campo eléctrico desde el terminal a hasta el b a lo largo de un camino fuera del generador.

Ahora bien, en el sistema de la figura 22-7 no hay campos magnéticos variables, así que a primera vista podríamos preguntarnos cómo es que puede aparecer un voltaje en los terminales del generador. De hecho, no hay campos eléctricos en ninguna parte dentro del generador. Como de costumbre, suponemos para nuestros elementos ideales que los alambres internos están hechos de material perfectamente conductor, y como hemos dicho muchas veces, el campo eléctrico dentro de un conductor perfecto es cero. Pero no es cierto cuando un conductor se está moviendo en un campo magnético. El enunciado correcto es que la *fuerza* total sobre cualquier carga dentro de un conductor perfecto tiene que ser cero. De otra manera, habría un flujo infinito de cargas libres. Así pues, lo que siempre es cierto es que la suma del campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ y el producto vectorial de la velocidad del conductor por el campo magnético $\boldsymbol{B}$ —que es la fuerza total sobre una unidad de carga— tiene que valer cero dentro del conductor:

$$\boldsymbol{F}/\text{unidad de carga} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = 0 \quad \text{(en un conductor perfecto)}, \tag{22.12}$$

donde $\boldsymbol{v}$ representa la velocidad del conductor. Nuestro enunciado anterior de que no hay campo eléctrico dentro de un conductor perfecto está muy bien si la velocidad $\boldsymbol{v}$ del conductor es cero; en caso contrario, el enunciado correcto es el dado por la ecuación (22.12).

Volviendo a nuestro generador de la figura 22-7, vemos ahora que la integral de línea del campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ desde el terminal a hasta el terminal b por el camino conductor del generador debe ser igual a la integral de línea de $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ sobre el mismo camino,

$$\int_{\substack{a \\ \text{dentro del} \\ \text{conductor}}}^{b} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = - \int_{\substack{a \\ \text{dentro del} \\ \text{conductor}}}^{b} (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{s}. \tag{22.13}$$

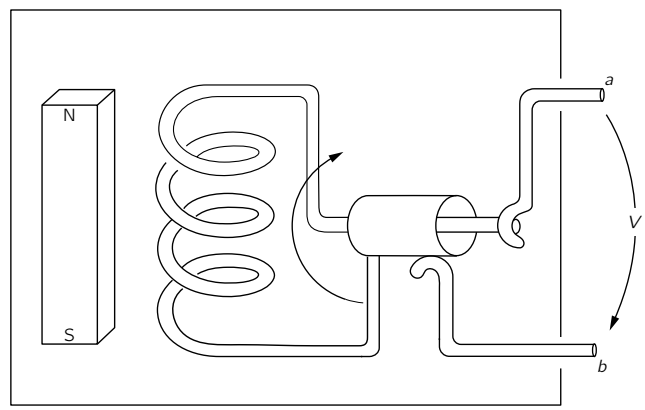


Figura 22-7. Un generador formado por una bobina que rota en un campo magnético fijo.

No obstante, sigue siendo válido que la integral de línea de $\boldsymbol{E}$ a lo largo de un lazo completo, incluyendo el retorno desde b hasta a por fuera del generador, tiene que ser cero, porque no hay campos magnéticos variables. Por tanto, la primera integral de la ecuación (22.13) también es igual a V, el voltaje entre los dos terminales. Resulta que la integral del segundo miembro de la ecuación (22.13) es la derivada respecto al tiempo del flujo enlazado por la bobina y, en consecuencia, es igual —por regla del flujo— a la fem de la bobina. Por tanto, tenemos de nuevo que la diferencia de potencial entre los terminales es igual a la fuerza electromotriz en el circuito, lo cual concuerda con la ecuación (22.11). Así pues, sea que tengamos un generador en el que un campo magnético varía cerca de una bobina fija, o uno en el que una bobina se mueve en un campo magnético fijo, las propiedades externas de ambos generadores son las mismas. Hay una diferencia de voltaje V en los terminales, el cual es independiente de la corriente del circuito, dependiendo únicamente de las condiciones asignadas arbitrariamente dentro del generador.

Ya que estamos tratando de comprender el funcionamiento de los generadores desde el punto de vista de las ecuaciones de Maxwell, también podríamos considerar una celda química, como una pila de linterna. También es un generador, es decir, una fuente de voltaje, aunque, por supuesto, sólo aparecerá en circuitos CC. El tipo de celda más simple de entender es el que muestra la figura 22-8. Imaginemos dos placas metálicas sumergidas en una solución química. Suponemos que la solución contiene iones positivos y negativos. Suponemos también que el ion de una clase, negativo digamos, es mucho más pesado que el de polaridad opuesta, de modo que su movimiento por la solución debido al proceso de difusión es mucho más lento. Suponemos luego que por un medio u otro se ha hecho que la concentración de la solución varíe de una parte a otra del líquido, de modo que el número de iones de ambas polaridades cerca de la placa inferior, es mucho mayor que la concentración de iones cerca de la placa superior. Debido a su gran movilidad, los iones positivos se moverán más fácilmente hacia la región de concentración menor, de modo que en la placa superior habrá un pequeño exceso de carga positiva. La placa superior se cargará positivamente y la inferior tendrá una carga resultante negativa.

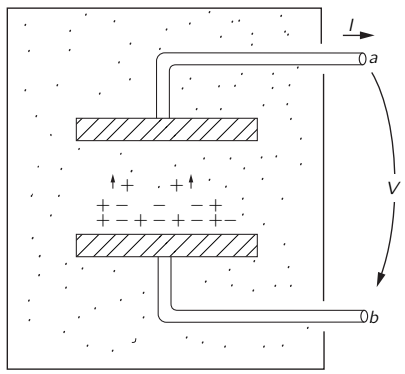


Figura 22-8. Celda química.

A medida que más y más cargas se difunden hacia la placa superior, el potencial de esta placa aumenta hasta que el campo eléctrico resultante en medio de las placas produzca fuerzas sobre los iones que compensen exactamente su exceso de movilidad, de modo que las dos placas de la celda alcanzan rápidamente una diferencia de potencial que es característica de la construcción interna.

Razonando como lo hicimos con el capacitor ideal, vemos que la diferencia de potencial entre los terminales a y b es igual a la integral de línea del campo eléctrico entre las dos placas cuando ya no hay ninguna difusión resultante de iones. Hay, por supuesto, una diferencia esencial entre un capacitor y una celda química de este tipo. Si ponemos en cortocircuito los terminales de un condensador por un momento, el capacitor se descarga y deja de haber una diferencia de potencial en los terminales. En el caso de una celda química se puede extraer continuamente una corriente de los terminales sin ninguna variación de la fem —por supuesto, hasta que las sustancias químicas que hay dentro de la celda se gasten—. En una celda real se encuentra que la diferencia de potencial entre los terminales disminuye a medida que aumenta la corriente que se extrae de la celda. Sin embargo, para ser consecuentes con las abstracciones que hemos estado haciendo, podemos imaginar una celda ideal en la cual el voltaje en los terminales sea independiente de la corriente. Una celda real se puede considerar entonces como una celda ideal en serie con un resistor.

22-3 Redes de elementos ideales; leyes de Kirchhoff

Como hemos visto en la sección anterior, la descripción de un elemento ideal de circuito en términos de lo que ocurre fuera del elemento es muy simple. La corriente y el voltaje están relacionados linealmente. Pero lo que ocurre realmente dentro del elemento es muy complicado y es muy difícil dar una descripción exacta

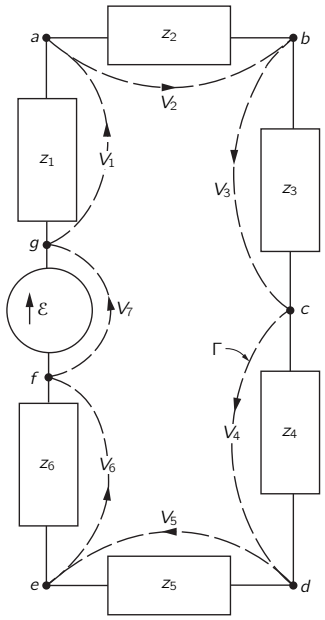


Figura 22-9. La suma de las caídas de potencial a lo largo de cualquier camino cerrado es cero.

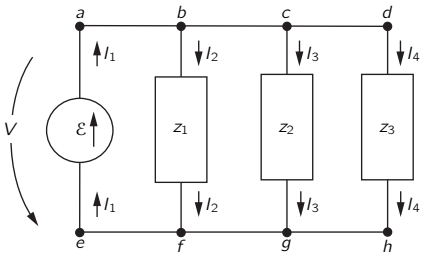


Figura 22-10. La suma de las corrientes dentro de cualquier nodo es cero.

en términos de las ecuaciones de Maxwell. Imaginen que tratamos de dar una descripción precisa de los campos eléctricos y magnéticos dentro de una radio que contiene cientos de resistores, capacitores e inductores. Sería una tarea imposible analizar una cosa como ésa empleando las ecuaciones de Maxwell. Pero haciendo muchas de las aproximaciones que describimos en la sección 22-2 y haciendo un resumen de los rasgos esenciales de los elementos de circuitos reales en términos de idealizaciones, es posible analizar un circuito eléctrico de una manera relativamente simple. Mostraremos ahora cómo hacerlo.

Supongan que tenemos un circuito compuesto de un generador y varias impedancias interconectadas, como muestra la figura 22-9. Conforme a nuestras aproximaciones no hay campo magnético en la región externa a cada uno de los elementos de circuito. Por tanto, la integral de línea de $\boldsymbol{E}$ a lo largo de cualquier curva que no atraviesa ningún elemento es cero. Consideren entonces la curva Γ indicada con la línea discontinua que da vuelta a todo el circuito de la figura 22-9. La integral de línea de $\boldsymbol{E}$ a lo largo de esta curva está compuesta de varias partes. Cada parte es la integral de línea desde un terminal al otro de un elemento de circuito. Esta integral de línea que hemos llamado voltaje cae a lo largo del elemento de circuito. La integral de línea completa es, entonces, la suma de las caídas de potencial en todos los elementos del circuito:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = \sum V_n.$$

Como la integral de línea es cero, tenemos que la suma de las diferencias de potencial a lo largo de un lazo completo de un circuito es igual a cero:

$$\sum_{\substack{\text{a lo largo de}\\ \text{cualquier lazo}}} V_n = 0. \tag{22.14}$$

Este resultado se deduce de una de las ecuaciones de Maxwell —que en una región donde no hay campos magnéticos la integral de línea de $\boldsymbol{E}$ a lo largo de cualquier lazo completo es cero—.

Supongan que consideramos ahora un circuito como el de la figura 22-10. La línea horizontal que une los terminales a, b, c y d significa que todos ellos están conectados, o unidos por alambres de resistencia despreciable. Así, el dibujo representa que los terminales a, b, c y d están al mismo potencial y, análogamente, que los terminales e, f, g y h, también están a un potencial común. Entonces el voltaje V en cada uno de los cuatro elementos es el mismo.

Ahora, una de nuestras idealizaciones fue que en los terminales de las impedancias se acumulan cargas eléctricas despreciables. Supongamos además que también se puede despreciar cualquier carga eléctrica que haya sobre los alambres que unen los terminales. Luego, la conservación de la carga exige que cualquier carga que deje uno de los elementos de circuito entre inmediatamente en algún otro elemento de circuito. O, lo que es lo mismo, exigimos que la suma algebraica de las corrientes que entren en una unión cualquiera tiene que ser cero. Por unión entendemos, naturalmente, cualquier conjunto de terminales como a, b, c y d que están conectados. Ese conjunto de terminales conectados se llaman, por lo común, "nodo". La conservación de carga exige entonces que para el circuito de la figura 22-10,

$$I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0. \tag{22.15}$$

La suma de las corrientes que llegan al nodo formado por los cuatro terminales e, f, g y h también tiene que ser cero:

$$-I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0. \tag{22.16}$$

Por supuesto que ésta es lo mismo que la ecuación (22.15). Las dos ecuaciones no son independientes. La regla general es que *la suma de las corrientes que llegan a un nodo tiene que ser cero.*

$$\sum_{\substack{\text{que llegan}\\ \text{a un nodo}}} I_n = 0. \tag{22.17}$$

Nuestra conclusión anterior de que la suma de las caídas de voltajes a lo largo de un lazo cerrado sea cero debe servir para cualquier lazo en un circuito complicado. Además, nuestro resultado de que la suma de las corrientes que llegan a un nodo es cero debe ser válido para cualquier nodo. Se conoce a estas dos ecuaciones como *leyes de Kirchhoffs*. Con estas dos leyes es posible hallar las corrientes y voltajes en un circuito cualquiera.

Supongan que consideramos el circuito más complicado de la figura 22-11. ¿Cómo hallar las corrientes y voltajes ahí? Podemos hallarlas directamente del modo siguiente. Consideramos separadamente cada uno de los cuatro lazos cerrados secundarios que aparecen en el circuito. (Por ejemplo, un lazo va del terminal a al terminal b, al terminal e, al terminal d y regresa a a.) Escribimos para cada uno de los lazos la ecuación correspondiente a la primera regla de Kirchhoff —que la suma de los voltajes a lo largo de cada lazo es igual a cero—. Tenemos que recordar que hay que contar la caída de voltaje como positiva si vamos *en* el sentido de la corriente y negativa si atraviesa un elemento en sentido *opuesto* al de la corriente; y que la caída de potencial en un generador es *menos* la fem en ese sentido. Por tanto, si consideramos el pequeño lazo que empieza y termina en el terminal a tenemos la ecuación

$$z_1 I_1 + z_3 I_3 + z_4 I_4 - \mathcal{E}_1 = 0.$$

Aplicando la misma regla a los lazos restantes obtendríamos tres ecuaciones más del mismo tipo.

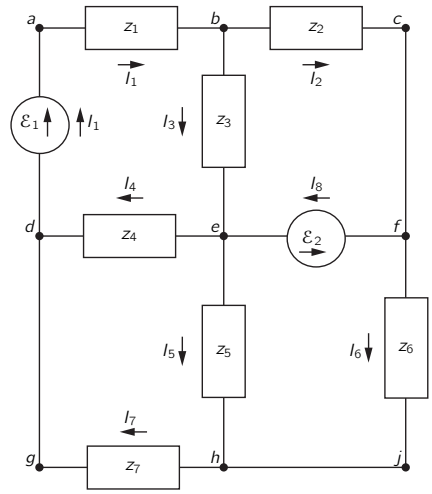


Figura 22-11. Análisis de un circuito con las leyes de Kirchhoff.

Luego tenemos que escribir las ecuaciones de corriente para cada nodo del circuito. Por ejemplo, sumando las corrientes que llegan al nodo del terminal b se obtiene la ecuación

$$I_1 - I_3 - I_2 = 0.$$

Análogamente, para el nodo e tendríamos la ecuación de corriente

$$I_3 - I_4 + I_8 - I_5 = 0.$$

Para el circuito mostrado hay cinco ecuaciones de corriente como ésta. Sin embargo, resulta que se puede deducir cualquiera de estas ecuaciones de las otras cuatro; en consecuencia, hay únicamente cuatro ecuaciones de corriente independientes. Tenemos, así, un total de ocho ecuaciones lineales independientes: las cuatro ecuaciones de voltaje y las cuatro de corriente. Con estas ocho ecuaciones podemos hallar las ocho corrientes desconocidas. Una vez conocidas las corrientes, el circuito está resuelto. La caída de voltaje en cualquier elemento está dada por la corriente que pasa por él multiplicada por la impedancia (o ya se la conoce, en el caso de fuentes de voltaje).

Hemos visto que al escribir las ecuaciones de corriente obtenemos una ecuación que no es independiente de las otras. En general, también es posible escribir demasiadas ecuaciones de voltaje. Por ejemplo, en el circuito de la figura 22-11, aunque hemos considerado únicamente los cuatro lazos pequeños, hay un gran número de otros lazos para los cuales podríamos escribir ecuaciones de voltaje. Por ejemplo, está el lazo que sigue el camino, $abcfeda$. Hay otro lazo que sigue el camino $abcfehgda$. Pueden ver que hay muchos lazos. Al analizar circuitos complicados es muy fácil que se obtengan demasiadas ecuaciones. Hay leyes que nos dicen cómo hay que proceder para escribir el número mínimo de ecuaciones, pero comúnmente es posible ver, pensando un poco, cómo obtener el número correcto de ecuaciones en la forma más simple. Por otra parte, no está mal escribir una o dos ecuaciones de más. No llevarán a ninguna respuesta equivocada, sólo a un poco de trabajo algebraico innecesario.

En el capitulo 25 del volumen I demostramos que si dos impedancias z_1 y z_2 están en *serie*, son equivalentes a una sola impedancia z_s dada.

$$z_s = z_1 + z_2. \tag{22.18}$$

También demostramos que si las dos impedancias están conectadas en *paralelo*, son equivalentes a una sola impedancia z_p dada por

$$z_p = \frac{1}{(1/z_1) + (1/z_2)} = \frac{z_1 z_2}{z_1 + z_2}. \tag{22.19}$$

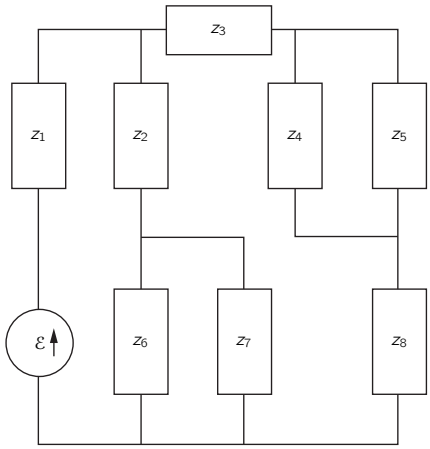


Figura 22-12. Un circuito que se puede analizar en términos de combinaciones en serie y en paralelo.

Si lo examinan de nuevo verán que al derivar estos resultados estábamos efectivamente haciendo uso de las leyes de Kirchhoff. A menudo es posible analizar un circuito complicado por aplicación repetida de las fórmulas para impedancias en serie y en paralelo.

Por ejemplo, el circuito de la figura 22-12 se puede analizar de esa manera. Primero se pueden remplazar las impedancias z_4 y z_5 por su equivalente en paralelo y lo mismo se puede hacer con z_6 y z_7. Luego se puede combinar la impedancia z_2 con la equivalente en paralelos de z_6 y z_7 por medio de la regla de combinación en serie. Procediendo de esta manera, se puede reducir todo el circuito a un generador en serie con una sola impedancia Z. La corriente que pasa por el generador es entonces simplemente $\mathcal{E}/Z$. Luego trabajando hacia atrás se hallan las corrientes en cada impedancia.

No obstante, hay circuitos bastante simples que no se puede analizar con este método, como, por ejemplo, el circuito de la figura 22-13. Para analizar este circuito tenemos que escribir las ecuaciones de corriente y de voltaje partiendo de las leyes de Kirchhoff. Hagámoslo. Hay sólo una ecuación de corriente:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0,$$

así que sabemos inmediatamente que

$$I_3 = -(I_1 + I_2).$$

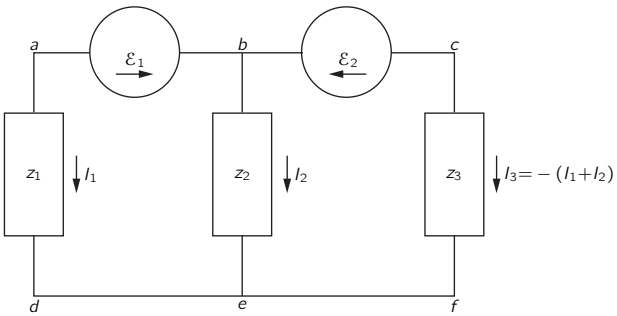


Figura 22-13. Un circuito que no se puede analizar en términos de combinaciones en serie y en paralelo.

Podemos ahorrarnos un poco de trabajo algebraico si hacemos inmediatamente uso de este resultado al escribir las ecuaciones de voltaje. En este circuito hay dos ecuaciones de voltaje independientes:

$$-\mathcal{E}_1 + I_2 z_2 - I_1 z_1 = 0$$

y

$$\mathcal{E}_2 - (I_1 + I_2) z_3 - I_2 z_2 = 0.$$

Hay dos ecuaciones y dos corrientes desconocidas. Despejando I_1 e I_2 de estas ecuaciones obtenemos

$$I_1 = \frac{z_2\mathcal{E}_2 - (z_2 + z_3)\mathcal{E}_1}{z_1(z_2 + z_3) + z_2 z_3} \tag{22.20}$$

e

$$I_2 = \frac{z_1\mathcal{E}_2 + z_3\mathcal{E}_1}{z_1(z_2 + z_3) + z_2 z_3}. \tag{22.21}$$

La tercera corriente se obtiene de la suma de estas dos.

La figura 22-14 muestra otro ejemplo de circuito que no se puede analizar usando las leyes para impedancias en serie y en paralelo. Este tipo de circuito se llama "puente". Aparece en muchos instrumentos usados para medir impedancias. En tal circuito uno está comúnmente interesado en esta pregunta: ¿cómo deben estar relacionadas las diversas impedancias para que la corriente por la impedancia z_3 sea cero? Dejamos que ustedes averigüen las condiciones para que sea así.

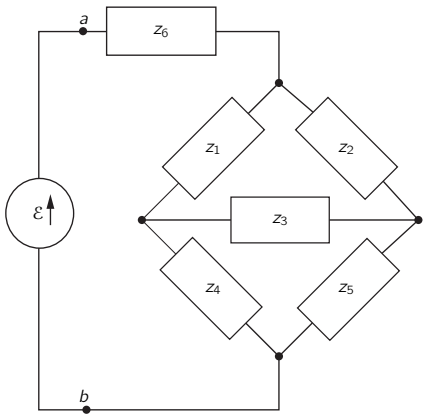


Figura 22-14. Circuito puente.

22-4 Circuitos equivalentes

Supongan que conectamos un generador $\mathcal{E}$ a un circuito que contiene una interconexión complicada de impedancias, como se indica esquemáticamente en la figura 22-15(a). Todas las ecuaciones que obtenemos de las leyes de Kirchhoff son lineales, así que al resolverlas para obtener la corriente I que pasa por el generador, obtendremos que I es proporcional a $\mathcal{E}$. Podemos escribir

$$I = \frac{\mathcal{E}}{z_{\text{ef}}},$$

donde ahora z_{ef} es un número complejo, una función algebraica de las impedancias para cada uno de los elementos del circuito. (Si el circuito no contiene generadores excepto el que se muestra, no hay ningún término adicional independiente de $\mathcal{E}$.) Sin embargo, esta ecuación es precisamente la que escribiríamos para el circuito de la figura 22-15(b). En tanto estemos interesados únicamente en lo que sucede *a la izquierda* de los dos terminales a y b, los dos circuitos de la figura 22-15 son *equivalentes*. En consecuencia, podemos enunciar en forma general que *cualquier* circuito de elementos pasivos con dos terminales se puede remplazar por una sola impedancia z_{ef} sin cambiar las corrientes y voltajes en el resto del circuito. Por supuesto, este enunciado es sencillamente un comentario sobre lo que resulta de las leyes de Kirchhoff —y en última instancia, de la linealidad de las ecuaciones de Maxwell—.

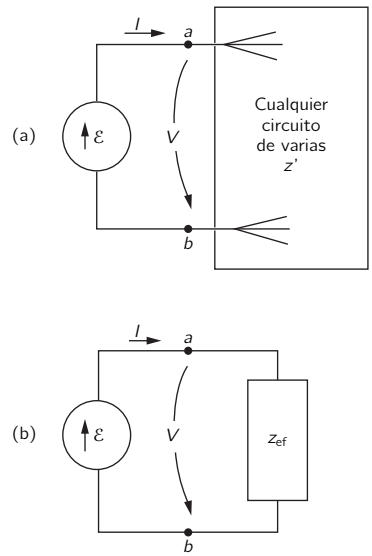


Figura 22-15. Cualquier circuito de elementos pasivos que tenga dos terminales es equivalente a una impedancia efectiva.

La idea se puede generalizar a un circuito que contenga tanto generadores como impedancias. Supongan que consideramos ese circuito "desde el punto de vista" de una de las impedancias, a la cual llamaremos z_n, como en la figura 22-16(a). Si resolviéramos la ecuación de todo el circuito, encontraríamos que el voltaje V_n entre los dos terminales a y b es una función lineal de I que podemos escribir en la forma

$$V_n = A - BI_n, \tag{22.22}$$

donde A y B dependen de los generadores e impedancias del circuito que está a la izquierda de los terminales. Por ejemplo, para el circuito de la figura 22-13 encontramos que $V_1 = I_1 z_1$. Esto se puede escribir [reordenando la ecuación (22.20)] en la forma

$$V_1 = \left[\left(\frac{z_2}{z_2 + z_3}\right)\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1\right] - \frac{z_2 z_3}{z_2 + z_3} I_1. \tag{22.23}$$

La solución completa se obtiene, combinando esta ecuación con la correspondiente a la impedancia z_1, o sea $V_1 = I_1 z_1$, o, en el caso general, combinando la ecuación (22.22) con

$$V_n = I_n z_n.$$

Si ahora consideramos que z_n pertenece a un circuito en serie simple de un generador y una corriente, como en la figura 22-15(b), la ecuación correspondiente a la ecuación (22.22) es

$$V_n = \mathcal{E}_{\text{ef}} - I_n z_{\text{ef}},$$

que es idéntica a la ecuación (22.22) siempre que pongamos $\mathcal{E}_{\text{ef}} = A$ y $z_{\text{ef}} = B$. Así pues, si estamos interesados únicamente en lo que sucede *a la derecha* de los terminales a y b, siempre se puede remplazar el circuito arbitrario de la figura 22-16 por una combinación equivalente de un generador en serie con una impedancia.

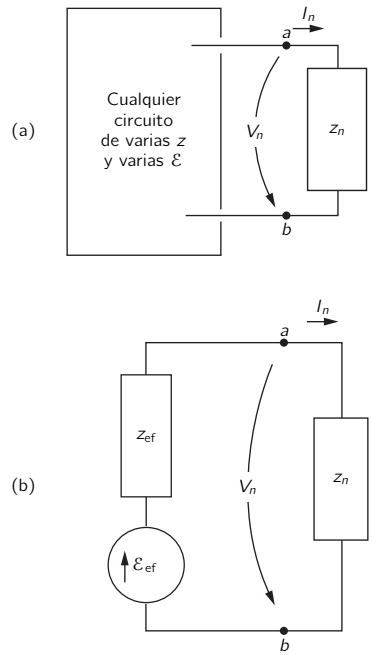


Figura 22-16. Cualquier circuito con dos terminales se puede remplazar por un generador en serie con una impedancia.

22-5 Energía

Hemos visto que para establecer la corriente I en una inductancia, el circuito externo debe proveer la energía $U = \frac{1}{2}LI^2$. Cuando la corriente vuelve a cero, se devuelve esta energía al circuito externo. No existe ningún mecanismo de pérdida de energía en una inductancia ideal. Cuando una corriente alterna pasa por una inductancia, la energía fluye alternadamente entre ella y el resto del

circuito, pero la cantidad *media* de energía que se entrega al circuito por unidad de tiempo es cero. Decimos que una inductancia es un elemento *no disipativo*; no se disipa —esto es, no se "pierde"— energía eléctrica.

Análogamente, la energía de un condensador, $U = \frac{1}{2}CV^2$, vuelve al circuito externo cuando se descarga el condensador. Cuando un condensador está en un circuito de CA, la energía entra y sale de él, pero el flujo resultante de energía en cada ciclo es cero. Un condensador ideal también es un elemento no disipativo.

Sabemos que una fem es una fuente de energía. Cuando una corriente I circula en el sentido de la fem, se entrega energía al circuito externo a razón de $dU/dt = \mathcal{E}I$. Si la corriente circula *contra* la fem —debido a otros generadores del circuito—, la fem absorberá energía a razón de $\mathcal{E}I$; como I es negativa, dU/dt también será negativa.

Si se conecta un generador a un resistor R, la corriente por el resistor es $I = \mathcal{E}/R$. La energía que entrega el generador a razón de $\mathcal{E}I$ por unidad de tiempo es absorbida por el resistor. Esta energía se convierte en calor dentro del resistor y no se reintegra a la energía eléctrica del circuito. Decimos que la energía eléctrica se *disipa* en un resistor. La rapidez con que se disipa energía en un resistor es $dU/dt = RI^2$.

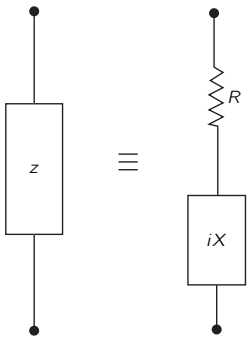


Figura 22-17. Cualquier impedancia es equivalente a una combinación en serie de una resistencia pura y una reactancia pura.

En un circuito CA, la cantidad media de energía que se pierde en un resistor por unidad de tiempo es el promedio de RI^2 sobre un ciclo. Como $I = \hat{I}e^{i\omega t}$, con lo cual entendemos realmente que I varía como $\cos\omega t$, el promedio de I^2 sobre un ciclo es $|\hat{I}|^2/2$, ya que la corriente de pico es $|\hat{I}|$ y el promedio de $\cos^2\omega t$ es el número $1/2$.

¿Y qué pérdida de energía hay cuando se conecta un generador a una impedancia z arbitraria? (Por "pérdida" entendemos, naturalmente, conversión de energía eléctrica en energía térmica.) Se puede escribir cualquier impedancia z como la suma de sus partes real e imaginaria. Es decir,

$$z = R + iX, \tag{22.24}$$

donde R y X son números reales. Desde el punto de vista de los circuitos equivalentes podemos decir que cualquier impedancia es equivalente a una resistencia en serie con una impedancia imaginaria pura —llamada *reactancia*— como muestra la figura 22-17.

Hemos visto antes que cualquier circuito que contenga únicamente L y C tiene una impedancia que es un número imaginario puro. Como en promedio no hay pérdida de energía en ninguna de las L y C, una reactancia pura que contenga L y C únicamente no tendrá pérdida de energía. Podemos ver que esto debe ser válido, en general, para una reactancia.

Si se conecta un generador cuya fem es $\mathcal{E}$ a la impedancia z de la figura 22-17, la fem tiene que estar relacionada con la corriente I del generador por

$$\mathcal{E} = I(R + iX). \tag{22.25}$$

Para hallar la energía promedio que se entrega por unidad de tiempo necesitamos el promedio del producto $\mathcal{E}I$. Ahora tenemos que tener cuidado. Al trabajar con esos productos, tenemos que trabajar con las cantidades reales $\mathcal{E}(t)$ e $I(t)$. (La parte real de las funciones complejas representará las verdaderas cantidades físicas sólo cuando tengamos ecuaciones *lineales*; ahora tenemos *productos* que ciertamente no son lineales.)

Supongan que elegimos el origen de t de modo que la amplitud $\hat{I}$ sea un número real, digamos I_0; entonces la verdadera variación temporal I está dada por

$$I = I_0 \cos\omega t.$$

La fem de la ecuación (22.25) es la parte real de

$$I_0 e^{i\omega t}(R + iX)$$

o sea

$$\mathcal{E} = I_0 R\cos\omega t - I_0 X \operatorname{sen}\omega t. \tag{22.26}$$

Los dos términos de la ecuación (22.26) representan la caída de voltaje en R y en X de la figura 22-17. Vemos que la caída de voltaje en la resistencia está *en fase* con la corriente, mientras que la caída de voltaje en la parte puramente reactiva está *desfasada* de la corriente.

La pérdida *media* de energía *por unidad de tiempo*, $\langle P\rangle_{\text{med}}$, que sufre el generador es la integral del producto $\mathcal{E}I$ sobre un ciclo dividida entre el periodo T; en otras palabras,

$$\langle P\rangle_{\text{prom}} = \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{E}I\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T I_0^2 R\cos^2\omega t\,dt - \frac{1}{T}\int_0^T I_0^2 X\cos\omega t\,\operatorname{sen}\omega t\,dt.$$

La primera integral es $\frac{1}{2}I_0^2R$ y la segunda integral es cero. Así pues, la pérdida media de energía por unidad de tiempo en una impedancia $z = R + iX$ depende únicamente de la parte real de z siendo $I_0^2R/2$, lo cual concuerda con nuestro resultado anterior para la pérdida de energía en un resistor. No hay pérdida de energía en la parte reactiva.

22-6 Un circuito en escalera

Consideraremos ahora un circuito interesante que se puede analizar en términos de combinaciones en serie y en paralelo. Supongan que empezamos con el circuito como en la figura 22-18(a). Podemos ver inmediatamente que la impedancia entre el terminal a y el terminal b es simplemente $z_1 + z_2$. Tomemos así un circuito un poco más difícil, el que muestra la figura 22.18(b). Podríamos analizar este circuito usando las leyes de Kirchhoff, pero también es fácil manipular combinaciones en serie y en paralelo. Podemos remplazar las dos impedancias de la derecha por una sola impedancia $z_3 = z_1 + z_2$, como en la parte (c) de la figura. Luego se puede remplazar las dos impedancias z_2 y z_3 por su impedancia equivalente en paralelo z_4, como muestra la parte (d) de la figura. Finalmente, z_1 y z_4 son equivalentes a una sola impedancia z_5, como muestra la parte (e).

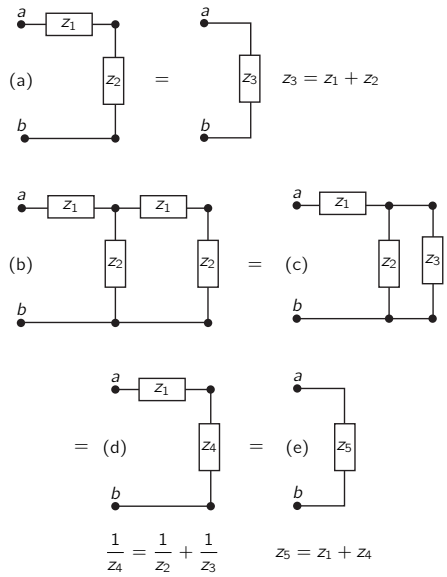


Figura 22-18. Impedancia efectiva de una escalera.

Ahora podemos hacer una pregunta divertida: ¿qué ocurriría si siguiéramos añadiendo *continuamente* más secciones al circuito de la figura 22-18(b) —como indicamos por medio de las líneas de trazos en la figura 22-19(a)—? ¿Podemos resolver esa red infinita? Bueno, no es tan difícil. Notemos primero que esa red infinita no cambia si agregamos una sección al extremo "delantero". Es claro que si agregamos una sección más a una red infinita sigue siendo la misma red infinita. Supongan que llamamos z_0 a la impedancia entre los dos terminales a y b de la red infinita; entonces la impedancia de todo lo que está a la derecha de los dos terminales c y d también es z_0. En consecuencia, en lo que respecta al extremo delantero, podemos representar la red como muestra la figura 22-19(b). Formando la combinación en paralelo de z_2 con z_0 y sumando el resultado en serie con z_1, podemos escribir inmediatamente la impedancia de este circuito:

$$z = z_1 + \frac{1}{(1/z_2) + (1/z_0)} \qquad \text{o} \qquad z = z_1 + \frac{z_2 z_0}{z_2 + z_0}.$$

Pero esta impedancia también es igual a z_0, así que tenemos la ecuación

$$z_0 = z_1 + \frac{z_2 z_0}{z_2 + z_0}.$$

Podemos despejar z_0 obteniendo

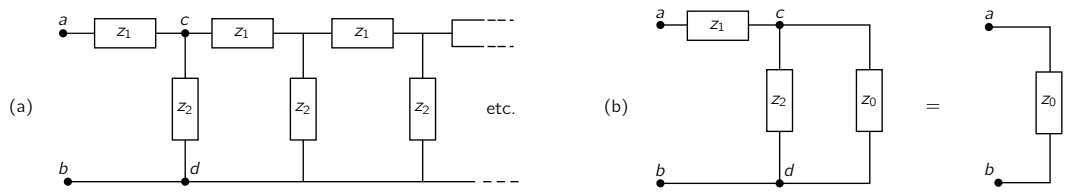


Figura 22-19. Impedancia efectiva de una escalera infinita.

$$z_0 = \frac{z_1}{2} + \sqrt{(z_1^2/4) + z_1 z_2}. \tag{22.27}$$

Así pues, hemos hallado la solución para la impedancia de una escalera infinita de impedancias repetidas en serie y en paralelo. La impedancia z_0 se denomina *impedancia característica* de esa red infinita.

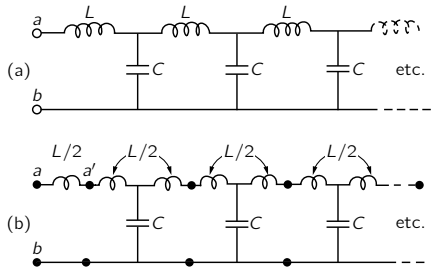


Figura 22-20. Una escalera *L*-*C* dibujada de dos maneras equivalentes.

Consideremos ahora un ejemplo específico en el cual el elemento en serie es una inductancia L y el elemento en paralelo es una capacitancia C, como muestra la figura 22-20(a). En este caso hallamos la impedancia de la red infinita haciendo $z_1 = i\omega L$ y $z_2 = 1/i\omega C$. Observen que el primer término de la ecuación (22.27), $z_1/2$, es justamente la mitad de la impedancia del primer elemento. En consecuencia, parecería más natural, o por lo menos algo más simple, si dibujáramos nuestra red infinita como muestra la figura 22-20(b). Mirando la red infinita desde el terminal a' veríamos la impedancia característica

$$z_0 = \sqrt{(L/C) - (\omega^2 L^2/4)}. \tag{22.28}$$

Aún así, hay dos casos interesantes según sea la frecuencia ω. Si ω^2 es menor que $4/LC$, el segundo término de la raíz será menor que el primero y la impedancia z_0 será un número real. Pero si ω^2 es mayor que $4/LC$ la impedancia z_0 será un número imaginario puro que se puede escribir en la forma

$$z_0 = i\sqrt{(\omega^2 L^2/4) - (L/C)}.$$

Hemos dicho antes que un circuito que contiene sólo impedancias imaginarias, como inductancias y capacitancias, tendrá una impedancia imaginaria pura. ¿Cómo puede ser entonces que para el circuito que estamos estudiando —que sólo tiene L y C— la impedancia sea una resistencia pura para frecuencias menores que $\sqrt{4/LC}$? Para frecuencias más altas la impedancia es imaginaria pura, lo cual concuerda con nuestro resultado anterior. Para frecuencias más bajas la impedancia es una resistencia pura y, en consecuencia, absorberá energía. Pero ¿cómo puede el circuito absorber continuamente energía como una resistencia, si está hecho únicamente de inductancias y capacitancias? *Respuesta*: porque hay un número infinito de inductancias y capacitancias, de modo que cuando se conecta una fuente al circuito, suministra energía a la primera inductancia y la primera capacitancia, luego a la segunda, a la tercera y así sucesivamente. En un circuito de este tipo, se absorbe energía continuamente del generador a una razón constante y esa energía fluye continuamente hacia el circuito, suministrando energía que se almacena en las inductancias y en las capacitancias a lo largo de la línea.

Esta idea sugiere una cuestión interesante sobre lo que está ocurriendo en el circuito. Sería de esperar que si conectáramos una fuente al extremo delantero, los efectos de esta fuente se propagarían por el circuito hacia el extremo infinito. La propagación de las ondas por la línea es muy parecida a la radiación proveniente de una antena que absorbe energía de la fuente que la excita; o sea, se espera que haya esa propagación cuando la impedancia es real, lo cual ocurre cuando ω es menor que $\sqrt{4/LC}$. Pero cuando la impedancia es imaginaria pura, lo cual ocurre cuando ω es mayor que $\sqrt{4/LC}$, no es de esperar que se vea ninguna propagación.

22-7 Filtros

Vimos en la sección anterior que el circuito en escalera infinito de la figura 22-20 absorbe energía continuamente si se la alimenta con una frecuencia por debajo de cierta frecuencia crítica $\sqrt{4/LC}$, que llamaremos *frecuencia de corte* ω_0. Sugerimos que se podía comprender este efecto en términos de un transporte continuo de energía por la línea. Por otra parte, a frecuencias altas, para $\omega > \omega_0$, no hay absorción continua de energía; sería de esperar, entonces, que quizá la corriente no "avance" mucho por la línea. Veamos si estas ideas están bien.

Supongan que tenemos el extremo delantero de la escalera conectado a un generador de CA y preguntamos cuál es el voltaje en la 754ª sección, digamos,

de la escalera. Como el circuito es infinito, cualquier cosa que le pase al voltaje al pasar de una sección a otra, siempre es la misma; así pues, examinemos simplemente lo que pasa cuando vamos de una sección, la n-ésima por ejemplo, a la siguiente. Definiremos la corriente I_n y el voltaje V_n como muestra la figura 22.21(a).

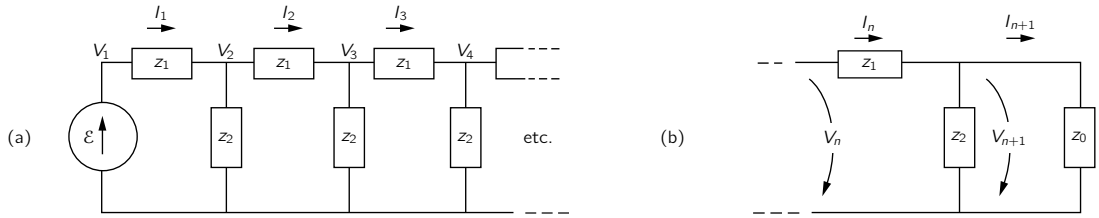


Figura 22-21. Cómo hallar el factor de propagación de una escalera.

Podemos obtener el voltaje V_{n+1} a partir de V_n recordando que siempre podemos remplazar lo que queda de la escalera después de la n-ésima sección por su impedancia característica z_0; entonces, sólo necesitamos analizar el circuito de la figura 22-21(b). Observemos primero que cualquier V_n, siendo una caída de potencial en z_0, tiene que ser igual a $I_n z_0$. Además la diferencia entre V_n y V_{n+1} es simplemente $I_n z_1$,

$$V_n - V_{n+1} = I_n z_1 = V_n \frac{z_1}{z_0}.$$

Obtenemos, pues, el cociente

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = 1 - \frac{z_1}{z_0} = \frac{z_0 - z_1}{z_0}.$$

Podemos llamar a este cociente *factor de propagación* de una sección de la escalera; lo llamaremos α. Por supuesto, es el mismo para todas las secciones:

$$\alpha = \frac{z_0 - z_1}{z_0}. \tag{22.29}$$

El voltaje después de la sección n-ésima es entonces

$$V_n = \alpha^n \mathcal{E}. \tag{22.30}$$

Ahora pueden hallar el voltaje después de 754 secciones; es simplemente α a la 754ª potencia multiplicada por $\mathcal{E}$.

Veamos que α es para la escalera L-C de la figura 22-20(a). Usando la z_0 de la expresión (22.27) y $z_1 = i\omega L$, obtenemos

$$\alpha = \frac{\sqrt{(L/C) - (\omega^2 L^2/4)} - i(\omega L/2)}{\sqrt{(L/C) - (\omega^2 L^2/4)} + i(\omega L/2)}. \tag{22.31}$$

Si la frecuencia de excitación está por debajo de la frecuencia de corte $\omega_0 = \sqrt{4/LC}$, la raíz es un número real y los módulos de los números complejos del numerador y el denominador son iguales. En consecuencia, el módulo de α es uno; podemos escribir

$$\alpha = e^{i\delta},$$

lo cual significa que el módulo del voltaje es el mismo para cada sección; sólo su fase varía. La variación de fase δ es en realidad un número negativo y representa el "retraso" del voltaje a medida que se avanza por el circuito.

Para frecuencias superiores a la frecuencia de corte ω_0, es mejor sacar una i como factor común en el numerador y en el denominador de la ecuación (22.31) y rescribirla en la forma

$$\alpha = \frac{\sqrt{(\omega^2 L^2/4) - (L/C)} - (\omega L/2)}{\sqrt{(\omega^2 L^2/4) - (L/C)} + (\omega L/2)}. \tag{22.32}$$

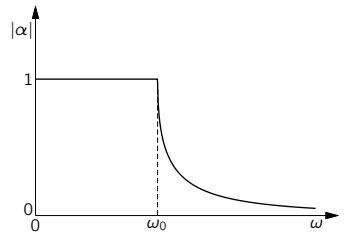
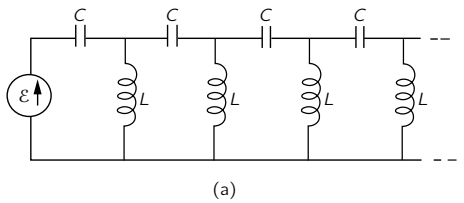
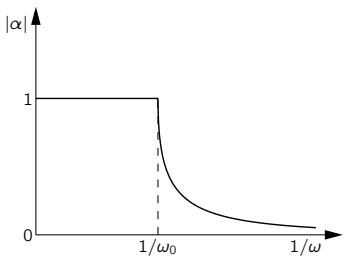


Figura 22-22. Factor de propagación de una sección de escalera L-C.



(a)



(b)

Figura 22-23. (a) Filtro paso alto; (b) su factor de propagación en función de $1/\omega$.

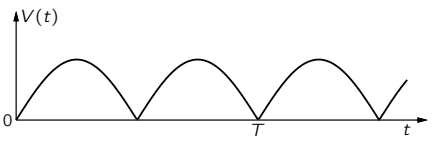


Figura 22-24. Voltaje de salida de un rectificador de onda completa.

Ahora el factor de propagación α es un número *real* y *menor que uno*. Esto significa que en cualquier sección el voltaje siempre es menor en el factor α que el voltaje en la sección precedente. Para toda frecuencia superior a ω_0 el voltaje se extingue rápidamente a medida que avanzamos por el circuito. La representación del valor absoluto de α en función de la frecuencia es como el gráfico de la figura 22-22.

Vemos que el comportamiento de α, tanto por debajo como por encima de ω_0, concuerda con nuestra interpretación de que el circuito propaga energía para $\omega < \omega_0$ y la bloquea para $\omega > \omega_0$. Decimos que el circuito "pasa" frecuencias bajas y "rechaza" o "filtra" las frecuencias altas. Cualquier circuito diseñado de modo que sus características varíen de una manera prefijada con la frecuencia se llama "filtro". Hemos estado analizando un "filtro paso bajo".

Puede que se estén preguntando el porqué de toda esta discusión de un circuito infinito que evidentemente no puede existir en la realidad. La cuestión es que podemos encontrar las mismas características en un circuito finito si terminamos su extremo con una impedancia igual a la impedancia característica z_0. Ahora bien, en la práctica no es posible reproducir *exactamente* la impedancia característica con unos pocos elementos simples —como R, L y C—. Pero muchas veces es posible hacerlo con una aproximación razonable para cierto intervalo de frecuencias. De esta manera se puede hacer un filtro finito cuyas propiedades sean casi iguales a las del caso infinito. Por ejemplo, la escalera L-C se comporta en forma muy parecida a la que hemos descrito si se la termina con una resistencia pura $R = \sqrt{L/C}$.

Si en nuestra escalera L-C intercambiamos las posiciones de las L y las C para formar la escalera mostrada en la figura 22-23(a), podemos tener un filtro que propaga frecuencias *altas* y elimina frecuencias *bajas*. Es fácil ver lo que ocurre en este circuito usando los resultados que ya tenemos. Notarán que toda vez que cambiamos una L por una C y *viceversa*, también cambiamos $i\omega$ por $1/i\omega$. Así pues, todo lo que le pasaba a ω antes, ahora le pasa a $1/\omega$. En particular, podemos ver cómo variará α con la frecuencia utilizando la figura 22-22 y cambiando la identificación del eje por $1/\omega$, como se observa en la figura 22-23(b).

Los filtros paso bajo y paso alto que hemos descrito tienen diversas aplicaciones técnicas. Frecuentemente, se usa un filtro L-C paso bajo como filtro de "alisamiento" en una fuente de potencia CC. Si queremos fabricar potencia CC a partir de una fuente CA, comenzamos con un rectificador que solamente permite el paso de corriente en un sentido. Obtenemos del rectificador una serie de pulsos que se parecen a la función $V(t)$ mostrada en la figura 22-24, cuya CC es mala, ya que sube y baja continuamente. Supongamos que quisiéramos una buena CC pura, como lo que da una batería. Podemos aproximarnos a ello poniendo un filtro paso bajo entre el rectificador y la carga.

Sabemos por el capítulo 50 del volumen I que se puede representar la función temporal de la figura 22-24 con una superposición de un voltaje constante más una onda senoidal, más una onda senoidal de frecuencia más alta, más una onda senoidal de frecuencia aún más alta, etc. —por una serie de Fourier—. Si nuestro filtro es lineal (si, como hemos supuesto, las L y las C no varían con las corrientes o los voltajes), entonces lo que sale del filtro es la superposición de las salidas adecuadas a las componentes que hay a la entrada. Siempre y cuando arreglemos las cosas para que la frecuencia de corte ω_0 de nuestro filtro esté bien por debajo de la frecuencia más baja en la función $V(t)$, la CC (para la cual $\omega = 0$) pasa perfectamente, pero la amplitud del primer armónico disminuirá mucho. Y las amplitudes de los armónicos superiores disminuirán aún más. Así pues, podemos hacer que la salida sea tan continua como queramos, lo cual depende únicamente de cuántos filtros queramos comprar.

Se usa un filtro paso alto si queremos eliminar ciertas frecuencias bajas. Por ejemplo, se puede usar un filtro paso alto en un amplificador de fonógrafo para permitir que la música pase y eliminar el zumbido grave del motor del plato.

También es posible hacer filtros "paso banda" que eliminan frecuencias menores que cierta frecuencia ω_1 y mayores que otra frecuencia ω_2 (más alta que ω_1),

no obstante dejan pasar las frecuencias entre ω_1 y ω_2. Esto se puede hacer simplemente juntando un filtro paso alto y uno paso bajo, pero más comúnmente se hace con una escalera en la cual las impedancias z_1 y z_2 son más complicadas —cada una es una combinación de varias L y C—. Tal filtro paso banda podría tener una constante de propagación como la mostrada en la figura 22-25(a). Se podría usar, por ejemplo, para separar señales que solamente ocupan un intervalo de frecuencias, como cada uno de los muchos canales de voz en un cable telefónico de alta frecuencia, o la portadora modulada de una transmisión de radio.

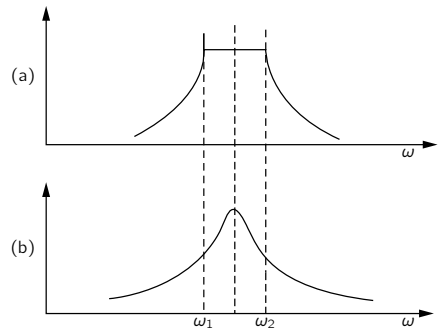


Figura 22-25. (a) Filtro paso banda. (b) Filtro resonante simple.

Hemos visto en el capítulo 25 del volumen I que también se puede filtrar utilizando la selectividad de una curva ordinaria de resonancia, la cual hemos dibujado en la figura 22-25(b) para comparar. Pero el filtro resonante no es tan bueno como el filtro paso banda para ciertos fines. Recordarán ustedes (capítulo 48, volumen I) que cuando se modula una portadora de frecuencia ω_c con una frecuencia ω_s "de señal", la señal total contiene no sólo la frecuencia portadora sino también las dos bandas laterales de frecuencia $\omega_c + \omega_s$ y $\omega_c - \omega_s$. Con un filtro resonante estas bandas laterales siempre están algo atenuadas, siendo la atenuación mayor cuanto más alta sea la frecuencia de señal, como pueden ver en la figura. Así pues, hay una "respuesta de frecuencia" pobre. Los tonos musicales más altos no pasan. Pero si se filtra con un filtro paso banda diseñado de manera tal que el ancho $\omega_2 - \omega_1$ sea, por lo menos, el doble de la más alta frecuencia de señal, la respuesta de frecuencia será "plana" para las señales que se quiere.

Queremos decir algo más acerca del filtro en escalera: la escalera L-C de la figura 22-20 también es una representación aproximada de una línea de transmisión. Si tenemos un conductor largo que corre paralelo a otro conductor —como un alambre en un cable coaxial o un alambre suspendido sobre la Tierra— habrá cierta capacitancia entre los dos conductores y también cierta inductancia debida al campo magnético entre ellos. Si imaginamos la línea dividida en pequeñas secciones de longitud $\Delta\ell$, cada sección se parecerá a una sección de la escalera L-C con una inductancia en serie ΔL y una capacitancia en paralelo ΔC. Podemos usar entonces nuestros resultados para el filtro en escalera. Si tomamos el límite de $\Delta\ell$ tendiendo a cero tenemos una buena descripción de la línea de transmisión. Observen que a medida que $\Delta\ell$ se hace más y más pequeño, ΔL y ΔC disminuyen, pero en la misma proporción, de modo que el cociente $\Delta L/\Delta C$ permanece constante. Así pues, si tomamos el límite de la ecuación (22.28) para ΔL y ΔC tendiendo a cero, encontramos que la impedancia característica z_0 es una resistencia pura cuya magnitud es $\sqrt{\Delta L/\Delta C}$. También podemos escribir el cociente $\Delta L/\Delta C$ como L_0/C_0, donde L_0 y C_0 son la inductancia y la capacitancia de una unidad de longitud de la línea; tenemos entonces

$$z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}. \tag{22.33}$$

Observarán también que cuando ΔL y ΔC tienden a cero, la frecuencia de corte $\omega_0 = \sqrt{4/LC}$ tiende a infinito. No existe frecuencia de corte en una línea de transmisión ideal.

22-8 Otros elementos de circuito

Hasta ahora únicamente hemos definido las impedancias de circuito ideales —la inductancia, la capacitancia y la resistencia— y el generador ideal de voltaje. Queremos mostrar ahora qué otros elementos, como las inductancias mutuas o los transistores o las válvulas electrónicas, se pueden describir usando sólo los mismos elementos básicos. Supongan que tenemos dos bobinas y que a propósito o por cualquier razón, parte del flujo de una de las bobinas enlaza a la otra, como se observa en la figura 22-26(a). Entonces las dos bobinas tendrán una inductancia mutua M tal que cuando la corriente varíe en una de las bobinas, se genere un voltaje en la otra. ¿Podemos dar cuenta de ese efecto con nuestros circuitos equivalentes? Podemos hacerlo de la manera siguiente. Hemos visto

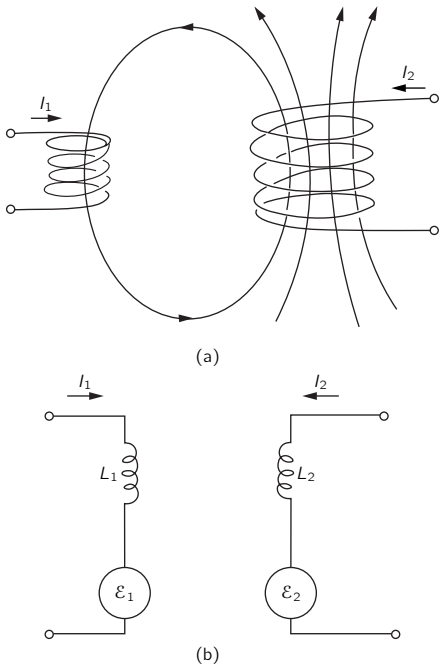


Figura 22-26. Circuito equivalente de una inductancia mutua.

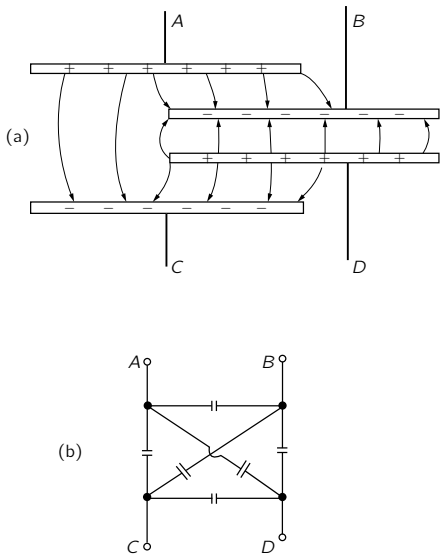


Figura 22-27. Circuito equivalente de capacitancia mutua.

que las fem inducidas en cada una de las dos bobinas en interacción se pueden escribir como la suma de dos partes:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1 &= -L_1\,\frac{dI_1}{dt} \pm M\,\frac{dI_2}{dt},\\ \mathcal{E}_2 &= -L_2\,\frac{dI_2}{dt} \pm M\,\frac{dI_1}{dt}.\end{aligned} \tag{22.34}$$

El primer término proviene de la autoinductancia de la bobina y el segundo de su inductancia mutua con la otra bobina. El signo del segundo término puede ser más o menos, según la manera en que el flujo de una bobina enlace a la otra. Haciendo las mismas aproximaciones que usamos para describir una inductancia ideal, diríamos que la diferencia de potencial en los terminales de cada bobina es igual a la fuerza electromotriz que hay en la bobina. Por lo tanto, las dos ecuaciones (22.34) son las mismas que obtendríamos del circuito de la figura 22.26(b), si la fuerza electromotriz en cada uno de los dos circuitos mostrados dependa de la corriente del circuito opuesto conforme a las relaciones

$$\mathcal{E}_1 = \pm i\omega M I_2, \qquad \mathcal{E}_2 = \pm i\omega M I_1. \tag{22.35}$$

Así pues, lo que podemos hacer es representar el efecto de la autoinductancia de una manera normal pero remplazando el efecto de la inductancia mutua por un generador ideal auxiliar de voltaje. Por supuesto, además debemos tener la ecuación que relacione esta fem con la corriente en otras partes del circuito; pero en tanto esta ecuación sea lineal, lo que acabamos de hacer es agregar más ecuaciones lineales a nuestras ecuaciones de circuito y todas nuestras conclusiones anteriores sobre circuitos equivalentes, etc., siguen siendo correctas.

Además de las inductancias mutuas también puede haber capacitancias mutuas. Hasta ahora, al hablar de condensadores siempre hemos imaginado que había únicamente dos electrodos, pero en muchas situaciones, en una válvula termoiónica por ejemplo, puede que haya muchos electrodos unos cerca de otros. Si ponemos una carga eléctrica en cualquiera de los electrodos, su campo eléctrico inducirá cargas en cada uno de los otros electrodos y esto afectará su potencial. Consideremos como ejemplo el arreglo de cuatro placas mostrado en la figura 22-27(a). Supongan que estas cuatro placas están conectadas a circuitos externos por medio de los alambres A, B, C y D. Mientras estemos interesados únicamente en los efectos electrostáticos, el circuito equivalente de esa disposición de electrodos es el que muestra la parte (b) de la figura. La interacción electrostática de cualquier electrodo con cada uno de los otros es equivalente a una capacidad entre los dos electrodos.

Consideremos finalmente cómo representaríamos dispositivos tan sofisticados como los transistores y las válvulas de radio en un circuito CA. Debemos puntualizar desde el principio que a menudo esos dispositivos trabajan de manera tal que la relación entre corrientes y voltajes no es lineal de manera alguna. En esos casos, los enunciados dados que dependan de la linealidad de las ecuaciones ya no son correctos, por supuesto. Por otra parte, en muchas aplicaciones las características de funcionamiento son lo suficientemente lineales como para que podamos considerar que los transistores y las válvulas son dispositivos lineales. Con esto queremos decir que las corrientes alternas, por ejemplo, en las placas de una válvula termoiónica, son linealmente proporcionales a los voltajes que aparecen en los otros electrodos, por ejemplo, el voltaje de la reja y el voltaje de placa. Cuando tenemos tales relaciones lineales, podemos incorporar el dispositivo en nuestra representación con circuitos equivalentes.

Como en el caso de la inductancia mutua, nuestra representación tendrá que incluir generadores auxiliares de voltaje que describan la influencia de los voltajes o corrientes de una parte del dispositivo sobre las corrientes o voltajes de otra parte. Por ejemplo, el circuito de placa de un triodo se puede representar, por lo común, mediante una resistencia en serie con un generador ideal de voltaje cuya intensidad de fuente es proporcional al voltaje de la reja. Obtenemos el circuito

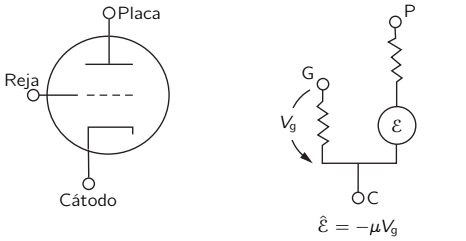


Figura 22-28. Circuito equivalente a baja frecuencia de un triodo.

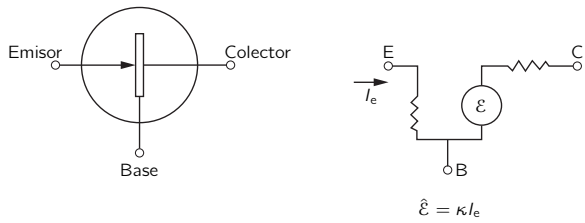


Figura 22-29. Circuito equivalente a baja frecuencia de un transistor.

equivalente mostrado en la figura 22-28.* Análogamente, el circuito del colector de un transistor se representa convenientemente como un resistor en serie con un generador ideal de voltaje cuya intensidad es proporcional a la corriente del emisor a la base del transistor. El circuito equivalente es entonces el de la figura 22-29. Mientras las ecuaciones que describen el funcionamiento sean lineales, podemos usar tales representaciones para válvulas o transistores. Entonces, cuando se las incorpora a un circuito complicado, siguen siendo válidas nuestras conclusiones generales acerca de la representación equivalente de cualquier conexión arbitraria de elementos.

Hay algo notable referente a los circuitos con transistores y válvulas de radio que son diferentes de los circuitos que contienen impedancias únicamente: la parte real de la impedancia efectiva z_{ef} puede hacerse negativa. Hemos visto que la parte real de z representa la pérdida de energía. Pero la característica importante de los transistores y las válvulas es que *suministran* energía al circuito. (Por supuesto que no es simplemente que "fabriquen" energía; toman energía de los circuitos CC de las fuentes de potencia y la convierten en energía CA.) Así pues, es posible tener un circuito con una resistencia negativa. Tal circuito tiene la propiedad de que si lo conectan a una impedancia con parte real positiva, es decir, una resistencia positiva, y se las arreglan para que la suma de las dos partes reales sea exactamente cero, entonces no habrá disipación en el circuito combinado. Si no hay pérdida de energía, una vez que se establezca un voltaje alterno, el mismo quedará permanentemente. Ésta es la idea básica que soporta el funcionamiento de un oscilador o generador de señales que se puede usar como fuente de voltaje alterno a cualquier frecuencia que se desee.

* El circuito equivalente mostrado sólo es correcto para frecuencias bajas. Para frecuencias altas el circuito equivalente se hace mucho más complicado, incluyendo varias capacitancias e inductancias llamadas "parásitas".

23

Cavidades resonantes

23-1 Elementos de circuito reales
23-2 Un capacitor a altas frecuencias
23-3 Una cavidad resonante
23-4 Modos de una cavidad
23-5 Cavidades y circuitos resonantes

Revisar
Volumen I, capítulo 23, *Resonancia*
Volumen I, capítulo 49, *Modos de vibración*

23-1 Elementos de circuito reales

Cuando miramos desde cualquier par de terminales, cualquier circuito arbitrario que se construye con impedancias ideales y generadores es, a cualquier frecuencia, equivalente a un generador $\mathcal{E}$ en serie con una impedancia z. Lo anterior es porque si aplicamos un voltaje V a los dos terminales y resolvemos todas las ecuaciones para obtener la corriente I, debemos encontrar una relación lineal entre la corriente y el voltaje. Como todas las ecuaciones son lineales, el resultado para I también debe depender sólo linealmente de V. La forma lineal más general se puede expresar en la forma:

$$I = \frac{1}{z}(V - \mathcal{E}). \tag{23.1}$$

En general, z y $\mathcal{E}$ pueden depender en alguna forma complicada de la frecuencia ω. Sin embargo, la ecuación (23.1) es la relación que obtendríamos si detrás de los dos terminales estuviera el generador $\mathcal{E}(\omega)$ en serie con la impedancia $z(\omega)$.

También hay el problema opuesto: si tenemos cualquier dispositivo electromagnético con dos terminales y *medimos* la relación entre I y V para determinar $\mathcal{E}$ y z en función de la frecuencia, ¿podemos encontrar una combinación de nuestros elementos ideales que sea equivalente a la impedancia interna z? La respuesta es que para cualquier función razonable, esto es, con significado físico; $z(\omega)$, *es* posible *aproximar* la situación con toda la precisión que quieran con un circuito que contenga un conjunto finito de elementos ideales. Pero ahora no consideraremos el problema general, sino examinaremos únicamente lo que sería de esperar con razonamientos físicos para unos pocos casos.

Si pensamos en un resistor real, sabemos que la corriente por él produce un campo magnético. Así que cualquier resistor también debe tener cierta inductancia. Además, cuando un resistor tiene una diferencia de potencial, debe haber cargas en los extremos del mismo para producir los campos eléctricos necesarios. A medida que el voltaje varía, las cargas variarán proporcionalmente de modo que el resistor también tendrá una capacitancia. Es de esperar que un resistor *real* tenga un circuito equivalente al mostrado en la figura 23-1. Por lo que, en un resistor bien diseñado, los llamados elementos L y C "parásitos" son pequeños, así que para las frecuencias para las que se lo destina ωL es muy pequeña respecto a R y $1/\omega C$, que es mucho mayor que R. Por eso es posible despreciarlos. No obstante, a medida que se aumenta la frecuencia, llegarán a adquirir importancia y el resistor empezará a parecerse a un circuito resonante.

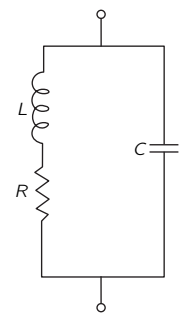


Figura 23-1. Un circuito equivalente a un resistor real.

Una inductancia real tampoco es igual a la inductancia idealizada, cuya impedancia es $i\omega L$. Una bobina real de alambre tendrá alguna resistencia, de modo que a frecuencias bajas la bobina realmente es equivalente a una inductancia en serie con una resistencia, como se muestra en la figura 23-2(a). Sin embargo, estarán pensando: la resistencia y la inductancia están *juntas* en una bobina real, la resistencia está distribuida a lo largo del alambre, de manera que está mezclada con la inductancia. Posiblemente usaríamos un circuito más parecido al de la figura 23-2(b) que tiene varias R y L pequeñas en serie. Pero la impedancia total de tal circuito es simplemente $\sum R + \sum i\omega L$, que es equivalente al diagrama más simple de la parte (a).

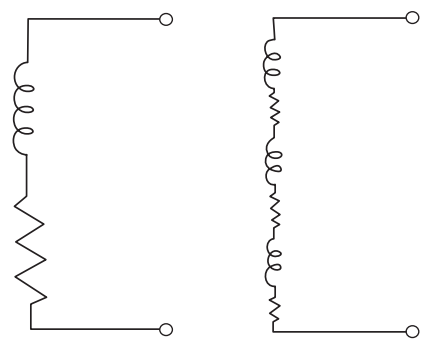


Figura 23-2. El circuito equivalente de una inductancia real a bajas frecuencias.

A medida que aumentamos la frecuencia en una bobina real, la aproximación de una inductancia más una resistencia no es muy buena. Por lo cual, las cargas que se deben generar en el alambre para formar los voltajes se volverán

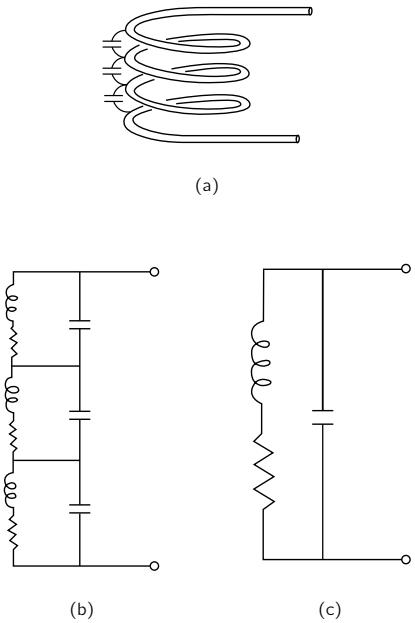


Figura 23-3. El circuito de equivalencia de una inductancia real a frecuencias más altas.

importantes. Es como si hubiera condensadores pequeños a través de las bobinas, como se observa en la figura 23-3(a). Podríamos tratar de aproximar la bobina real con el circuito de la figura 23-3(b). A frecuencias bajas, este circuito puede imitarse bastante bien por el de la parte (c) de la figura (que otra vez es el mismo circuito resonante que encontramos para el modelo de alta frecuencia de un resistor). Para frecuencias altas, no obstante, el circuito más complicado de la figura 23-3(b) es mejor. En realidad, cuanto más se quiera representar exactamente la verdadera impedancia de una inductancia real, física, tendrán que usar más elementos ideales en el modelo artificial de ella.

Examinemos un poco más detalladamente lo que ocurre en una bobina real. La impedancia de una inductancia va como ωL, así que se vuelve nula a frecuencias bajas —es un "cortocircuito"—: todo lo que vemos es la resistencia del alambre. A medida que aumentamos la frecuencia, ωL se vuelve mucho más grande que R y la bobina se parece mucho más a una inductancia ideal. No obstante, a medida que seguimos aumentando las capacidades se van haciendo apreciables. Su impedancia es proporcional a $1/\omega C$, que es grande para ω pequeño. Para frecuencias lo suficientemente pequeñas un condensador es un "circuito abierto" y cuando está en paralelo con algo no extrae corriente. Pero a frecuencias altas, la corriente prefiere circular por la capacitancia entre las espiras en lugar de hacerlo por la inductancia. Así que la corriente en la bobina brinca de una espira a otra y no se molesta en dar vueltas y más vueltas por donde tiene que oponerse continuamente a la fem. Así que, aunque hubiéramos tenido la *intención* de que la corriente fuera alrededor del lazo, tomará el camino más fácil —el camino de mínima impedancia—.

Si el tema hubiera sido de interés popular, este efecto habría sido llamado "barrera de alta frecuencia" o cierto nombre parecido. Lo mismo sucede en todos los temas. En aerodinámica, las cosas que han sido diseñadas para velocidades bajas no funcionan si se trata de que vayan más rápido que la velocidad del sonido. No significa que haya una "barrera" grande ahí; significa que se debe rediseñar el objeto. Así pues, esta bobina que diseñamos como una "inductancia" no va a trabajar como una buena inductancia, sino como cualquier otra cosa a frecuencias muy altas. Para frecuencias altas, tenemos que buscar un nuevo diseño.

23-2 Un capacitor a altas frecuencias

A continuación discutiremos más detalladamente el comportamiento de un capacitor —un capacitor geométricamente ideal— a medida que la frecuencia se vuelve más y más grande, para que podamos ver la transición de sus propiedades. (Preferimos usar un capacitor en lugar de una inductancia, porque la geometría de un par de placas es mucho menos complicada que la geometría de una bobina.) Consideremos el capacitor mostrado en la figura 23-4(a) que consiste en dos placas circulares paralelas conectadas a un generador externo por un par de alambres. Si cargamos el capacitor con CC, habrá una carga positiva en una placa y una carga negativa en la otra, y habrá un campo eléctrico uniforme entre las placas.

Ahora supongan que en lugar de CC ponemos una CA de baja frecuencia en las placas. (Veremos después lo que es "baja" y lo que es "alta".) Conectemos el capacitor a un generador de baja frecuencia. Cuando el voltaje alterna, la carga positiva sobre la placa superior se elimina y aparece carga negativa. Mientras esto sucede, desaparece el campo eléctrico y luego se forma en la dirección opuesta. A medida que la carga oscila lentamente el campo eléctrico la sigue. En cada instante el campo eléctrico es uniforme, como se muestra en la figura 23-4(b) excepto por algunos efectos de borde que vamos a pasar por alto. Podemos escribir el módulo del campo eléctrico en la forma siguiente:

$$E = E_0 e^{i\omega t}, \tag{23.2}$$

donde E_0 es una constante.

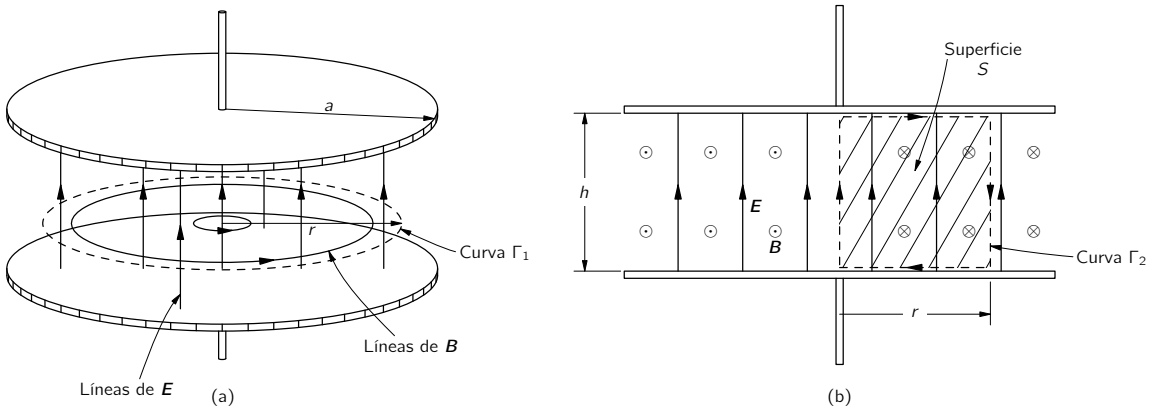


Figura 23-4. Los campos eléctricos y magnéticos entre las placas de un condensador.

Ahora bien, ¿seguirá esto siendo correcto a medida que la frecuencia sube? No, porque como el campo eléctrico está subiendo y bajando hay un flujo de campo eléctrico a través de cualquier lazo como Γ_1 en la figura 23-4(a). Y como saben, un campo eléctrico cambiante actúa para producir un campo magnético. Una de las ecuaciones de Maxwell dice que cuando hay un campo eléctrico variable como el que hay aquí, tiene que haber una integral de línea del campo magnético. La integral del campo magnético alrededor de un anillo cerrado, multiplicada por c^2 es igual a la derivada respecto al tiempo del flujo eléctrico a través del área dentro del anillo (si no hay corrientes):

$$c^2 \oint_\Gamma \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \frac{d}{dt} \int\limits_{\text{dentro } \Gamma} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\, da. \tag{23.3}$$

¿Cuánto campo magnético hay? No es muy difícil de hallar. Supongan que tomamos el lazo Γ_1 que es una circunferencia de radio r. Por simetría podemos ver que el campo magnético da vueltas como se muestra en la figura. Entonces la integral de línea de $\boldsymbol{B}$ es $2\pi rB$. Y puesto que el campo magnético es uniforme, el flujo del campo eléctrico es simplemente E multiplicado por πr^2, el área del círculo es la siguiente:

$$c^2 B \cdot 2\pi r = \frac{\partial}{\partial t}\, E \cdot \pi r^2. \tag{23.4}$$

La derivada de E respecto al tiempo es, para nuestro campo alternante, sencillamente $i\omega E_0 e^{i\omega t}$. Así pues, hallamos que nuestro capacitor tiene el siguiente campo magnético:

$$B = \frac{i\omega r}{2c^2}\, E_0 e^{i\omega t}. \tag{23.5}$$

En otras palabras, también el campo magnético oscila y tiene una fuerza proporcional a r.

¿Cuál es el efecto de esto? Cuando hay un campo magnético que está variando, habrá campos eléctricos inducidos y el capacitor empezará a actuar similar a una inductancia. A medida que sube la frecuencia el campo magnético se hace más fuerte; es proporcional al ritmo de cambio de E al igual que a ω. La impedancia del capacitor ya no será simplemente $1/i\omega C$.

Continuemos aumentando la frecuencia y analicemos lo que sucede más cuidadosamente. Tenemos un campo magnético que va de un lado para otro. ¡Pero entonces el campo eléctrico no puede ser uniforme como hemos supuesto! Cuando hay un campo magnético variando debe haber una integral de línea del campo eléctrico, debido a la ley de Faraday. Así, si hay un campo magnético apreciable, como comienza a suceder a frecuencias altas, el campo eléctrico nunca puede ser el mismo a todas las distancias del centro. El campo eléctrico debe cambiar con r, tal que la integral de línea del campo eléctrico pueda igualar a la variación de flujo del campo magnético.

Veamos si podemos calcular el campo eléctrico correcto. Podemos hacerlo agregando una "corrección" al campo uniforme que supusimos originalmente para bajas frecuencias. Llamemos E_1 al campo uniforme que todavía será $E_0e^{i\omega t}$ y escribamos el campo correcto en la forma

$$E = E_1 + E_2,$$

donde E_2 es la corrección debida a la variación del campo magnético. Para cualquier ω escribiremos el campo en el centro del condensador como $E_0e^{i\omega t}$ (definiendo así E_0), así que no tenemos corrección en el centro; $E_2 = 0$ en $r = 0$.

Para encontrar E_2 podemos usar la forma integral de la ley de Faraday:

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{d}{dt}(\text{flujo de } \boldsymbol{B}).$$

Las integrales son simples si las tomamos de la curva Γ_2, como se muestra en la figura 23-4(b), que sube a lo largo del eje, sale radialmente la distancia r a lo largo de la placa superior, baja verticalmente hacia la placa inferior y vuelve al eje. La integral de línea de E_1 alrededor de esta curva es, por supuesto, cero; así que sólo E_2 contribuye y su integral es simplemente $-E_2(r) \cdot h$, donde h es el espacio entre las placas. (Llamaremos E positiva si está apuntando hacia arriba.) Esto es igual a menos la derivada respecto al tiempo de cambio del flujo de $\boldsymbol{B}$, que hemos obtenido por una integral sobre el área sombreada S dentro de Γ_2 en la figura 23-4(b). El flujo a través de una franja vertical de espesor dr es $B(r)h\,dr$, así que el flujo total es:

$$h\int B(r)\,dr.$$

Haciendo $-\partial/\partial t$ del flujo igual a la integral de línea de E_2, tenemos,

$$E_2(r) = \frac{\partial}{\partial t}\int B(r)\,dr. \tag{23.6}$$

Nótese que las h se cancelan, ya que los campos no dependen de la separación de las placas.

Usando la ecuación (23.5) para $B(r)$, tenemos

$$E_2(r) = \frac{\partial}{\partial t}\,\frac{i\omega r^2}{4c^2}\,E_0e^{i\omega t}.$$

La derivada respecto al tiempo trae otro factor $i\omega$; así obtenemos

$$E_2(r) = -\frac{\omega^2 r^2}{4c^2}\,E_0e^{i\omega t}. \tag{23.7}$$

Como era de esperar, el campo inducido tiende a *reducir* el campo eléctrico más lejos. El campo corregido $E = E_1 + E_2$ es entonces

$$E = E_1 + E_2 = \left(1 - \frac{1}{4}\,\frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)E_0e^{i\omega t}. \tag{23.8}$$

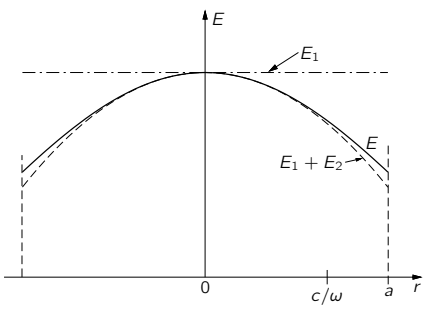


Figura 23-5. El campo eléctrico entre las placas del condensador a alta frecuencia. (Se descuidan los efectos de borde.)

El campo eléctrico en el capacitor ya no es uniforme, tiene la forma parabólica mostrada por la línea discontinua en la figura 23-5. Ven que nuestro capacitor simple se está volviendo complicado poco a poco.

Podríamos usar ahora nuestro resultado para calcular la impedancia del capacitor a frecuencias altas. Conociendo el campo eléctrico, podríamos calcular las cargas en las placas y hallar cómo la corriente por el condensador depende de la frecuencia ω, pero no estamos interesados en el problema por el momento. Por ello, estamos más interesados en ver qué sucede a medida que continuamos aumentando la frecuencia; ver qué sucede a frecuencias aún más altas. ¿No hemos terminado ya? No, porque hemos corregido el campo eléctrico, lo que significa que el campo magnético que hemos calculado ya no es correcto. El campo

magnético de la ecuación (23.5) es aproximadamente correcto, pero solamente es una primera aproximación. Llamémoslo B_1. Entonces deberíamos reescribir la ecuación (23.5) en la forma

$$B_1 = \frac{i\omega r}{2c^2}\, E_0 e^{i\omega t}. \tag{23.9}$$

Recordarán que este campo fue producido por la variación de E_1. Ahora el campo magnético correcto será el producido por el campo total $E_1 + E_2$. Si escribimos el campo magnético como $B = B_1 + B_2$, el segundo término es justamente el campo adicional producido por E_2. Para hallar B_2 podemos seguir el mismo razonamiento que usamos para hallar B_1; la integral de línea de B_2 alrededor de la curva Γ_1, es equivalente a la derivada respecto al tiempo del flujo de E_2 a través de Γ_1. Tendremos precisamente la ecuación (23.4) otra vez, con B remplazado por B_2 y E remplazado por E_2:

$$c^2 B_2 \cdot 2\pi r = \frac{d}{dt}(\text{flujo de } E_2 \text{ a través de } \Gamma_1).$$

Debido a que E_2 varía con el radio, para obtener su flujo debemos integrar sobre la superficie circular dentro de Γ_1. Usando $2\pi r\, dr$ como elemento de área, esta integral es la siguiente:

$$\int_0^r E_2(r) \cdot 2\pi r\, dr.$$

Así pues, obtenemos para $B_2(r)$

$$B_2(r) = \frac{1}{rc^2}\,\frac{\partial}{\partial t}\int E_2(r) r\, dr. \tag{23.10}$$

Usando el $E_2(r)$ de la ecuación (23.7) necesitamos la integral de $r^3\, dr$, la cual es, por supuesto, $r^4/4$. Nuestra corrección al campo magnético se transforma en

$$B_2(r) = -\frac{i\omega^3 r^3}{16c^4}\, E_0 e^{i\omega t}. \tag{23.11}$$

¡Pero aún no hemos terminado! Si el campo magnético B no es el mismo que pensamos primeramente, entonces hemos calculado incorrectamente E_2. Debemos hacer una corrección adicional a E que viene del campo magnético extra B_2. Llamaremos E_3 a esta corrección adicional al campo eléctrico. Está relacionado con el campo magnético B_2 en la misma forma que E_2 lo estaba con B_1. Podemos usar la ecuación (23.6) otra vez tan sólo cambiando los subíndices:

$$E_3(r) = \frac{\partial}{\partial t}\int B_2(r)\, dr. \tag{23.12}$$

Usando para B_2 nuestro resultado, la ecuación (23.11), la nueva corrección al campo eléctrico es

$$E_3(r) = +\frac{\omega^4 r^4}{64c^4}\, E_0 e^{i\omega t}. \tag{23.13}$$

Escribiendo nuestro campo eléctrico doblemente corregido como $E = E_1 + E_2 + E_3$, obtenemos lo siguiente:

$$E = E_0 e^{i\omega t}\left[1 - \frac{1}{2^2}\left(\frac{\omega r}{c}\right)^2 + \frac{1}{2^2 \cdot 4^2}\left(\frac{\omega r}{c}\right)^4\right]. \tag{23.14}$$

La variación del campo eléctrico con el radio ya no es la parábola sencilla que dibujamos en la figura 23-5, sino que para radios grandes se desvía un poco por encima de la curva $(E_1 + E_2)$.

No hemos concluido completamente. El campo eléctrico nuevo produce una corrección nueva al campo magnético, y el campo magnético nuevamente corregido producirá una corrección adicional al campo eléctrico y así indefinidamente. Sin

embargo, ya tenemos todas las fórmulas que necesitamos. Para B_3 podemos usar la ecuación (23.10) cambiando los subíndices de B y E de 2 a 3.

La siguiente corrección al campo eléctrico es:

$$E_4 = -\frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}\left(\frac{\omega r}{c}\right)^6 E_0 e^{i\omega t}.$$

Así que para este orden tenemos que el campo eléctrico está dado por

$$E = E_0 e^{i\omega t}\left[1 - \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{\omega r}{2c}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{\omega r}{2c}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{\omega r}{2c}\right)^6 \pm \cdots\right]. \quad (23.15)$$

donde hemos escrito los coeficientes numéricos en tal forma que sea evidente cómo continúa la serie.

Nuestro resultado final es que para cualquier frecuencia, el campo eléctrico entre las placas del capacitor está dado por el producto de $E_0 e^{i\omega t}$ y la serie infinita que contiene solamente la variable $\omega r/c$. Si queremos, podemos definir una función especial que llamaremos $J_0(x)$, como la serie infinita que aparece en el corchete de la ecuación (23.15):

$$J_0(x) = 1 - \frac{1}{(1!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^6 \pm \cdots \quad (23.16)$$

Entonces podemos escribir nuestra solución como $E_0 e^{i\omega t}$ por esta función, con $x = \omega r/c$ como sigue:

$$E = E_0 e^{i\omega t} J_0\left(\frac{\omega r}{c}\right). \quad (23.17)$$

La razón de haber llamado J_0 a nuestra función especial es que, naturalmente, no es la primera vez que alguien ha resuelto un problema de oscilaciones en un cilindro. La función ha surgido antes y usualmente se la llama J_0. Siempre surge cuando se quiere resolver un problema de ondas con simetría cilíndrica. La función J_0 es para las ondas cilíndricas lo que la función coseno es para las ondas en una línea recta. Así pues, es una función importante, inventada hace mucho tiempo. Luego encontramos el nombre de Bessel asociado a ella. Así, el subíndice cero significa que Bessel inventó un grupo de funciones diferentes y ésta es justamente la primera de ellas.

Las otras funciones de Bessel —J_1, J_2, etc.— tienen que ver con las ondas cilíndricas que tienen una variación de intensidad con el ángulo alrededor del eje del cilindro.

En consecuencia, el campo eléctrico completamente corregido entre las placas de nuestro condensador circular, dado por la ecuación (23.17), está señalado con una línea continua en la figura 23-5. Para frecuencias no muy altas, nuestra segunda aproximación ya era bastante buena. La tercera aproximación era mejor aún; tan buena en realidad, que si la hubiéramos graficado, no podrían distinguir la diferencia entre ella y la línea continua. Verán en la sección siguiente, sin embargo, que la serie completa se necesita para tener una descripción exacta para grandes radios o para frecuencias grandes.

23-3 Una cavidad resonante

Ahora nos interesa ver cuál es el resultado de nuestra solución para el campo eléctrico entre las placas del capacitor a medida que más y más aumentamos la frecuencia de manera continua. Para ω grandes, el parámetro $x = \omega r/c$ también se vuelve grande y los primeros términos de la serie para J_0 de x aumentarán rápidamente. Esto significa que la parábola que hemos dibujado en la figura 23-5 se curva más fuertemente hacia abajo a frecuencias altas. En realidad, parece como si el campo cayera a cero a alguna frecuencia alta, tal vez cuando c/ω es aproximadamente la mitad de a. Veamos si J_0 realmente pasa por cero y se vuelve negativa. Empecemos probando con $x = 2$:

$$J_0(2) = 1 - 1 + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{36} = 0.22.$$

La función todavía no es cero, así que probemos para un valor más alto de x, digamos que $x = 2.5$. En números, escribamos:

$$J_0(2.5) = 1 - 1.56 + 0.61 - 0.11 = -0.06.$$

La función J_0 ya ha pasado por cero para cuando llegamos a $x = 2.5$. Comparando los resultados para $x = 2$ y $x = 2.5$ es como si J_0 pasara por cero a un quinto de camino entre 2.5 y 2. Podríamos estimar que el cero ocurre para x aproximadamente igual a 2.4. Veamos lo que nos da ese valor de x:

$$J_0(2.4) = 1 - 1.44 + 0.52 - 0.08 = 0.00.$$

Obtuvimos cero con una precisión de dos décimas. Si hacemos los cálculos más exactos (suponiendo que J_0 es una función bien conocida, si la buscamos en un libro), hallamos que pasa por cero en $x = 2.405$. Hemos trabajado manualmente para demostrarles que ustedes también podrían haber descubierto estas cosas en lugar de tener que copiarlas de un libro.

Ya que estamos mirando J_0 en un libro, es interesante observar cómo varía para valores grandes de x; se parece a la gráfica de la figura 23-6. A medida que x aumenta, $J_0(x)$ oscila entre valores positivos y negativos con un decrecimiento en la amplitud de oscilación.

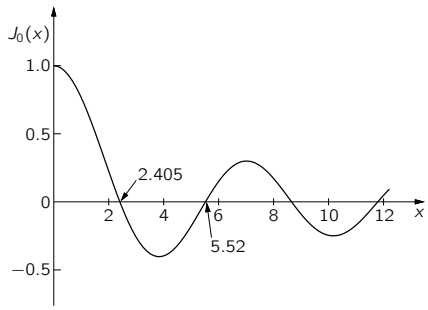


Figura 23-6. La función Bessel $J_0(x)$.

Hemos conseguido los siguientes resultados interesantes: siempre que hay frecuencias suficientemente altas, el campo eléctrico en el centro de nuestro condensador estará en un sentido y el campo eléctrico del borde apuntará en el opuesto. Por ejemplo, supongan que tomamos una ω lo suficientemente alta como para que $x = \omega r/c$ en el borde externo del condensador sea igual a 4; entonces el borde del condensador corresponde a la abscisa $x = 4$ en la figura 23-6. Esto significa que nuestro capacitor está funcionando a la frecuencia $\omega = 4c/a$. Así, en los bordes de las placas, el campo eléctrico tendrá una magnitud bastante alta y será opuesta a la dirección que sería de esperar. Esto es lo terrible que le puede acontecer a un capacitor a frecuencias altas. Siempre y cuando vayamos a frecuencias muy altas, la dirección del campo eléctrico oscilará varias veces conforme nos alejemos del centro del capacitor. También están los campos magnéticos asociados con estos campos eléctricos. No es sorprendente el que nuestro capacitor no sea como una capacitancia ideal para frecuencias altas. Hasta podemos empezar a preguntarnos si se parece más a un capacitor o a una inductancia. Debemos recalcar que hay efectos aún más complicados que hemos omitido y que se producen en los bordes del condensador. Por ejemplo, habrá radiación de ondas por los bordes, así que los campos son más complicados que los que hemos calculado, pero no nos preocuparemos por estos efectos ahora.

Podríamos tratar de imaginar un circuito equivalente para el capacitor pero, quizá, es mejor si admitimos simplemente que el capacitor que diseñamos para campos de baja frecuencia ya no es satisfactorio cuando la frecuencia es demasiado alta. Si queremos tratar el funcionamiento de tales objetos a frecuencias altas, debemos abandonar la aproximación que hemos hecho a las ecuaciones de Maxwell para el tratamiento de circuitos y volver al conjunto completo de ecuaciones que describen completamente los campos en el espacio. En lugar de tratar elementos de circuito idealizados hemos de tratar los conductores reales como son, tomando en cuenta todos los campos en los espacios entre ellos. Por ejemplo, si queremos un circuito resonante a frecuencias altas no trataremos de diseñar uno usando una bobina y un capacitor de placas paralelas.

Ya hemos mencionado que el capacitor de placas paralelas, que hemos estado analizando, tiene a la vez alguno de los aspectos tanto de un capacitor como de una inductancia. Con el campo eléctrico hay cargas en la superficie de las placas y con campos magnéticos hay fem opuestas. ¿Es posible que ya tengamos un circuito resonante? Claro que sí. Supongan que escogemos una frecuencia para la cual el patrón del campo eléctrico cae a cero para algún radio dentro del borde del disco; esto es, si escogemos $\omega a/c$ mayor que 2.405. En cualquier parte de un círculo coaxial con las placas, el campo eléctrico será cero. Ahora supongan que tomamos una hoja delgada de metal y cortamos una tira lo suficientemente ancha

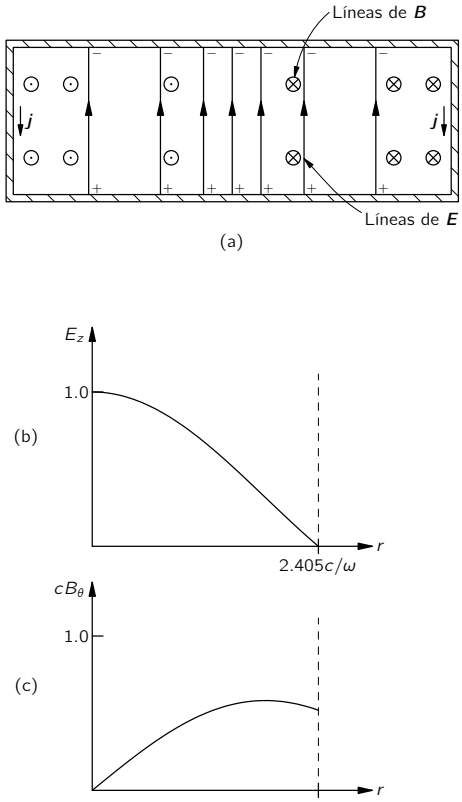


Figura 23-7. Campos eléctrico y magnético de una lata cilíndrica cerrada.

para acomodarla entre las placas del condensador. Luego la doblamos en un cilindro que irá alrededor del radio donde el campo eléctrico es cero. Puesto que no hay campo eléctrico allí, cuando ponemos este cilindro conductor en el lugar, no fluirá corriente en él y no habrá cambio en los campos eléctricos y magnéticos. Hemos podido poner al capacitor en cortocircuito sin ningún cambio. Y miren lo que tenemos: campos eléctricos y magnéticos dentro de una lata cilíndrica sin conexión al mundo externo. Los campos dentro no cambiarán aun cuando saquemos los bordes de las placas por fuera de nuestra lata, ni en los terminales del capacitor. De este modo, todo lo que nos ha quedado es una lata cerrada con campos eléctrico y magnético dentro, como se observa en la figura 23-7(a). Los campos eléctricos están oscilando a la frecuencia ω —la cual, no olviden, determinó el diámetro de la lata—. La amplitud del campo oscilante E varía con la distancia al eje de la lata, como lo muestra la figura 23-7(b). Esta curva es justamente el primer arco de la función de Bessel de orden cero. También hay un campo magnético que va en círculos alrededor del eje y oscila en el tiempo desfasado del campo eléctrico en 90°.

También podemos escribir una serie para el campo magnético y representarla, como muestra la gráfica de la figura 23-7(c).

¿Cómo podemos tener un campo magnético y eléctrico dentro de una lata sin ninguna conexión externa? Esto se debe a que los campos magnético y eléctrico se mantienen entre sí; el $\boldsymbol{E}$ variable forma un $\boldsymbol{B}$ y el $\boldsymbol{B}$ variable forma un $\boldsymbol{E}$ —todo de acuerdo a las ecuaciones de Maxwell—. Además, el campo magnético tiene un aspecto inductivo y el campo eléctrico capacitivo; juntos hacen algo como un circuito resonante. Noten que las condiciones que hemos descrito solamente se darían si el radio de la lata fuera exactamente $2.405c/\omega$. Por ello, para una lata de radio determinado, los campos magnéticos y eléctricos oscilantes se mantendrán entre sí —en la forma que hemos descrito— sólo en esta frecuencia particular. Así que, una lata cilíndrica de radio r es *resonante* a la frecuencia

$$\omega_0 = 2.405\,\frac{c}{r}. \tag{23.18}$$

Hemos dicho que los campos continúan oscilando en la misma forma después de cerrar completamente la lata. Esto no es correcto completamente. Lo anterior sería posible si todas las paredes de la lata fuesen conductores perfectos. Sin embargo, para una lata real, las corrientes oscilantes que hay en el interior de las paredes de la misma pueden perder energía debido a la resistencia del material. Las oscilaciones de los campos se extinguirán gradualmente. Podemos deducir de la figura 23-7 que debe haber fuertes corrientes asociadas con los campos eléctrico y magnético dentro de la cavidad. Debido a que el campo eléctrico se para en seco en las placas superior e inferior de la lata, tiene ahí una divergencia grande; así que debe haber cargas eléctricas positivas y negativas en la superficie interna de la lata, como se muestra en la figura 23-7(a). Cuando el campo eléctrico se invierte, también tienen que invertirse las cargas; por consiguiente, debe haber una corriente que está alternando entre las placas superior e inferior de la lata. Estas cargas fluirán en los lados de la lata, como se muestra en la figura. También podemos ver que debe haber corriente en los lados de la lata considerando lo que sucede al campo magnético. La gráfica de la figura 23-7(c) nos dice que el campo magnético cae de pronto a cero en el borde de la lata. Dicho cambio repentino en el campo magnético puede suceder únicamente si hay una corriente en la pared. Esta corriente es lo que da las cargas eléctricas alternas en las placas superior e inferior de la lata.

Puede que se estén preguntando acerca de nuestro descubrimiento de corrientes en los lados verticales de la lata. ¿Qué pasa con nuestra afirmación anterior de que nada cambiaría al introducir estos lados verticales donde el campo eléctrico era cero? Sin embargo, recordemos que cuando introdujimos los lados de la lata, las placas superior e inferior se extendían más allá de ellos, así que también había campos magnéticos fuera de nuestra lata. Fue solamente cuando sacamos las partes de las placas del condensador más allá de los bordes de la lata que tuvieron que aparecer corrientes netas en la parte interna de las paredes verticales.

Aunque los campos eléctricos y magnéticos en la lata completamente cerrada se extinguirán gradualmente debido a la pérdida de energía, podemos evitar que esto suceda si hacemos un agujero en la lata e introducimos un poquito de energía eléctrica para compensar las pérdidas. Tomemos un alambre pequeño, metámoslo por el agujero en el lado de la lata y sujetémoslo en la pared interna de manera que forme un lazo pequeño, como se muestra en la figura 23-8. Si ahora conectamos este alambre a una fuente de corriente alterna de frecuencia alta, esta corriente suministrará energía por acoplamiento a los campos eléctricos y magnéticos de la cavidad y mantendrá las oscilaciones. Por supuesto, esto sucederá solamente si la frecuencia de la fuente alimentadora está en la frecuencia resonante de la lata. Si la fuente está en la frecuencia errada, los campos eléctricos y magnéticos no resonarán y los campos de la lata serán muy débiles.

El comportamiento resonante se puede ver fácilmente haciendo otro agujero pequeño en la lata y enganchando otro lazo acoplado, como lo hemos dibujado en la figura 23-8. El campo magnético variable a través de este lazo generará una fuerza electromotriz inducida en el lazo. Siempre que a este lazo se conecta con algún circuito externo de medición, las corrientes serán proporcionales a la intensidad de los campos en la cavidad. Supongamos ahora que conectamos el lazo de entrada de nuestra cavidad a un generador de señales de RF, como se muestra en la figura 23-9. El generador de señales contiene una fuente de corriente alterna cuya frecuencia se puede variar moviendo la perilla en la parte frontal del generador. Luego conectamos el lazo de salida de la cavidad a un "detector", que es un instrumento que mide la corriente del lazo de salida. Da una lectura proporcional a esta corriente. Si ahora medimos la corriente de salida en función de la frecuencia de la señal del generador, encontramos una curva como la de la figura 23-10. La corriente de salida es pequeña para todas las frecuencias excepto las muy cercanas a ω_0, que es la frecuencia resonante de la cavidad. La curva de resonancia es muy parecida a la descrita en el capítulo 23 del volumen I. No obstante, el ancho de la resonancia es mucho más angosto que el que encontramos comúnmente para circuitos resonantes hechos de inductancias y capacitores; esto es, el Q de la cavidad es muy alto. Es común encontrar diferentes Q que llegan a 100 000 o más, si las paredes de la cavidad se hacen de algún material con una conductividad muy buena, como la plata.

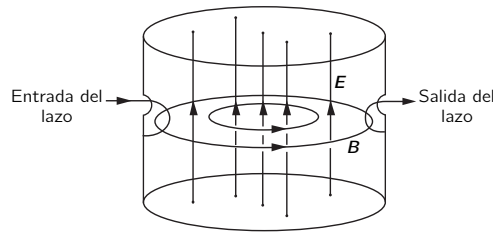


Figura 23-8. Acoplamiento dentro y fuera de una cavidad resonante.

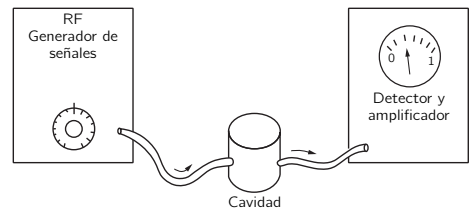


Figura 23-9. Montaje para observar la resonancia de la cavidad.

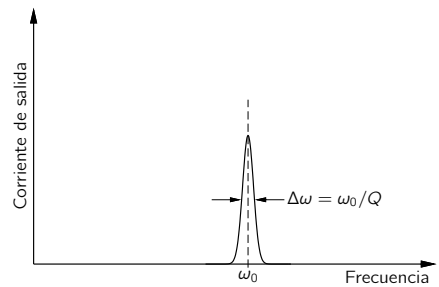


Figura 23-10. La curva de respuesta de frecuencia de una cavidad resonante.

23-4 Modos de una cavidad

Supongan ahora que tratamos de verificar nuestra teoría haciendo mediciones con una lata verdadera. Tomemos una lata cilíndrica de 7.62 cm de diámetro y unos 6.35 cm de altura. La lata está provista de un lazo de entrada y uno de salida, como muestra la figura 23-8. Si calculamos la frecuencia resonante esperada para esta lata de acuerdo a la ecuación (23.18), obtenemos que $f_0 = \omega_0/2\pi = 3\,010$ megaciclos. Cuando ponemos la frecuencia de nuestro generador de señales cerca de los 3 000 megaciclos y la variamos ligeramente hasta encontrar la resonancia, observamos que la máxima corriente de salida se obtiene para una frecuencia de 3 050 megaciclos, que es muy cercana a la frecuencia resonante mencionada, pero no exactamente la misma. Existen varias razones posibles para la discrepancia. Quizá la frecuencia resonante cambie un poquito debido a los agujeros que hemos hecho para insertar los lazos de acoplamiento. Sin embargo, pensándolo mejor, se ve que los agujeros deben bajar la frecuencia resonante un poco, así que ésa no puede ser la razón. Quizá hay algún ligero error en la calibración de la frecuencia del generador de señales, o nuestra medición del diámetro de la cavidad no es muy precisa. De cualquier manera, la concordancia es buena.

Mucho más importante es algo que sucede si variamos la frecuencia del generador de señales, algo más allá de los 3 000 megaciclos. Cuando hacemos esto encontramos el resultado que se observa en la figura 23-11. Hallamos que, además de la frecuencia resonante esperada, cercana a los 3 000 megaciclos, también hay una frecuencia resonante cercana a los 3 300 megaciclos y una cercana a los 3 820 megaciclos. ¿Qué significa esta resonancia extra? Podríamos obtener un indicio en la figura 23-6. Aunque hemos estado suponiendo que el primer cero de la

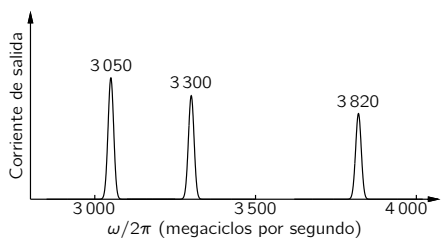
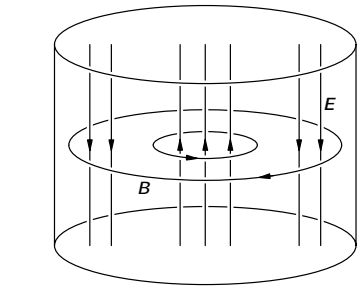
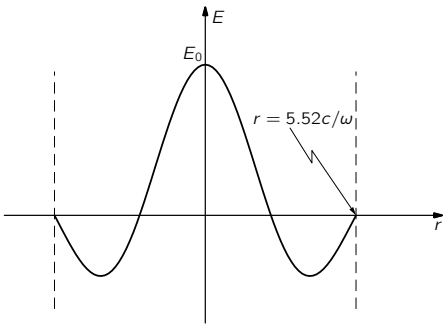


Figura 23-11. Frecuencias resonantes observadas en una cavidad cilíndrica.



(a)



(b)

Figura 23-12. Un modo de mayor frecuencia.

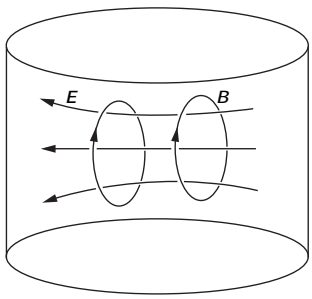


Figura 23-13. Un modo transversal de la cavidad cilíndrica.

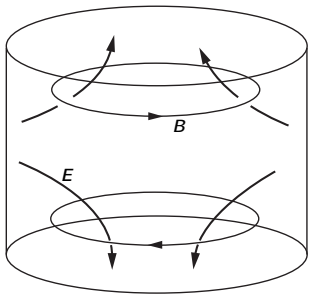


Figura 23-14. Otro modo de una cavidad cilíndrica.

función de Bessel se produce en el borde de la lata, también podría ser que el segundo cero de la función de Bessel correspondiera al borde de la lata; así pues, hay una oscilación completa del campo eléctrico al movernos desde el centro del recipiente, alejándonos del eje, como muestra la figura 23-12. Éste es otro modo posible para los campos oscilantes. Ciertamente podríamos esperar que la lata resonara en ese modo. Pero noten el segundo cero de la función de Bessel, se obtiene en $x = 5.52$, que es alrededor de dos veces más grande que el valor del primer cero. La frecuencia resonante de este modo debería ser, por lo tanto, mayor que 6 000 megaciclos. Sin duda, la hallaríamos ahí, pero no explicaría la resonancia que observamos a 3 300.

El problema es que en nuestro análisis del comportamiento de una cavidad resonante hemos considerado solamente una posible disposición geométrica de los campos magnéticos y eléctricos. Hemos supuesto que los campos eléctricos son verticales y que los campos magnéticos yacen sobre círculos horizontales. Pero son posibles otros campos. Los únicos requisitos que deben cumplir es que los campos deben satisfacer las ecuaciones de Maxwell dentro de la lata y que lleguen perpendicularmente a las paredes. Hemos considerado el caso en que las tapas superior e inferior del recipiente son planas, pero no sería completamente diferente si estuvieran curvadas. En realidad, ¿cómo se supone que la lata reconoce cuál es la tapa y cuál el fondo?, y ¿cuáles son los lados? De hecho, se puede demostrar que hay un modo de oscilación de los campos dentro del recipiente en el cual los campos eléctricos van más o menos a través el diámetro de la lata, como muestra la figura 23-13.

No es demasiado difícil comprender por qué la frecuencia natural de este modo no sería muy diferente de la frecuencia natural del primer modo que hemos considerado. Supongamos que en lugar de nuestra cavidad cilíndrica hubiéramos tomado una cavidad que fuese un cubo de 7.62 cm de lado. Está claro que esta cavidad tendría tres modos diferentes, pero todos con la misma frecuencia. Un modo con el campo eléctrico yendo más o menos hacia arriba y hacia abajo, tendría ciertamente la misma frecuencia que el modo en que el campo eléctrico fuera de izquierda a derecha. Ahora bien, si deformamos el cubo en un cilindro, estas frecuencias cambiarán un poco. No obstante, es de esperar que no cambien mucho, siempre que mantengamos más o menos las mismas dimensiones de la cavidad. Así pues, la frecuencia del modo de la figura 23-13 no sería muy diferente de la del modo de la figura 23-8. Podríamos hacer un cálculo detallado de la frecuencia natural del modo mostrado en la figura 23-13, pero no lo haremos por ahora. Haciendo los cálculos se halla que para las dimensiones que hemos supuesto, la frecuencia resonante resulta muy cercana a la resonancia observada a 3 300 megaciclos.

Por medio de cálculos parecidos es posible demostrar que debe haber aún otro modo, en la otra frecuencia resonante que encontramos cerca de los 3 800 megaciclos. Para este modo, los campos eléctricos y magnéticos son como se observan en la figura 23-14. El campo eléctrico no se molesta en recorrer todo el camino a lo largo de la cavidad. Va de los lados a las tapas, como se muestra.

Como probablemente se lo imaginarán ahora, si vamos a frecuencias más y más altas es de esperar que encontremos más y más resonancias. Hay muchos modos diferentes, cada uno de los cuales tendrá una frecuencia de resonancia distinta correspondiente a algún arreglo complicado particular de los campos eléctricos y magnéticos. Cada uno de estos arreglos de campos se llaman modo resonante. La frecuencia de resonancia de cada modo se puede calcular resolviendo las ecuaciones de Maxwell para los campos eléctricos y magnéticos en la cavidad.

Cuando tenemos una resonancia a alguna frecuencia particular, ¿cómo podemos saber cuál es el modo que está excitado? Una forma es introducir un alambre pequeño dentro de la cavidad a través de un agujero pequeño. Siempre y cuando el campo eléctrico esté a lo largo del alambre, como en la figura 23-15(a), habrá corrientes relativamente grandes en el alambre, extrayendo energía de los campos y la resonancia será suprimida. Si el campo eléctrico está como se muestra en la figura 23-15(b), el alambre tendrá un efecto mucho menor. Podríamos hallar en qué sentido apunta el campo en este modo doblando el extremo del alambre,

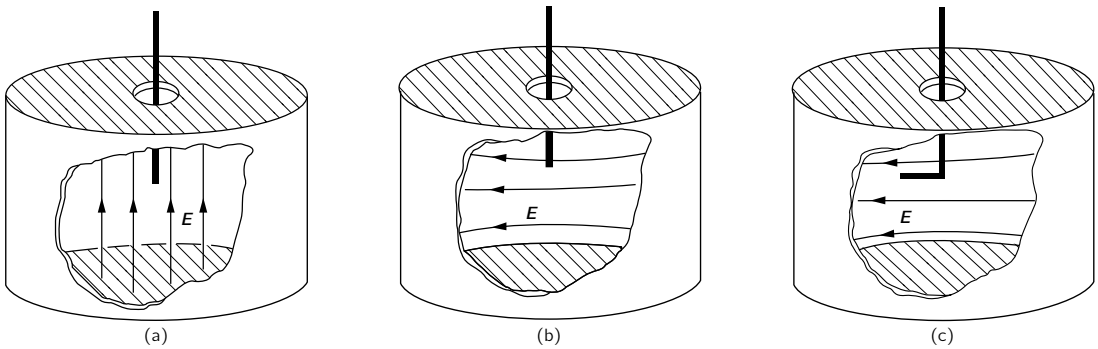


Figura 23-15. Un alambre metálico corto insertado en una cavidad, perturbará la resonancia mucho más cuando es paralelo a $\boldsymbol{E}$ que cuando está en ángulo recto.

como se muestra en la figura 23-15(c). Luego, a medida que giramos el alambre, habrá un efecto grande cuando el extremo del alambre esté paralelo a $\boldsymbol{E}$ y un pequeño efecto cuando se rote tanto que forme 90° con $\boldsymbol{E}$.

23-5 Cavidades y circuitos resonantes

Aunque la cavidad resonante que hemos descrito es completamente diferente del circuito resonante ordinario, que consiste en una inductancia y un capacitor, por supuesto, los dos sistemas resonantes están muy relacionados. Ambos son miembros de la misma familia, son justamente los casos extremos de resonadores electromagnéticos y hay muchos casos intermedios entre estos dos extremos. Supongan que empezamos considerando el circuito resonante de un capacitor en paralelo con una inductancia, como muestra la figura 23-16(a). Este circuito

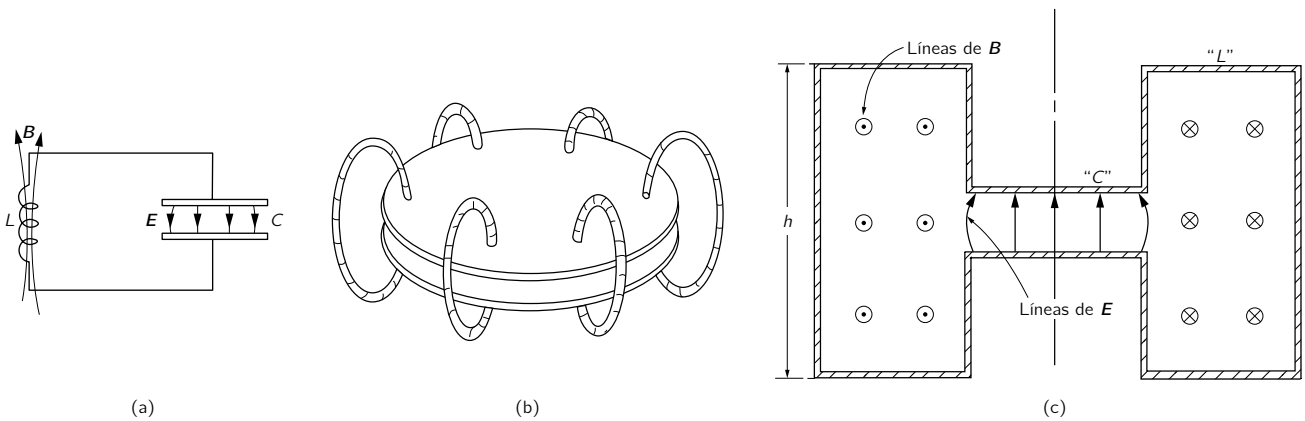


Figura 23-16. Resonadores de frecuencias resonantes progresivamente más altas.

resonará a la frecuencia $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Siempre y cuando queremos aumentar la frecuencia resonante de este circuito, podemos hacerlo bajando la inductancia L. Una forma es disminuir el número de vueltas en la bobina. Pero no podemos ir muy lejos en esta dirección. Finalmente llegaremos a la última vuelta y tendremos simplemente un pedazo de alambre que une las placas superior e inferior del condensador. No obstante, podríamos aumentar la frecuencia resonante aún más haciendo más pequeña la capacitancia; pero también podemos seguir disminuyendo la inductancia poniendo varias inductancias en paralelo. Dos inductancias de una vuelta en paralelo tendrán sólo la mitad de la inductancia de cada vuelta. Así, cuando hayamos reducido nuestra inductancia a una sola vuelta,

podremos seguir subiendo la frecuencia resonante agregando otros lazos simples desde la placa superior hasta la placa inferior del condensador. Por ejemplo, la figura 23-16(b) muestra las placas del condensador conectadas por seis de tales "inductancias de una sola vuelta". Si seguimos agregando muchas de tales piezas de alambre, podemos hacer la transición al sistema resonante completamente cerrado que muestra la parte (c) de la figura, que es un esquema de la sección transversal de un objeto de simetría cilíndrica. Ahora, nuestra inductancia es una lata cilíndrica hueca unida a los bordes de las placas de un condensador. Los campos eléctricos y magnéticos están como se muestra en la figura. Por supuesto, tal clase de objeto es una cavidad resonante, y se la llama cavidad "cargada". Pero aún podemos considerarla como un circuito L-C en el que la sección capacidad es la región donde encontramos la mayor parte del campo eléctrico y la sección inductancia es la región donde hallamos la mayor parte del campo magnético.

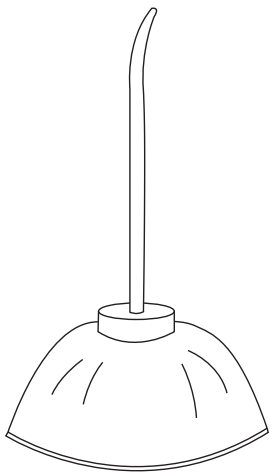


Figura 23-17. Otra cavidad resonante.

Si queremos hacer la frecuencia del resonador de la figura 23-16(c) aún más alta, lo podemos conseguir si seguimos disminuyendo la inductancia L. Para hacer esto debemos disminuir las dimensiones geométricas de la sección inductancia, por ejemplo, disminuyendo la dimensión h en el dibujo. A medida que h disminuya, la frecuencia resonante aumentará. Así, por supuesto, llegaremos a la situación en que la altura h es justamente igual a la separación entre las placas del condensador. Tenemos simplemente un recipiente cilíndrico; nuestro circuito resonante se ha transformado en la cavidad resonante de la figura 23-7.

Notarán que en el circuito resonante L-C original de la figura 23-16, los campos eléctricos y magnéticos están completamente separados. Además, como modificamos gradualmente el sistema resonante para tener frecuencias más y más altas, el campo magnético se ha acercado más y más al campo eléctrico hasta que en la cavidad resonante los dos están completamente entremezclados.

Aunque las cavidades resonantes de las que hemos hablado en este capítulo han sido latas cilíndricas, la forma cilíndrica no tiene nada de especial. Una lata, de cualquier forma, tendrá frecuencias resonantes correspondientes a varios modos posibles de oscilación de los campos eléctricos y magnéticos. Por ejemplo, la "cavidad" mostrada en la figura 23-17 tendrá su conjunto particular de frecuencias resonantes —aunque serán bastante difíciles de calcular—.

24

Guías de onda

24-1 La línea de transmisión
24-2 La guía de onda rectangular
24-3 La frecuencia de corte
24-4 La velocidad de las ondas guiadas
24-5 Observación de ondas guiadas
24-6 Plomería con guías de onda
24-7 Modos de guía de onda
24-8 Otra manera de considerar las ondas guiadas

24-1 La línea de transmisión

En el último capítulo estudiamos lo que ocurría a los elementos de circuitos concentrados cuando se los operaba a frecuencias muy altas, y eso nos llevó a comprender cómo se podía remplazar un circuito resonante por una cavidad con los campos resonando dentro. Otro problema técnico interesante es la conexión de un objeto con otro, de modo que se pueda transmitir energía electromagnética entre ellos. En los circuitos de baja frecuencia esta conexión se hace con alambres, pero este método no funciona muy bien a frecuencias altas porque los circuitos radiarán energía a todo el espacio que los rodea y es difícil controlar a dónde irá esa energía. Los campos se esparcen alrededor de los alambres; los alambres no "guían" muy bien las corrientes y los voltajes. En este capítulo estudiaremos cómo se pueden interconectar objetos a frecuencias altas. Por lo menos, ésa es una manera de presentar el tema.

Otra manera de decirlo es estudiando el comportamiento de las ondas en el espacio libre. Es hora, pues, que veamos lo que ocurre cuando se confinan campos oscilantes en una o más dimensiones. Descubriremos un nuevo fenómeno interesante, o sea, cuando se confinan los campos en sólo dos dimensiones, y se les permite marchar libremente en la tercera dimensión, se propagan en ondas. Son las "ondas guiadas" —el tema de este capítulo—.

Comenzaremos con la teoría general de la *línea de transmisión*. La línea ordinaria de transmisión de potencia que corre de torre en torre por la ciudad, radia parte de su potencia, pero las frecuencias de la potencia (50-60 ciclos/s) son tan bajas que esta pérdida no es seria. Se podría impedir la radiación rodeando la línea con una tubería metálica, pero este método no sería práctico para las líneas de potencia porque los voltajes y corrientes usados exigirían una tubería muy grande, costosa y pesada. Así pues, se usan simples "líneas abiertas".

Para frecuencias algo más altas —unos pocos kilociclos, por ejemplo— la radiación ya puede ser seria—. No obstante, se la puede reducir usando líneas de transmisión tipo "par retorcido", como se hace con las conexiones telefónicas cortas. Sin embargo, a frecuencias más altas la radiación se hace muy pronto intolerable, ya sea por la pérdida de potencia, o porque la energía aparece en otros circuitos donde no se la quiere. Para frecuencias entre unos pocos kilociclos y algunos cientos de megaciclos, las señales y potencias electromagnéticas son transmitidas, por lo común, vía líneas coaxiales que consisten en un alambre dentro de un "conductor externo" o "blindaje" cilíndrico. Aunque el tratamiento que sigue servirá para una línea de transmisión de dos conductores paralelos de cualquier forma, lo llevaremos a cabo refiriéndonos a una línea coaxial.

Tomaremos la línea coaxial más simple que tiene un conductor central, el cual suponemos que sea un cilindro delgado hueco, y un conductor externo que es otro cilindro delgado con el mismo eje que el conductor interno, como en la figura 24-1. Empezamos calculando aproximadamente cómo se comporta la línea a frecuencias relativamente bajas. Anteriormente describimos el comportamiento a baja frecuencia cuando dijimos que dos conductores así tienen cierta cantidad de inductancia por unidad de longitud o cierta capacidad por unidad de longitud. De hecho, podemos describir el comportamiento de cualquier línea de transmisión a baja frecuencia dando su inductancia L_0 por unidad de longitud y su capacitancia C_0 por unidad de longitud. Luego podemos analizar la línea como caso límite del filtro L-C discutido en la sección 22-6. Podemos hacer un filtro que imite la línea tomando pequeños elementos en serie $L_0\,\Delta x$ y pequeñas capacidades en paralelo

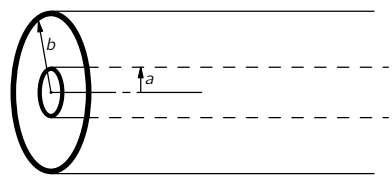


Figura 24-1. Una línea de transmisión coaxial.

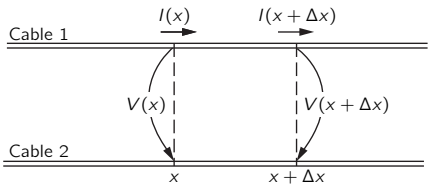


Figura 24-2. Las corrientes y voltajes de una línea de transmisión.

$C_0\,\Delta x$, donde Δx es un pequeño elemento de longitud de la línea. Empleando nuestros resultados para el filtro infinito, vemos que habrá una propagación de señales eléctricas a lo largo de la línea. Sin embargo, en vez de seguir ese enfoque preferiremos examinar la línea desde el punto de vista de una ecuación diferencial.

Supongan que observamos lo que ocurre en dos puntos vecinos a lo largo de la línea de transmisión, por ejemplo, a las distancias x y $x+\Delta x$ del comienzo de la línea. Llamemos $V(x)$ a la diferencia de potencial entre los dos conductores e $I(x)$ a la corriente por el conductor "vivo" (véase figura 24-2). Si la corriente de la línea está variando, la inductancia nos dará una caída de voltaje en una pequeña sección de líneas entre x y $x+\Delta x$, dada por

$$\Delta V = V(x+\Delta x) - V(x) = -L_0\,\Delta x\,\frac{dI}{dt}.$$

O bien, tomando el límite para $\Delta x \to 0$, obtenemos

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L_0\,\frac{\partial I}{\partial t}. \tag{24.1}$$

La corriente variable da un gradiente de voltaje.

Refiriéndonos de nuevo a la figura, si el voltaje en x está variando, debe haber cierta carga que se está suministrando a la capacidad de esa región. Si tomamos el pequeño trozo de línea entre x y $x+\Delta x$, la carga sobre él es $q = C_0\,\Delta x V$. La derivada de esta carga respecto al tiempo es $C_0\,\Delta x dV/dt$, pero la carga varía únicamente si la corriente $I(x)$ que entra al elemento es diferente de la corriente $I(x+\Delta x)$ que sale. Llamando ΔI a la diferencia, tenemos

$$\Delta I = -C_0\,\Delta x\,\frac{dV}{dt}.$$

Tomando el límite para $\Delta x \to 0$, obtenemos

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C_0\,\frac{\partial V}{\partial t}. \tag{24.2}$$

Así pues, la conservación de la carga implica que el gradiente de la corriente es proporcional a la derivada del voltaje respecto al tiempo.

Las ecuaciones (24.1) y (24.2) son, entonces, las ecuaciones básicas de una línea de transmisión. Si queremos, podemos modificarlas para incluir los efectos de la resistencia de los conductores, pero para el presente estudio nos quedaremos con el ejemplo simple.

Las dos ecuaciones de la línea de transmisión se pueden combinar derivando una respecto a t y la otra respecto a x y eliminando V o I. Entonces tenemos ya sea

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = C_0 L_0\,\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \tag{24.3}$$

o

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = C_0 L_0\,\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \tag{24.4}$$

Una vez más reconocemos la ecuación de onda en x. Para una línea de transmisión uniforme, el voltaje (y la corriente) se propaga por la línea como una onda. El voltaje a lo largo de la línea debe ser de la forma $V(x,t) = f(x-vt)$ o $V(x,t) = g(x+vt)$ o una suma de ambos. ¿Y cuál es la velocidad v? Sabemos que el coeficiente del término $\partial^2/\partial t^2$ es justamente $1/v^2$, así que

$$v = \frac{1}{\sqrt{L_0 C_0}}. \tag{24.5}$$

Dejamos para que hagan la demostración de que el voltaje *para cada onda* en una línea es proporcional a la corriente de esa onda y que la constante de proporcionalidad es justamente la impedancia característica z_0. Llamando V_+

e I_+ al voltaje y la corriente para una onda que va en la dirección x positiva, deben obtener

$$V_+ = z_0 I_+. \tag{24.6}$$

Análogamente, para la onda que va hacia menos x la relación es

$$V_- = z_0 I_-.$$

La impedancia característica —como lo hallamos a partir de nuestras ecuaciones de un filtro— está dada por

$$z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}, \tag{24.7}$$

y es, en consecuencia, una resistencia pura.

Para hallar la velocidad de propagación v la impedancia característica z_0 de una línea de transmisión, tenemos que conocer la inductancia y la capacitancia por unidad de longitud. Podemos calcularlas fácilmente para un cable coaxial; así pues, las examinaremos. Para la inductancia seguimos las ideas de la sección 17-8 y hacemos $\frac{1}{2}LI^2$ igual a la energía magnética que obtenemos integrando $\epsilon_0 c^2 B^2/2$ sobre el volumen. Supongan que por el conductor central circula una corriente I; sabemos entonces que $B = I/2\pi\epsilon_0 c^2 r$, donde r es la distancia al eje. Tomando como elemento de volumen una cáscara cilíndrica de espesor dr y longitud l, tenemos para la energía magnética

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int_a^b \left(\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r}\right)^2 l\, 2\pi r\, dr,$$

donde a y b son, respectivamente, el radio del conductor interno y el del externo. Haciendo la integral obtenemos

$$U = \frac{I^2 l}{4\pi\epsilon_0 c^2} \ln\frac{b}{a}. \tag{24.8}$$

Igualando la energía a $\frac{1}{2}LI^2$, encontramos

$$L = \frac{l}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln\frac{b}{a}. \tag{24.9}$$

Es, como debe ser, proporcional a la longitud l de la línea, así que la inductancia L_0 por unidad de longitud es

$$L_0 = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\epsilon_0 c^2}. \tag{24.10}$$

Calculamos la carga de un condensador cilíndrico (véase la sección 12-2). Ahora bien, dividiendo la carga por la diferencia de potencial, obtenemos

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 l}{\ln(b/a)}.$$

La capacidad C_0 por unidad de longitud es C/l. Combinando este resultado con la ecuación (24.10), vemos que el producto $L_0 C_0$ es igual a $1/c^2$, así que $v = 1/\sqrt{L_0 C_0}$ es igual a c. La onda viaja por la línea con la velocidad de la luz. Señalemos que este resultado depende de nuestras suposiciones: (a) que no hay dieléctricos o materiales magnéticos entre los conductores, y (b) que las corrientes están totalmente en la superficie de los conductores (como debe ser para conductores perfectos). Veremos más adelante que para buenos conductores a frecuencias altas, todas las corrientes se distribuyen sobre las superficies como debe ser para un conductor perfecto, así que esta suposición es entonces válida.

Ahora bien, es interesante que mientras las suposiciones (a) y (b) sean correctas, el producto $L_0 C_0$ es igual a $1/c^2$ para *cualquier* par de conductores paralelos —hasta, digamos, para un conductor interno hexagonal en cualquier

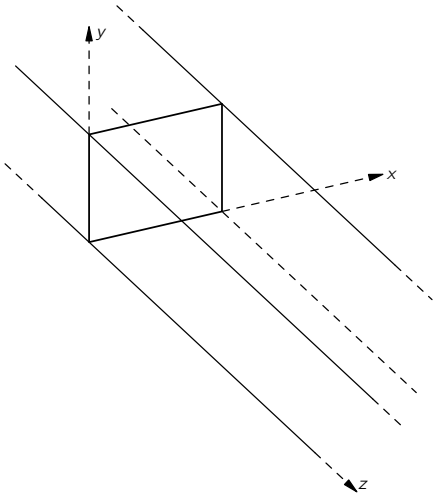


Figura 24-3. Coordenadas escogidas para la guía de onda rectangular.

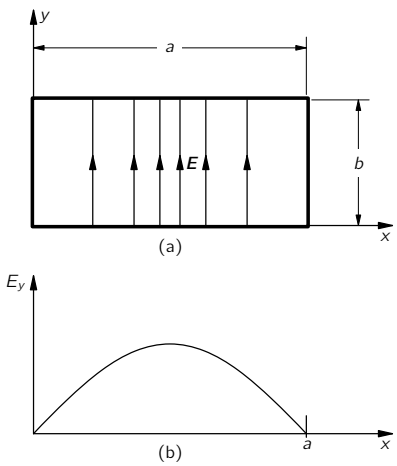


Figura 24-4. El campo eléctrico en la guía de onda en un valor de z.

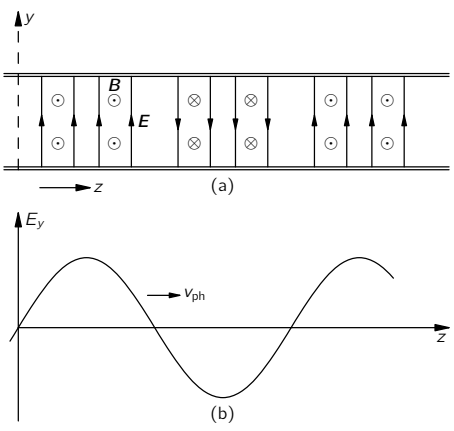


Figura 24-5. La dependencia de z del campo en la guía de onda.

parte dentro de un conductor externo elíptico—. Mientras la sección sea constante y el espacio entre ellos no tenga ningún material, las ondas se propagan a la velocidad de la luz.

No se puede hacer ninguna aserción general como ésta respecto a la impedancia característica. Para la línea coaxial es

$$z_0 = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\epsilon_0 c}. \tag{24.11}$$

El factor $1/\epsilon_0 c$ tiene dimensiones de una resistencia y es igual a 120π ohms. El factor geométrico $\ln(b/a)$ sólo depende logarítmicamente de las dimensiones, así que para la línea coaxial —y la mayoría de las líneas— la impedancia característica tiene valores típicos entre unos 50 ohms y unos pocos cientos de ohms.

24-2 La guía de onda rectangular

Ahora nos ocuparemos de algo que, a primera vista, parece ser un fenómeno sorprendente: si se saca el conductor central de la línea coaxial, aún puede transportar potencia electromagnética. Así pues, a frecuencias suficientemente altas, un tubo hueco funcionará tan bien como uno con alambres. Está relacionado con el misterioso modo en que un circuito resonante de condensador e inductancia se remplaza a frecuencias altas simplemente por una lata.

Aunque parezca peculiar que se piense en términos de una línea de transmisión como inductancia y capacidad distribuidas, todos sabemos que las ondas electromagnéticas pueden viajar por dentro de una tubería metálica hueca. Si la tubería es recta, ¡podemos ver a través de ella! Así pues, las ondas electromagnéticas viajan ciertamente por una tubería. Sabemos, además, que no es posible transmitir ondas de baja frecuencia (de potencia o telefónicas) por dentro de una sola tubería metálica. Así pues, debe ser que las ondas electromagnéticas pasarán si su longitud de onda es suficientemente corta. Por lo tanto, discutiremos el caso límite de la longitud de onda más larga (o la frecuencia más baja) que pueden pasar por una tubería de tamaño dado. Debido a que la tubería se usa para transportar ondas, se llama *guía de onda*.

Comenzaremos con una tubería rectangular porque es el caso más simple de analizar. Daremos primero un tratamiento matemático y volveremos luego a examinar el problema de una manera mucho más elemental. Sin embargo, el enfoque más elemental sólo se puede aplicar fácilmente a una guía rectangular. Los fenómenos básicos son los mismos para una guía general de forma arbitraria, así que el razonamiento matemático es fundamentalmente más sólido.

Nuestro problema es entonces encontrar qué tipo de ondas puede existir dentro de una tubería rectangular. Elijamos primero coordenadas convenientes; tomemos el eje z según la longitud de la tubería y los ejes x, y paralelos a los dos lados, como lo muestra la figura 24-3.

Sabemos que cuando las ondas luminosas van por la tubería tienen un campo eléctrico transversal; supongan, entonces, que primero buscamos soluciones en las cuales $\boldsymbol{E}$ es perpendicular a z, digamos que con la componente y, E_y únicamente. Este campo eléctrico tendrá cierta variación a través de la guía; de hecho, debe llegar a cero en los lados paralelos al eje y, porque en un conductor las corrientes y las cargas siempre se ajustan de manera que no haya componente tangencial del campo eléctrico en la superficie del conductor. Así pues, E_y variará con x siguiendo un arco, como lo muestra la figura 24-4. ¿Es quizá la función de Bessel que encontramos para una cavidad? No, porque la función de Bessel tiene que ver con geometrías cilíndricas. En una geometría rectangular las ondas son, por lo común, funciones armónicas simples, así que debemos intentar algo como $\operatorname{sen} k_x x$.

Como queremos ondas que se propaguen por la guía, es de esperar que los campos alternen entre valores positivos y negativos a medida que avancemos según z (figura 24-5), y que estas oscilaciones viajen por la guía con cierta velocidad v. Si tenemos oscilaciones de cierta frecuencia definida ω, estimaríamos que la onda podría variar con z como $\cos(\omega t - k_z z)$, o para usar la forma matemática más

conveniente, como $e^{i(\omega t - k_z z)}$. Esta dependencia de z representa una onda que viaja a velocidad $v = \omega/k_z$ (capítulo 29, volumen I).

Así pues, podemos conjeturar que en la guía la onda tendría la siguiente forma matemática:

$$E_y = E_0 e^{i(\omega t - k_z z)} \operatorname{sen} k_x x. \tag{24.12}$$

Veamos si esta conjetura satisface las ecuaciones de campo correctas. Primero, el campo eléctrico no debe tener componentes tangenciales sobre los conductores. Nuestro campo satisface este requisito; es perpendicular a la cara de arriba y a la de abajo y es cero en las dos caras laterales. Bueno, lo es si elegimos k_x de modo que medio ciclo de $\operatorname{sen} k_x x$ encaje precisamente en el ancho de la guía, es decir, si

$$k_x a = \pi. \tag{24.13}$$

Hay otras posibilidades, como $k_x a = 2\pi, 3\pi, \ldots$, o, en general,

$$k_x a = n\pi, \tag{24.14}$$

donde n es un entero cualquiera. Estos valores representan arreglos complicados del campo, pero por ahora tomemos únicamente el más simple, donde $k_x = \pi/a$, donde a es el ancho interno de la guía.

Segundo, la divergencia de $\boldsymbol{E}$ debe ser cero en el espacio libre dentro de la guía, ya que allí no hay cargas. Nuestro $\boldsymbol{E}$ sólo tiene la componente y y no varía con y, así que realmente tenemos $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0$.

Finalmente, nuestro campo eléctrico debe estar de acuerdo con el resto de las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre dentro de la guía. Es lo mismo que decir que debe satisfacer la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0. \tag{24.15}$$

Debemos comprobar si nuestra conjetura, ecuación (24.12), funciona. La segunda derivada de E_y respecto a x es $-k_x^2 E_y$. La segunda derivada respecto a y es cero, ya que nada depende de y. La segunda derivada respecto a z es $-k_z^2 E_y$ y la segunda derivada respecto a t es $-\omega^2 E_y$. La ecuación (24.15) indica que

$$k_x^2 E_y + k_z^2 E_y - \frac{\omega^2}{c^2} E_y = 0.$$

A no ser que E_y sea cero en todas partes (lo cual no es muy interesante), esta ecuación es correcta si

$$k_x^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0. \tag{24.16}$$

Ya hemos fijado k_x, así que esta ecuación nos indica que puede haber ondas del tipo que hemos supuesto si k_z está relacionado con la frecuencia ω de modo que se satisfaga la ecuación (24.16), en otras palabras, si

$$k_z = \sqrt{(\omega^2/c^2) - (\pi^2/a^2)}. \tag{24.17}$$

Las ondas que hemos descrito se propagan en la dirección z con este valor de k_z.

El número de onda k_z que obtenemos de la ecuación (24.17) nos indica, para una frecuencia dada ω, con qué velocidad se propagan los nodos de la onda por la guía. La velocidad de fase es

$$v = \frac{\omega}{k_z}. \tag{24.18}$$

Recordarán ustedes que la longitud de onda λ de una onda viajera está dada por $\lambda = 2\pi v/\omega$, así que k_z también es igual a $2\pi/\lambda_g$, donde λ_g es la longitud de onda de las oscilaciones según la dirección z —la "longitud de onda en la guía"—. Por supuesto, la longitud de onda en la guía es diferente de la longitud de onda de las ondas electromagnéticas de la misma frecuencia en el espacio libre. Si llamamos λ_0 a esta longitud de onda en el espacio libre, la cual es igual a $2\pi c/\omega$, podemos escribir la ecuación (24.17) en la forma

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2}}. \tag{24.19}$$

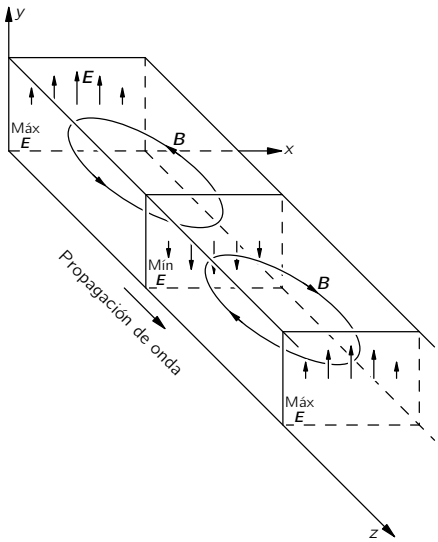


Figura 24-6. El campo magnético en la guía de onda.

Además de los campos eléctricos, hay campos magnéticos que viajarán con la onda, pero ahora no nos ocuparemos de obtener su expresión. Como $c^2\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \partial\boldsymbol{E}/\partial t$, las líneas de $\boldsymbol{B}$ circularán por las regiones donde $\partial\boldsymbol{E}/\partial t$ es máxima, es decir, a mitad de camino entre el máximo y el mínimo de $\boldsymbol{E}$. Los lazos de $\boldsymbol{B}$ estarán paralelos al plano xz y entre las crestas y valles de $\boldsymbol{E}$, como muestra la figura 24-6.

24-3 La frecuencia de corte

Al despejar k_z de la ecuación (24.16) debería haber realmente dos raíces —una positiva y otra negativa—. Deberíamos escribir

$$k_z = \pm\sqrt{(\omega^2/c^2) - (\pi^2/a^2)}. \tag{24.20}$$

Los dos signos significan simplemente que en la guía puede haber ondas que se propagan con velocidad de fase negativa (hacia $-z$) y ondas que se propagan en la dirección positiva. Naturalmente, es posible que las ondas vayan en cualquiera de las dos direcciones. Como ambos tipos de ondas pueden estar presentes al mismo tiempo, habrá la posibilidad de soluciones en forma de ondas estacionarias.

Nuestra ecuación para k_z también nos dice que frecuencias más altas dan valores mayores de k_z y, en consecuencia, longitudes de onda más chicas, hasta que en el límite de ω grande, k se hace igual a ω/c, que es el valor que sería de esperar para ondas en el espacio libre. La luz que "vemos" mirando por una tubería todavía viaja a velocidad c. Pero observen ahora que si vamos hacia frecuencias bajas, ocurre algo extraño. Al principio la longitud de onda se hace más y más larga; pero, si ω se hace muy pequeña, de repente la cantidad dentro de la raíz en la ecuación (24.20) se hace negativo. Esto ocurrirá en cuanto ω llegue a ser menor que $\pi c/a$ —o cuando λ_0 se haga mayor que $2a$—. En otras palabras, cuando la frecuencia se hace menor que cierta frecuencia crítica $\omega_c = \pi c/a$, el número de onda k_z (y también λ_g) se hace imaginario y no tenemos más una solución. ¿O bien tenemos? ¿Quién dijo que k_z tiene que ser real? ¿Y qué ocurre si se hace imaginario? Nuestras ecuaciones de campo se cumplen todavía. Quizás un k_z imaginario también represente una onda.

Supongan que ω es menor que ω_c; entonces podemos escribir

$$k_z = \pm ik', \tag{24.21}$$

donde k' es un número real positivo:

$$k' = \sqrt{(\pi^2/a^2) - (\omega^2/c^2)}. \tag{24.22}$$

Si volvemos ahora a nuestra expresión (24.12) para E_y, tenemos

$$E_y = E_0 e^{i(\omega t \mp ik'z)} \operatorname{sen} k_x x, \tag{24.23}$$

que podemos escribir en la forma

$$E_y = E_0 e^{\pm k'z} e^{i\omega t} \operatorname{sen} k_x x. \tag{24.24}$$

Esta expresión da un campo $\boldsymbol{E}$ que oscila en el tiempo como $e^{i\omega t}$ pero que varía con z como $e^{\pm k'z}$. Aumenta o disminuye con z suavemente como una exponencial real. En nuestra deducción no nos preocupamos de las fuentes que producían las ondas pero, por supuesto, debe haber una fuente en alguna parte de la guía. El signo que lleva k' tiene que ser el que haga decrecer el campo al aumentar la distancia a la fuente de las ondas.

Así pues, para frecuencias por debajo de $\omega_c = \pi c/a$ las ondas no se propagan por la guía; los campos oscilantes penetran en la guía sólo una distancia del orden de $1/k'$. Por esta razón, la frecuencia ω_c se llama "frecuencia de corte" de la guía. Examinando la ecuación (24.22) vemos que para frecuencias un poco menores que ω_c el número k' es pequeño y los campos pueden penetrar una gran distancia dentro de la guía. Pero si ω es mucho menor que ω_c el coeficiente exponencial k' es igual a π/a y el campo se extingue en forma extremadamente rápida, como

muestra la figura 24-7. El campo disminuye en $1/e$ en la distancia a/π o sea sólo un tercio del ancho de la guía. Los campos penetran una distancia muy corta desde la fuente.

Queremos recalcar una característica interesante de nuestro análisis de las ondas guiadas —la aparición del número de onda k_z imaginario—. Normalmente, si resolvemos una ecuación en física y obtenemos un número imaginario, no significa nada físico. No obstante, para las *ondas* un número de onda imaginario *sí* significa algo. Se sigue satisfaciendo la ecuación de onda; sólo significa que la solución da campos que disminuyen exponencialmente en vez de ondas que se propagan. Así pues, en cualquier problema de ondas donde k se haga imaginario para cierta frecuencia, significa que la forma de la onda cambia —la onda sinusoidal se convierte en una exponencial—.

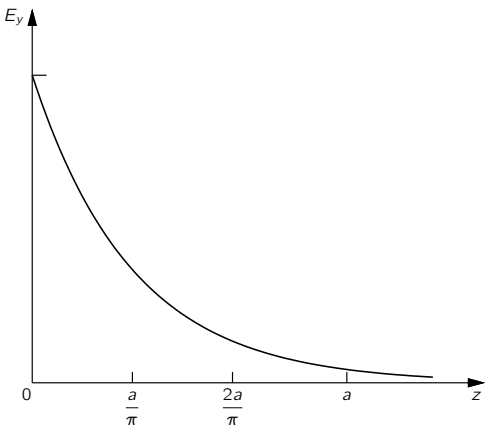


Figura 24-7. La variación de E_y con z para $\omega \ll \omega_c$.

24-4 La velocidad de las ondas guiadas

La velocidad de onda que hemos usado anteriormente es la velocidad de fase, que es la velocidad de un nodo de la onda; está en función de la frecuencia. Si combinamos las ecuaciones (24.17) y (24.18), podemos escribir

$$v_{\text{fase}} = \frac{c}{\sqrt{1-(\omega_c/\omega)^2}}. \tag{24.25}$$

Para frecuencias por encima del corte —donde existen ondas que se propagan— ω_c/ω es menor que uno, y v_{fase} es real y *mayor que* la velocidad de la luz. Ya hemos visto en el capítulo 48 del volumen I que son posibles velocidades de *fase* mayores que la de la luz porque son únicamente los nodos de la onda que se están moviendo y no energía o información. Para saber a qué velocidad viajarán las *señales* tenemos que calcular la velocidad de pulsos o modulaciones hechas por medio de interferencia de una onda de una frecuencia con una o más ondas de frecuencias ligeramente diferentes (véase capítulo 48, volumen I). Hemos llamado velocidad de grupo a la velocidad de la envolvente de ese grupo de ondas; no es ω/k sino $d\omega/dk$:

$$v_{\text{grupo}} = \frac{d\omega}{dk}. \tag{24.26}$$

Derivando la ecuación (24.17) respecto a ω e invirtiendo para obtener $d\omega/dk$, encontramos

$$v_{\text{grupo}} = c\sqrt{1-(\omega_c/\omega)^2}, \tag{24.27}$$

que es menor que la velocidad de la luz.

La medida geométrica de v_{fase} y v_{grupo} es justamente c, la velocidad de la luz:

$$v_{\text{fase}}v_{\text{grupo}} = c^2. \tag{24.28}$$

Es curioso, porque hemos visto una relación similar en la mecánica cuántica. Para una partícula a cualquier velocidad —hasta relativista— el momentum p y la energía U están relacionados por

$$U^2 = p^2c^2 + m^2c^4. \tag{24.29}$$

Pero en mecánica cuántica la energía es $\hbar\omega$ y el momentum es $\hbar/\lambda$, que es igual a $\hbar k$ así, la ecuación (24.29) se puede escribir

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}, \tag{24.30}$$

o sea

$$k = \sqrt{(\omega^2/c^2) - (m^2c^2/\hbar^2)}, \tag{24.31}$$

que se parece mucho a la ecuación (24.17)... ¡Interesante!

La velocidad de grupo de las ondas es también la velocidad a la cual se transporta energía a través de la guía. Para hallar el flujo de energía por la guía, podemos obtenerlo de la densidad de energía por la velocidad de grupo. Si la

media cuadrática del campo eléctrico es E_0, la densidad media de energía eléctrica es $\epsilon_0 E_0^2/2$. Hay también cierta energía asociada con el campo magnético. No lo demostraremos aquí, pero en cualquier cavidad o guía, las energías magnética y eléctrica son iguales, de modo que la densidad total de energía electromagnética es $\epsilon_0 E_0^2$. La potencia dU/dt transmitida por la guía es entonces

$$\frac{dU}{dt} = \epsilon_0 E_0^2 abv_{\text{grupo}}. \tag{24.32}$$

(Más adelante veremos otra forma más general de obtener el flujo de energía.)

24-5 Observación de ondas guiadas

Se puede introducir energía en una guía de onda por medio de una especie de "antena". Por ejemplo, puede servir un pequeño alambre vertical. Se puede observar la presencia de las ondas guiadas sacando un poco de energía electromagnética con una pequeña "antena" receptora, que también puede ser un pequeño alambre o lazo. En la figura 24-8 ilustramos una guía con algunos cortes para mostrar un alambre de excitación y una "cabeza" de detección. El alambre de excitación se puede conectar a un generador de señales por medio de un cable coaxial y la cabeza de detección se puede conectar a un detector con un cable similar. Por lo común, es conveniente insertar la cabeza de detección a través de una larga ranura angosta en la guía, como lo muestra la figura 24-8. Luego se puede mover la cabeza a lo largo de la guía para muestrear los campos en diversas posiciones.

Si se sintoniza el generador de señales a una frecuencia ω mayor que la frecuencia de corte ω_c, habrá ondas que se propagan por la guía desde el alambre de excitación. Éstas serán las únicas ondas presentes si la guía es infinitamente larga, lo cual se puede conseguir de manera efectiva terminando la guía con un absorbente cuidadosamente diseñado para que no haya reflexiones en el otro extremo. Entonces, como el detector mide el promedio temporal de los campos cerca de la cabeza, recibirá una señal que es independiente de la posición a lo largo de la guía; su salida será proporcional a la potencia que se está transmitiendo.

Si ahora se termina el otro extremo de la guía de alguna manera que produzca una onda reflejada —como ejemplo extremo, si la cerrásemos con una placa metálica— habrá una onda reflejada además de la onda original hacia adelante. Estas dos ondas interferirán y producirán una onda estacionaria en la guía, análoga a las ondas estacionarias en una cuerda que estudiamos en el capítulo 49 del volumen I. Luego, a medida que se mueve la cabeza de detección a lo largo de la línea, las lecturas del detector subirán y bajarán periódicamente, mostrando un máximo de los campos en cada cresta y un mínimo en cada nodo. La distancia entre dos nodos (o lazos) sucesivos es justamente $\lambda_g/2$. Esto da una manera conveniente de medir la longitud de onda en la guía. Si la frecuencia se acerca a ω_c la distancia entre nodos aumenta, demostrando que la longitud de onda en la guía aumenta como lo predice la ecuación (24.19).

Supongan ahora que se sintoniza el generador de señales a una frecuencia un poco por debajo de ω_c. Entonces la salida del detector disminuirá gradualmente a medida que la cabeza de detección avance en la guía. Si se baja un poco la frecuencia, la intensidad del campo caerá rápidamente, siguiendo la curva de la figura 24-7, lo cual demuestra que las ondas no se propagan.

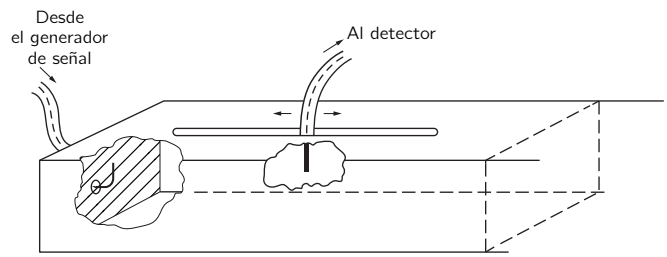


Figura 24-8. Una guía de onda con un alambre de excitación y una cabeza detectora.

24-6 Plomería con guías de onda

La transmisión de potencia de alta frecuencia es un uso práctico importante de las guías de onda, por ejemplo, acoplar el oscilador de alta frecuencia o amplificador de salida de un equipo de radar a una antena. En la práctica, la antena misma consiste, por lo general, en un reflector parabólico alimentado en su foco con una guía de onda ensanchada en su extremo para hacer una "corneta" que radía las ondas que vienen por la guía. Aunque se puede transmitir altas frecuencias por un cable coaxial, una guía de onda es mejor para transmitir grandes cantidades de potencia. Primero, la máxima potencia que se puede transmitir por una línea está limitada por la ruptura eléctrica de la aislación (sólida o gaseosa) entre los conductores. Para una cantidad dada de potencia, las intensidades de campo en una guía son comúnmente menores que en un cable coaxial, así que se puede transmitir potencias más altas antes de que haya ruptura. Segundo, las pérdidas de potencia en el cable coaxial son, por lo general, mayores que en una guía de onda. En un cable coaxial debe haber material aislante para sostener el conductor central y hay una pérdida de energía en este material —especialmente a frecuencias altas—. Además, las densidades de corriente en el conductor central son bastante altas y, como las pérdidas crecen como el *cuadrado* de la densidad de corriente, las corrientes más bajas que aparecen en las paredes de la guía dan lugar a pérdidas de energía menores. Para minimizar estas pérdidas, a menudo se cubren las superficies internas de la guía con un material de alta conductividad, como la plata.

El problema de conectar un "circuito" con guías de onda es completamente diferente del correspondiente problema de circuitos de baja frecuencia y habitualmente se lo llama "plomería" de microondas. Se han desarrollado muchos dispositivos especiales para este fin. Por ejemplo, dos secciones de guía de onda se conectan usualmente por medio de bridas, como se puede ver en la figura 24-9. Sin embargo, esas conexiones pueden ocasionar serias pérdidas de energía, porque las corrientes superficiales deben atravesar la unión, la cual puede tener una resistencia relativamente alta. Una manera de evitar esas pérdidas es hacer las bridas como muestra el dibujo en corte de la figura 24-10. Se deja un pequeño espacio entre las secciones adyacentes de la guía y se corta una canaleta en la cara de una de las bridas para hacer una pequeña cavidad del tipo mostrado en la figura 23-16(c). Las dimensiones se eligen de modo que esta cavidad sea resonante a la frecuencia que se está usando. Esta cavidad resonante presenta una "impedancia" alta a las corrientes, así que la corriente que atraviesa las uniones metálicas (por a en la figura 24-10) es relativamente pequeña. Las altas corrientes de la guía simplemente cargan y descargan la "capacidad" de la separación (b en la figura), donde hay poca disipación de energía.

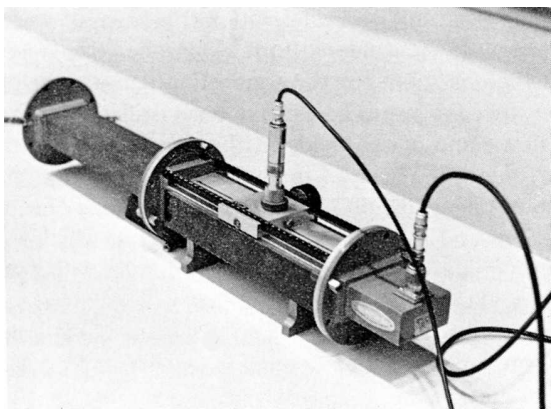


Figura 24-9. Secciones de una guía de onda conectadas con bridas.

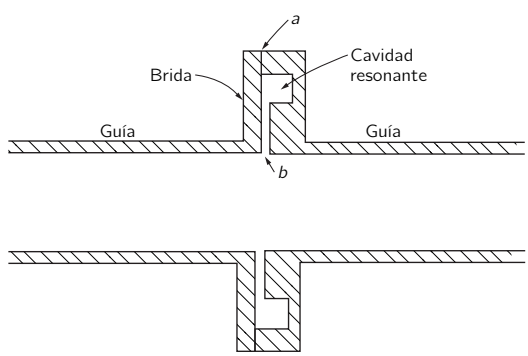


Figura 24-10. Una conexión de pérdida baja entre dos secciones de una guía de onda.

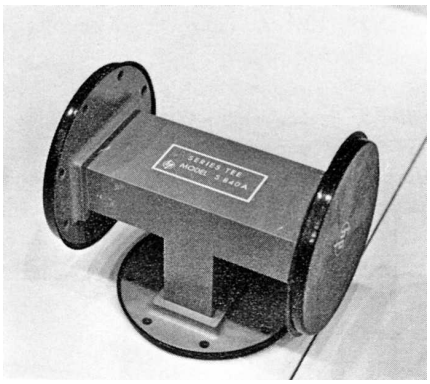


Figura 24-11. Una guía de onda "T". (Las bridas tienen cabezas de plástico para mantener el interior limpio mientras la "T" no se está usando.)

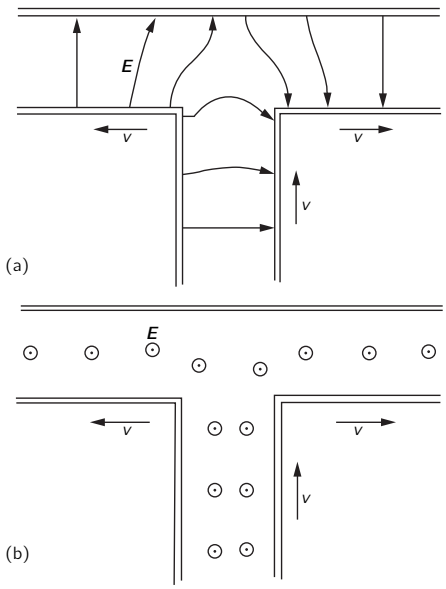


Figura 24-12. Los campos eléctricos en una guía de onda "T" para dos posibles orientaciones del campo.

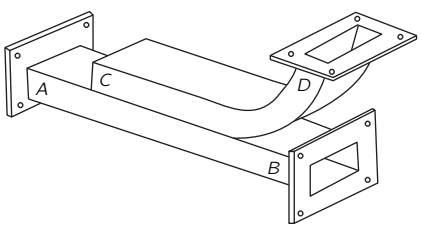


Figura 24-13. Un acoplador unidireccional.

Supongan que quieren interrumpir una guía de onda sin dar lugar a ondas reflejadas. Entonces tienen que poner algo en el extremo que imite una longitud infinita de la guía. Necesitan una "terminación" que desempeñe en la guía el papel que la impedancia característica desempeña en una línea de transmisión —algo que absorba las ondas que llegan sin producir reflexiones—. Entonces la guía se comportará como si siguiera interminablemente. Esas terminaciones se hacen poniendo dentro de la guía unas cuñas de material con resistencia diseñadas cuidadosamente para absorber la energía de la onda sin generar casi ninguna onda reflejada.

Si quieren conectar *tres* guías —por ejemplo, una fuente a dos antenas diferentes— pueden usar una "T" como la que muestra la figura 24-11. La potencia que se alimenta por la sección central de la "T" se divide y va por los dos brazos laterales (y también puede haber ondas reflejadas). Pueden ver cualitativamente por los esquemas de la figura 24-12 que los campos se extenderán cuando lleguen al final de la sección de entrada y producirán campos eléctricos que originarán ondas que salen por los dos brazos. Según que los campos en la guía sean paralelos o perpendiculares al "palito" de la "T", los campos en la unión serán aproximadamente como se muestra en (a) o en (b) de la figura 24-12.

Finalmente, describiremos un dispositivo llamado "acoplador unidireccional", que es muy útil para saber lo que está pasando después de haber conectado una disposición complicada de guías de onda. Supongan que quieren saber en qué sentido están yendo las ondas en una sección determinada de la guía —por ejemplo, podrían estarse preguntando si hay una fuerte onda reflejada o no—. El acoplador unidireccional saca una fracción pequeña de la potencia de una guía si hay una onda que va en un sentido, pero no saca nada si la onda está yendo en el otro sentido. Conectando la salida del acoplador a un detector, pueden medir la potencia de la guía "en un sentido".

La figura 24-13 es un dibujo de un acoplador unidireccional; un pedazo de guía de onda AB tiene otro pedazo de guía de onda CD soldado a lo largo de uno de sus lados. La guía CD está curvada para dar lugar a las bridas de conexión. Antes de soldar las guías, se han hecho dos (o más) agujeros en cada guía (enfrentados) de manera que parte de los campos de la guía principal AB pueden entrar en la guía secundaria CD. Cada agujero se comporta como una pequeña antena que produce una onda en la guía secundaria. Si hubiera sólo un agujero, las ondas serían enviadas en ambas direcciones y serían las mismas no importa qué camino haya tomado la onda en la guía primaria. Pero cuando hay *dos* agujeros con una separación igual a un cuarto de la longitud de onda en la guía, constituirán dos fuentes desfasadas en 90°. ¿Recuerdan que consideramos en el capítulo 29 del volumen I la interferencia de las ondas provenientes de dos antenas a una distancia de $\lambda/4$ y excitadas con un desfase de 90° en el tiempo? Encontramos que las ondas se restan en una dirección y se suman en la opuesta. Aquí ocurre lo mismo. La onda producida en la guía CD irá en la misma dirección que la onda en AB.

Si en la guía primaria la onda está viajando de A hacia B, habrá una onda en la salida D de la guía secundaria. Si en la guía primaria la onda va de B hacia A, habrá una onda que va hacia el extremo C de la guía secundaria. Este extremo está equipado con una terminación, por lo que esta onda se absorbe y no hay onda a la salida del acoplador.

24-7 Modos de guía de onda

La onda que hemos elegido para analizar es una solución especial de las ecuaciones de campo. Hay muchas más. Cada solución se llama "modo" de guía de onda. Por ejemplo, nuestra dependencia de x en el campo era justamente medio ciclo de una onda sinusoidal. Hay una solución igualmente aceptable con un ciclo completo; entonces la variación de E_y con x es como lo muestra la figura 24-14. El k_x de ese modo es el doble de grande, así que la frecuencia de corte es mucho mayor. Además, en la onda que estudiamos $\boldsymbol{E}$ tiene únicamente la componente y, pero hay otros modos con campos eléctricos más complicados.

Si el campo eléctrico tiene sólo componentes según x y y —de manera que el campo eléctrico total es siempre perpendicular a la dirección z—, el modo se llama "transversal eléctrico" (o TE). En esos modos el campo magnético siempre tendrá una componente z. Resulta que si $\boldsymbol{E}$ tiene una componente en la dirección z (según la dirección de propagación), el campo magnético siempre tendrá únicamente componentes transversales. Así, esos campos se llaman modos transversales magnéticos (TM). En una guía rectangular todos los otros modos tienen una frecuencia de corte mayor que el modo TE simple que hemos descrito. Por lo tanto, es posible —y habitual— usar una guía de onda con una frecuencia apenas mayor que la de corte de este modo más bajo, pero menor que la frecuencia de corte de todos los otros, de manera que se propague un solo modo. De lo contrario ocurren cosas complicadas y difíciles de controlar.

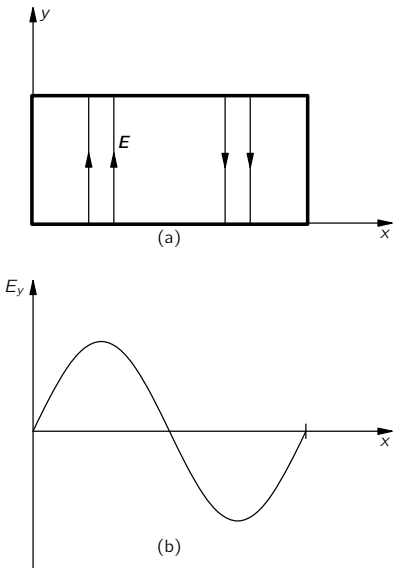


Figura 24-14. Otra posible variación de E_y con x.

24-8 Otra manera de considerar las ondas guiadas

Ahora mostraremos otra manera de entender por qué una guía de onda atenúa rápidamente los campos para frecuencias inferiores a la frecuencia de corte ω_c. Así tendrán una idea más "física" de por qué el comportamiento cambia tan drásticamente entre frecuencias bajas y altas. Podemos hacerlo con una guía rectangular analizando los campos en términos de reflexiones —o imágenes— en las paredes de la guía. No obstante, el enfoque sólo sirve para guías rectangulares; es por eso que empezamos con el análisis más matemático que, en principio, sirve para guías de forma cualquiera.

Para el modo que hemos descrito, la dimensión vertical (según y) no tenía efecto alguno; así que podemos ignorar la parte de arriba y la de abajo de la guía e imaginar que ésta se extiende indefinidamente en la dirección vertical. Imaginemos, luego, que la guía consiste simplemente en dos placas verticales a una distancia a.

Digamos que la fuente de los campos es un alambre vertical colocado en el medio de la guía, por el cual circula una corriente que oscila a la frecuencia ω. En ausencia de las paredes de la guía, ese alambre radiaría ondas cilíndricas.

Consideremos ahora que las paredes de la guía son conductores perfectos. Entonces, como en electrostática, la situación en la superficie será la correcta si agregamos al campo del alambre el campo de uno o más alambres imagen apropiados. El concepto de imagen sirve tanto para electrodinámica como para electrostática, siempre que, por supuesto, incluyamos también los retardos. Sabemos que es cierto porque a menudo hemos visto un espejo produciendo una imagen de una fuente luminosa y un espejo es justamente un conductor "perfecto" para ondas electromagnéticas de frecuencias ópticas.

Tomemos ahora una sección horizontal, como muestra la figura 24-15, donde W_1 y W_2 son dos paredes de guía y S_0 es el alambre que hace de fuente. Llamemos positiva a la dirección de la corriente en el alambre. Ahora bien, si hubiera una sola pared, W_1, por ejemplo, podríamos sacarla si colocáramos una fuente imagen (de polaridad opuesta) en la posición marcada S_1. Pero con ambas paredes, también habrá una imagen de S_0 en la pared W_2, que indicamos con S_2. Esta imagen tendrá también una imagen en W_1, que llamamos S_3. Ahora bien, S_1 y S_3 tendrán imágenes en W_2 en las posiciones marcadas S_4 y S_6, y así sucesivamente. Para nuestros dos conductores planos con la fuente a mitad de camino entre ambos, los campos son los mismos que los producidos por una línea infinita de fuentes, todas a una distancia a de separación. (De hecho, es lo que *verían* si miraran a un alambre colocado a mitad de camino entre dos espejos paralelos.) Para que los campos sean cero en las paredes, la polaridad de las corrientes de las imágenes debe alternar de imagen a imagen. En otras palabras, oscilan con un desfase de 180°. El campo de la guía de onda es entonces la superposición de los campos de ese conjunto infinito de fuentes lineales.

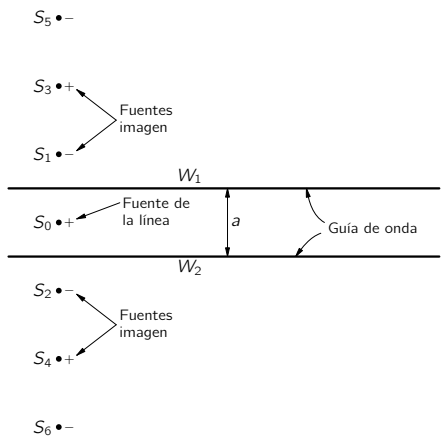


Figura 24-15. La fuente de la línea S_0 entre las paredes planas conductoras W_1 y W_2. Las paredes pueden ser remplazadas por una sucesión infinita de fuentes imagen.

Sabemos que, si estamos cerca de las fuentes, los campos son muy parecidos al campo estático. Consideramos en la sección 7-5 el campo estático de una rejilla de fuentes lineales y encontramos que es como el campo de una lámina cargada excepto por términos que decrecen exponencialmente con la distancia a la rejilla.

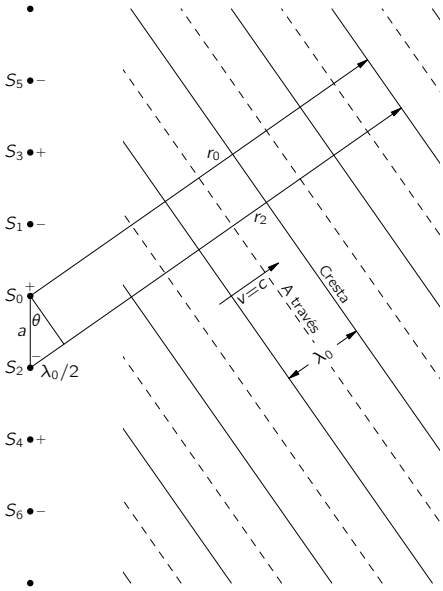


Figura 24-16. Un conjunto coherente de ondas para un arreglo de fuentes de línea.

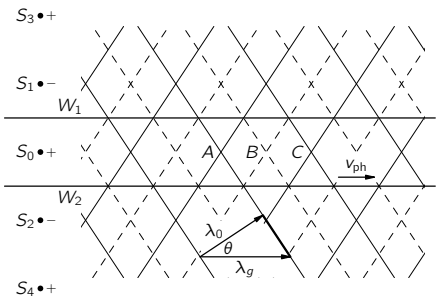


Figura 24-17. El campo de la guía de onda puede ser visto como la superposición de dos trenes de ondas planas.

Aquí la intensidad media de fuente es cero porque el signo alterna de una fuente a otra. Cualquier campo que exista debe caer exponencialmente con la distancia. Cerca de la fuente, vemos principalmente el campo de la fuente más cercana; a grandes distancias contribuyen muchas fuentes y su efecto medio es cero. Así pues, vemos ahora por qué la guía de onda por debajo de la frecuencia de corte da un campo exponencialmente decreciente. En particular, a bajas frecuencias la aproximación estática es buena y predice una atenuación rápida de los campos con la distancia.

Y ahora nos enfrentamos con la pregunta opuesta: ¿por qué se propagan las ondas? ¡Ésa es la parte misteriosa! La razón es que a frecuencias altas el retardo de los campos puede introducir desfases adicionales que pueden hacer que los campos de las fuentes desfasadas se sumen en vez de anularse. De hecho, en el capítulo 29 del volumen I ya hemos estudiado, precisamente para este problema, los campos generados por una disposición de antenas o por una red de difracción óptica. Encontramos allí que cuando se disponen varias antenas de radio en forma apropiada, pueden dar un diagrama de interferencia que tiene una señal fuerte en cierta dirección pero ninguna señal en otra.

Supongan que volvemos a la figura 24-15 y consideramos los campos que llegan a una gran distancia del sistema de fuentes imagen. Los campos serán intensos únicamente en ciertas direcciones que dependen de la frecuencia —sólo en las direcciones para las cuales los campos de todas las fuentes se suman en fase—. A una distancia razonable de las fuentes, el campo se propaga en estas direcciones especiales como ondas planas. Hemos hecho un dibujo esquemático de esa onda en la figura 24-16, cuyas líneas continuas representan las crestas de onda y las líneas discontinuas representan los valles. La dirección de la onda será aquella para la cual la diferencia de retardo para dos fuentes vecinas a la cresta de una onda corresponde a medio periodo de oscilación. Es decir, la diferencia entre r_2 y r_0 en la figura es la mitad de la longitud de onda en el espacio libre:

$$r_2 - r_0 = \frac{\lambda_0}{2}.$$

El ángulo θ está dado por

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda_0}{2a}. \tag{24.33}$$

Hay, naturalmente, otro conjunto de ondas que viajan hacia abajo con un ángulo simétrico respecto al sistema de fuentes. El campo completo en la guía de onda (no demasiado cerca de la fuente) es la superposición de estos dos conjuntos de ondas, como muestra la figura 24-17. Por supuesto, los verdaderos campos son realmente así sólo entre las dos paredes de la guía.

En puntos como A y C, las crestas de los dos diagramas de ondas coinciden y el campo tendrá un máximo; en puntos como B, ambas ondas tienen su valor negativo pico y el campo tiene su valor mínimo (más negativo). A medida que transcurre el tiempo, el campo de la guía parece estar viajando a lo largo de la guía con una longitud de onda λ_g que es la distancia entre A y C. Esa distancia está relacionada con θ por medio de

$$\cos\theta = \frac{\lambda_0}{\lambda_g}. \tag{24.34}$$

Usando la ecuación (24.33) para θ, obtenemos

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\cos\theta} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1-(\lambda_0/2a)^2}}, \tag{24.35}$$

que es precisamente lo que encontramos en la ecuación (24.19).

Ahora nos damos cuenta por qué hay sólo propagación de ondas por encima de la frecuencia de corte ω_0. Si la longitud de onda en el espacio libre es mayor que $2a$, no hay ningún ángulo al cual puedan aparecer las ondas mostradas en la figura 24-16. La interferencia constructiva necesaria aparece de repente cuando λ_0 cae por debajo de $2a$, o cuando ω va por encima de $\omega_0 = \pi c/a$.

Si la frecuencia es suficientemente alta, puede haber dos o más direcciones posibles en las que las ondas aparecerán. En nuestro caso, esto ocurrirá si $\lambda_0 < \frac{2}{3}a$. Sin embargo, en general, también podría ocurrir cuando $\lambda_0 < a$. Estas ondas adicionales corresponden a los modos superiores de la guía que hemos mencionado.

Nuestro análisis además ha evidenciado por qué la velocidad de fase de las ondas guiadas es mayor que c y por qué esta velocidad depende de ω. A medida que ω varía, el ángulo de las ondas libres de la figura 24-16 varía y, por lo tanto, también la velocidad según la guía.

Aunque hemos descrito la onda guiada como superposición de los campos de un sistema infinito de línea de fuentes, podrán ver que llegaríamos al mismo resultado si imagináramos dos conjuntos de ondas en el espacio libre que se estuvieran reflejando continuamente entre los dos espejos perfectos —recordando que una reflexión significa una inversión de fase—. Estos conjuntos de ondas reflejadas se anularían entre sí a no ser que estuvieran yendo justo al ángulo θ dado por la ecuación (24.33). Hay muchas maneras de examinar la misma cuestión.

25

La electrodinámica en notación relativista

25-1 Vectores de cuatro dimensiones
25-2 El producto escalar
25-3 El gradiente en cuatro dimensiones
25-4 La electrodinámica en notación cuatridimensional
25-5 El cuadripotencial de una carga en movimiento
25-6 Invariancia de las ecuaciones de la electrodinámica

25-1 Vectores de cuatro dimensiones

Discutiremos ahora la aplicación de la teoría especial de la relatividad a la electrodinámica. Luego, como ya hemos estudiado la teoría especial de la relatividad en los capítulos 15, 16 y 17 del volumen I, haremos una revisión breve de los conceptos básicos.

Se encuentra experimentalmente que las leyes de la física quedan invariantes si nos movemos con velocidad uniforme. No pueden asegurar si se encuentran en una nave espacial que se mueve con velocidad uniforme según una línea recta, a menos que observen hacia afuera de la nave espacial o que realicen algún experimento teniendo en cuenta el mundo exterior. Cualquier ley verdadera de la física debe tener en cuenta este hecho natural cuando la elaboremos.

La relación entre el espacio y el tiempo de dos sistemas de coordenadas, S' en movimiento uniforme en la dirección x con velocidad v y relativa a otro sistema S, está dada por la *transformación de Lorentz*:

$$\begin{aligned} t' &= \frac{t - vx}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad y' = y, \\ x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad z' = z. \end{aligned} \tag{25.1}$$

En este capítulo: $c = 1$

Las leyes de la física deben ser tales que, después de aplicarles la transformación de Lorentz, la nueva forma que adopten debe ser igual a la de antes de la transformación. Esto es similar al principio de que las leyes de la física no dependen de la *orientación* de nuestro sistema de coordenadas. Como vimos en el capítulo 11 del volumen I, la forma de describir matemáticamente la invariancia de la física respecto a las rotaciones consistía en escribir nuestras ecuaciones en términos de *vectores*.

Revisar:
Volumen I, capítulo 15, *Teoría especial de la relatividad*
Volumen I, capítulo 16, *Energía relativista y momentum*
Volumen I, capítulo 17, *Espacio-tiempo*
Volumen II, capítulo 13, *Magnetostática*

Por ejemplo, si tenemos dos vectores

$$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z) \qquad \text{y} \qquad \boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z),$$

encontramos que la combinación

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

no cambiaba si realizábamos una rotación del sistema de coordenadas. Ahora bien, sabemos que siempre que tenemos un producto escalar como $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ en ambos miembros de una ecuación, la ecuación presentará exactamente la misma forma en cada uno de los sistemas de coordenadas rotados. Además descubrimos un operador (véase el capítulo 2),

$$\boldsymbol{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

el cual, cuando se aplica a una función escalar, da tres cantidades que se transforman precisamente como un vector. Con este operador definimos el gradiente y en combinación con otros vectores, la divergencia y el laplaciano. Para terminar, descubrimos que tomando la suma de ciertos productos de pares de componentes de dos vectores podíamos obtener tres cantidades nuevas, que se comportaban como un nuevo vector. La llamamos *producto cruz* de dos vectores. Utilizando el producto cruz con nuestro operador $\boldsymbol{\nabla}$ definimos el rotacional de un vector.

Tabla 25-1

Cantidades y operaciones importantes del análisis vectorial en tres dimensiones

Definición de vector	$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$
Producto escalar	$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$
Operador diferencial vectorial	$\boldsymbol{\nabla}$
Gradiente	$\boldsymbol{\nabla}\phi$
Divergencia	$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}$
Laplaciano	$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \nabla^2$
Producto cruz	$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$
Rotacional	$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}$

Como hemos de referirnos a lo hecho en el análisis vectorial, resumimos en la tabla 25-1 todas las operaciones importantes con vectores en tres dimensiones que hemos utilizado anteriormente. La cuestión es que debe ser posible escribir las ecuaciones de la física de tal manera que ambos miembros se transformen del mismo modo frente a rotaciones. Si un miembro es un vector, el otro también debe serlo, y ambos miembros deben cambiar conjuntamente del mismo modo si rotamos nuestro sistema de coordenadas. Igualmente, si un miembro es un escalar, el otro también debe ser un escalar, y ninguno cambia cuando rotamos las coordenadas, y así sucesivamente.

Ahora bien, en el caso de la relatividad especial, tiempo y espacio están íntimamente mezclados y debemos hacer algo análogo para dimensión cuatro. Es de esperar que nuestras ecuaciones sean las mismas no sólo frente a rotaciones sino también para *cualquier* sistema inercial. Esto significa que nuestras ecuaciones deben permanecer invariantes frente a la transformación de Lorentz (25.1). El propósito de este capítulo es mostrarles cómo se realiza. Antes de comenzar, sin embargo, simplificaremos un poco para que nuestro trabajo resulte más fácil (y para evitar cierta confusión). Tomaremos, pues, nuestras unidades de longitud y tiempo de modo que la velocidad de la luz c resulte igual a 1. Pueden considerar que estamos tomando como unidad de tiempo *el tiempo que emplea la luz en recorrer un metro* (que es alrededor de 3×10^{-9} s). Podemos llamar a esta unidad de tiempo "un metro". Usando esta unidad, todas nuestras ecuaciones presentan una simetría en el espacio-tiempo mucho más clara. Además, todas las c desaparecerán de nuestras ecuaciones relativistas. (Si esto les molesta, pueden siempre volver a introducir c en cualquier ecuación simplemente remplazando todo t por ct, o, en general, poniendo c donde sea necesario para que las dimensiones de las ecuaciones estén bien.) Con estos preliminares, estamos listos para comenzar. Nuestro programa es realizar en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones todo aquello que realizamos con los vectores en tres dimensiones. Es realmente un juego muy simple; procedemos simplemente por analogía. La única complicación real es la notación (ya hemos agotado el simbolismo vectorial para el caso de tres dimensiones) y un pequeño giro en los signos.

Primero, por analogía con los vectores en tres dimensiones, definimos un *vector de dimensión cuatro* como un sistema de cuatro cantidades a_t, a_x, a_y y a_z que se transforman como t, x, y y z cuando se pasa a un sistema de coordenadas en movimiento. Como existen muchas notaciones diferentes que la gente usa para los vectores de dimensión cuatro, nosotros escribiremos a_μ, con lo cual queremos significar que se trata de un grupo de cuatro números (a_t, a_x, a_y, a_z) —es decir, el subíndice μ puede tomar los cuatro "valores" t, x, y, z—. A veces será también conveniente indicar las tres componentes espaciales por un vector de tres dimensiones, así: $a_\mu = (a_t, \boldsymbol{a})$.

Hemos ya encontrado un vector de dimensión cuatro, el formado por la energía y el momentum de una partícula (capítulo 17, volumen I). En nuestra nueva notación escribimos

$$p_\mu = (E, \boldsymbol{p}), \tag{25.2}$$

que significa que el vector de dimensión cuatro p_μ se construye a partir de E, que es la energía, y de las tres componentes del vector de dimensión tres $\boldsymbol{p}$ de una partícula.

Parece que el juego es realmente muy simple —por cada vector de dimensión tres en física—, todo lo que tenemos que hacer es tratar de encontrar cuál es la componente que falta, y obtener un vector de dimensión cuatro. Para ver que no es precisamente así, consideremos el vector velocidad con las componentes

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt}.$$

El problema es: ¿cuál es la componente temporal? El instinto debe dar la respuesta correcta. Puesto que los vectores de dimensión cuatro son como t, x, y, z es de esperar que la componente temporal sea

$$v_t = \frac{dt}{dt} = 1.$$

Esto es erróneo. La razón es que t en cada denominador no es un invariante cuando efectuamos la transformación de Lorentz. Ya que los numeradores tienen un comportamiento correcto para construir un vector de dimensión cuatro, pero dt en el denominador arruina las cosas, no es simétrico y no es el mismo en dos sistemas diferentes.

Resulta que las cuatro componentes de la "velocidad" que hemos escrito, se transforman en las componentes de un vector de dimensión cuatro si simplemente las dividimos entre $\sqrt{1-v^2}$. Podemos ver que esto es cierto porque si partimos del vector de dimensión cuatro momentum

$$p_\mu = (E, \boldsymbol{p}) = \left(\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right), \tag{25.3}$$

y lo dividimos por la masa en reposo m_0, que es un escalar invariante en cuatro dimensiones tenemos

$$\frac{p_\mu}{m_0} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right), \tag{25.4}$$

que debe ser un vector de dimensión cuatro. (Al dividir por un escalar *invariante* no cambian las propiedades de transformación.) Así pues, podemos *definir* el *vector de dimensión cuatro velocidad* u_μ como

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad u_y = \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2}}, \\ u_x &= \frac{v_x}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad u_z = \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2}}, \end{aligned} \tag{25.5}$$

La velocidad de dimensión cuatro es una cantidad muy útil; por ejemplo, podemos escribir

$$p_\mu = m_0 u_\mu. \tag{25.6}$$

Ésta es la clase típica de forma que debe tener una ecuación para ser relativistamente correcta; cada miembro es un vector de dimensión cuatro. (El primer miembro es un invariante por un vector de dimensión cuatro, lo cual también es un vector de dimensión cuatro.)

25-2 El producto escalar

Es un accidente de la vida, si así lo prefieren, el hecho de que bajo rotación de las coordenadas la distancia de un punto al origen no cambia. Esto significa matemáticamente que $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ es un invariante. En otras palabras, después de una rotación $r'^2 = r^2$, o

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Ahora el problema es: ¿hay una cantidad similar que sea invariante frente a la transformación de Lorentz? Sí, existe. A partir de la ecuación (25.1) pueden ver lo siguiente:

$$t'^2 - x'^2 = t^2 - x^2.$$

Esto es bueno, excepto que depende de una forma particular de la dirección x. Podemos ajustarlo restándole y^2 y z^2. De modo que, para toda transformación de Lorentz *más* una rotación debe dejar invariable esta cantidad. Así pues, la cantidad que es análoga a r^2 en tres dimensiones es ahora para cuatro dimensiones

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Es un invariante frente a lo que se llama "el grupo completo de Lorentz" —que significa transformaciones que competen a traslaciones con velocidad constante y rotaciones—.

Ahora bien, como esta invariancia es un asunto algebraico que depende solamente de las reglas de transformación de la ecuación (25.1) —más rotaciones—

es válida para cualquier vector de dimensión cuatro (por definición todos se transforman igual). Así pues, para un vector de dimensión cuatro a_μ tenemos que

$$a'^2_t - a'^2_x - a'^2_y - a'^2_z = a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2.$$

Podemos llamar a esta cantidad el cuadrado de "la longitud" del vector de dimensión cuatro a_μ. (A veces la gente cambia el signo de todos los términos y llama longitud a $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - a_t^2$, por lo cual deben prestar atención.)

Ahora bien, si tenemos *dos* vectores a_μ y b_μ, sus componentes correspondientes se transforman del mismo modo, entonces la combinación

$$a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z$$

también es una cantidad invariante (escalar). (En realidad ya hemos demostrado esto en el capítulo 17 del volumen I.) Claramente esta expresión es completamente análoga al producto escalar de vectores. De hecho, podemos llamarla *producto punto* o *producto escalar* de dos vectores de cuatro dimensiones. Sería lógico escribirlo como $a_\mu \cdot b_\mu$ que presenta el aspecto del producto escalar. Pero desafortunadamente, no se hace así; por lo común, se lo escribe sin el punto. De convención escribiremos el producto escalar simplemente como $a_\mu b_\mu$. Entonces, *por definición*,

$$a_\mu b_\mu = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z. \tag{25.7}$$

Siempre que vean dos índices iguales juntos (ocasionalmente deberemos usar ν o alguna otra letra en vez de μ) significa que tienen que tomar los cuatro productos y sumar, *recordando el signo menos* para los productos de las componentes espaciales. Con este acuerdo la invariancia del producto escalar frente a una transformación de Lorentz se puede escribir en la forma

$$a'_\mu b'_\mu = a_\mu b_\mu.$$

Como los últimos tres términos de (25.7) son precisamente el producto escalar en tres dimensiones, es más conveniente escribir

$$a_\mu b_\mu = a_t b_t - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}.$$

También es evidente que la longitud cuadridimensional que describimos antes se puede escribir como $a_\mu a_\mu$:

$$a_\mu a_\mu = a_t^2 - a_x^2 - a_y^2 - a_z^2 = a_t^2 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}. \tag{25.8}$$

A veces también es conveniente escribir esta cantidad como a_μ^2:

$$a_\mu^2 \equiv a_\mu a_\mu.$$

Ilustraremos ahora la utilidad de los productos escalares de un vector de cuatro dimensiones. Los antiprotones ($\overline{\mathrm{P}}$) se producen en los grandes aceleradores por medio de la reacción

$$\mathrm{P} + \mathrm{P} \to \mathrm{P} + \mathrm{P} + \mathrm{P} + \overline{\mathrm{P}}.$$

Dicho de otro modo, un protón de alta energía choca con un protón en reposo (por ejemplo, en un banco de hidrógeno ubicado en el haz) y siempre que el protón incidente mantenga la energía suficiente se puede ocasionar un par protón-antiprotón además de los dos protones originales.* El problema es: ¿cuánta energía se debe suministrar al protón incidente para que la reacción sea energéticamente posible?

---

* Bien puede que se pregunten: ¿por qué no consideramos la reacción

$$\mathrm{P} + \mathrm{P} \to \mathrm{P} + \mathrm{P} + \overline{\mathrm{P}},$$

o también

$$\mathrm{P} + \mathrm{P} \to \mathrm{P} + \overline{\mathrm{P}}$$

que evidentemente requieren menos energía? La respuesta es: un principio llamado de *conservación de los bariones* nos dice que "el número de protones menos el número de antiprotones" no puede cambiar. Esta cantidad es 2 en el primer miembro de nuestra reacción. En consecuencia, si queremos un antiprotón en el segundo miembro, debemos tener también *tres* protones (u otros bariones).

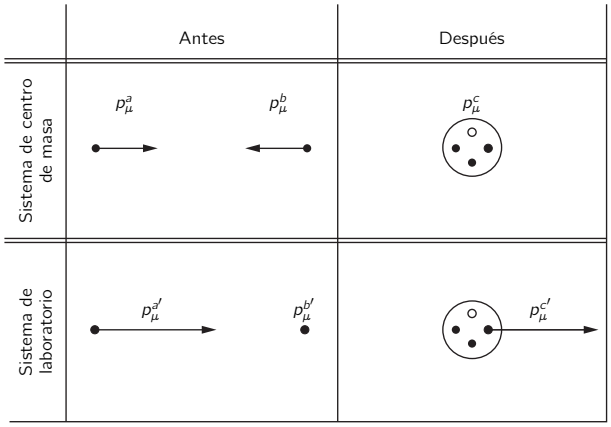


Figura 25-1. La reacción $\mathrm{P} + \mathrm{P} \to 3\mathrm{P} + \overline{\mathrm{P}}$ vista en los sistemas de laboratorio y de CM. Se supone que el protón incidente tiene justamente la energía suficiente para producir la reacción. Los protones están indicados como círculos llenos y los antiprotones por círculos vacíos.

La manera más fácil de obtener la respuesta es considerar que la reacción se realiza en el sistema de centro de masa (CM) (véase figura 25-1). Llamaremos a al protón incidente y p_μ^a a su momentum de dimensión cuatro. Análogamente, llamaremos b al protón del blanco y p_μ^b a su vector de dimensión cuatro momentum. Si el protón incidente tiene *justo apenas* la energía suficiente para producir la reacción, el estado final —el estado después de la colisión— consistirá en una burbuja que contiene tres protones y un antiprotón en reposo en el sistema CM. Si la energía incidente fuera ligeramente superior, las partículas del estado final deberían tener alguna energía cinética y se apartarían; si la energía incidente fuera ligeramente menor no habría suficiente energía para producir las cuatro partículas.

Si llamamos p_μ^c al momentum de dimensión cuatro total de toda la burbuja en el estado final, la conservación de energía y momentum nos dice que

$$\boldsymbol{p}^a + \boldsymbol{p}^b = \boldsymbol{p}^c,$$

y

$$E^a + E^b = E^c.$$

Combinando estas dos ecuaciones, podemos escribir

$$p_\mu^a + p_\mu^b = p_\mu^c. \tag{25.9}$$

Ahora bien, lo importante es que ésta es una ecuación entre vectores de dimensión cuatro y, por supuesto, correcta en cualquier sistema inercial. Podemos utilizar este hecho para simplificar nuestros cálculos. Comencemos por obtener la "longitud" de cada miembro de la ecuación (25.9); por supuesto, son iguales. Obtenemos

$$(p_\mu^a + p_\mu^b)(p_\mu^a + p_\mu^b) = p_\mu^c p_\mu^c. \tag{25.10}$$

Como $p_\mu^c p_\mu^c$ es invariante, podemos calcularlo en cualquier sistema de coordenadas. En el sistema CM, la componente temporal de p_μ^c es la energía en reposo de los cuatro protones, o sea, $4M$, y la parte espacial $\boldsymbol{p}$ es cero; entonces $p_\mu^c = (4M, \boldsymbol{0})$. Hemos utilizado el hecho de que la masa en reposo de un antiprotón es igual a la masa en reposo de un protón, y hemos llamado M a esta masa común.

Así, la ecuación (25.10) se transforma en

$$p_\mu^a p_\mu^a + 2p_\mu^a p_\mu^b + p_\mu^b p_\mu^b = 16M^2. \tag{25.11}$$

Ahora bien, $p_\mu^a p_\mu^a$ y $p_\mu^b p_\mu^b$ son muy fáciles, puesto que la "longitud" del vector de dimensión cuatro momentum de cualquier partícula es de manera precisa la masa de la partícula al cuadrado:

$$p_\mu p_\mu = E^2 - \boldsymbol{p}^2 = M^2.$$

Esto se puede demostrar por cálculo directo o más inteligentemente, observando que para una partícula *en reposo* $p_\mu = (M, \boldsymbol{0})$ así que $p_\mu p_\mu = M^2$. Pero como es un invariante, es igual a M^2 en *cualquier* sistema. Utilizando este resultado en la ecuación (25.11) tenemos

$$2p^a_\mu p^b_\mu = 14M^2$$

o sea

$$p^a_\mu p^b_\mu = 7M^2. \tag{25.12}$$

Ahora podemos calcular además $p^a_\mu p^b_\mu = p^{a'}_\mu p^{b'}_\mu$ en el sistema de laboratorio. El vector de dimensión cuatro $p^{a'}_\mu$ se puede escribir $(E^{a'}, \boldsymbol{p}^{a'})$, mientras que $p^{b'}_\mu = (M, \boldsymbol{0})$, puesto que describe un protón en reposo. Así pues, $p^{a'}_\mu p^{b'}_\mu$ debe ser igual a $ME^{a'}$, y como sabemos que el producto escalar es un invariante, tiene que ser numéricamente igual a lo que encontramos en (25.12). Tenemos, pues, que

$$E^{a'} = 7M,$$

el resultado que buscábamos. La energía *total* del protón inicial debe ser por lo menos $7M$ (alrededor de 6.6 GeV ya que $M = 938$ MeV) o restándole la masa en reposo M, la energía *cinética* debe ser al menos $6M$ (aproximadamente 5.6 GeV). El acelerador Bevatron de Berkeley fue diseñado para proporcionar alrededor de 6.2 GeV de energía cinética a los protones que acelera, a fin de hacer posible la producción de antiprotones.

Como los productos escalares son invariantes, son siempre interesantes de calcular. ¿Qué podemos decir acerca de la "longitud" de la velocidad de cuatro dimensiones $u_\mu u_\mu$?

$$u_\mu u_\mu = u_t^2 - \boldsymbol{u}^2 = \frac{1}{1-v^2} - \frac{v^2}{1-v^2} = 1.$$

Por lo tanto, u_μ es el *vector unitario de dimensión cuatro.*

25-3 El gradiente en cuatro dimensiones

Lo que vamos a discutir a continuación es el análogo de dimensión cuatro del gradiente. Ahora, recordemos (capítulo 14, volumen I) que los tres operadores diferenciales $\partial/\partial x$, $\partial/\partial y$, $\partial/\partial z$ se transforman como un vector de dimensión tres y son llamados gradiente. El mismo esquema debe funcionar en cuatro dimensiones; es decir, podemos esperar que el gradiente en cuatro dimensiones sea $(\partial/\partial t, \partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$. *Esto es incorrecto.*

Para ver el error consideraremos una función escalar ϕ que dependa solamente de x y t. La variación de ϕ, si producimos una pequeña variación Δt manteniendo x constante, es

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial t}\,\Delta t. \tag{25.13}$$

Por otra parte, para un observador en movimiento

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x'}\,\Delta x' + \frac{\partial\phi}{\partial t'}\,\Delta t'.$$

Podemos expresar $\Delta x'$ y $\Delta t'$ en términos de Δt utilizando la ecuación (25.1). Recordando que hemos tomado x constante, por lo que $\Delta x = 0$, escribimos

$$\Delta x' = -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\,\Delta t; \qquad \Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x'}\left(-\frac{v}{\sqrt{1-v^2}}\,\Delta t\right) + \frac{\partial\phi}{\partial t'}\left(\frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}\right)\\ &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial t'} - v\,\frac{\partial\phi}{\partial x'}\right)\frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2}}.\end{aligned}$$

Comparando este resultado con la ecuación (25.13) encontramos que

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t'} - v\,\frac{\partial\phi}{\partial x'}\right). \tag{25.14}$$

Un cálculo similar nos da

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x'} - v\,\frac{\partial\phi}{\partial t'}\right). \tag{25.15}$$

Podemos ver ahora que el gradiente es muy extraño. Las fórmulas para x y t en términos de x' y t' [obtenidas resolviendo la ecuación (25.1)] son:

$$t = \frac{t' + vx'}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Ésta es la forma en que *se debe* transformar un vector de dimensión cuatro. Pero las ecuaciones (25.14) y (25.15) ¡tienen un par de signos equivocados!

La respuesta es: en vez de la expresión *incorrecta* $(\partial/\partial t, \boldsymbol{\nabla})$ debemos *definir* el operador *gradiente de dimensión cuatro*, al que llamaremos ∇_μ, como

$$\nabla_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\boldsymbol{\nabla}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{25.16}$$

Con esta definición la dificultad de signos que encontramos queda eliminada y ∇_μ se comporta como un verdadero vector de dimensión cuatro. (Es bastante incómodo tener esos signos menos, pero el universo está hecho así.) Por supuesto que el significado de decir que ∇_μ "se comporta como un vector de dimensión cuatro" es simplemente que el gradiente de dimensión cuatro de un escalar es un vector de dimensión cuatro. Si ϕ es un verdadero campo escalar invariante (respecto a la transformación de Lorentz) entonces $\nabla_\mu\phi$ es un campo de dimensión cuatro.

Muy bien, ahora que tenemos vectores, gradientes y productos escalares, lo siguiente es ver si existe un invariante que sea análogo a la divergencia del análisis vectorial tridimensional. Claramente, la analogía sugiere formar la expresión $\nabla_\mu b_\mu$ donde b_μ es un campo de dimensión cuatro cuyas componentes son funciones del espacio y del tiempo. *Definimos* la *divergencia* del vector de dimensión cuatro $b_\mu = (b_t, \boldsymbol{b})$ como el producto escalar de ∇_μ y b_μ:

$$\begin{aligned}\nabla_\mu b_\mu &= \frac{\partial}{\partial t}\,b_t - \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)b_x - \left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)b_y - \left(-\frac{\partial}{\partial z}\right)b_z \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\,b_t + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b},\end{aligned} \tag{25.17}$$

donde $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{b}$ es la divergencia tridimensional ordinaria del vector de dimensión tres $\boldsymbol{b}$. Nótese que hay que tener cuidado con los signos. Además, algunos de los signos menos provienen de la definición del producto escalar [véase ecuación (25.7)]; los otros se necesitan porque las componentes espaciales de ∇_μ son $-\partial/\partial x$, etc., como en la ecuación (25.16). La divergencia definida como en (25.17) es un invariante y da el mismo resultado en todos los sistemas de coordenadas que difieren en una transformación de Lorentz.

Examinemos un ejemplo físico en el cual aparece la divergencia de dimensión cuatro. Lo usaremos para resolver el problema de los campos en torno de un alambre en movimiento. Vimos ya (sección 13-7) que la densidad de carga eléctrica ρ y la densidad de corriente $\boldsymbol{j}$ forman el cuadrivector $j_\mu = (\rho, \boldsymbol{j})$. Siempre y cuando un alambre descargado transporte la corriente j_x, en un sistema de referencia que se mueve con él con velocidad v (según x) el alambre tendrá la siguiente carga y densidad de corriente [obtenidas de la transformación de Lorentz, ecuación (25.1)]:

$$\rho' = \frac{-vj_x}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad j'_x = \frac{j_x}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Esto es precisamente lo que encontramos en el capítulo 13. Podemos entonces utilizar estas fuentes en las ecuaciones de Maxwell en *el sistema en movimiento* para encontrar los campos.

La ley de conservación de la carga, sección 13-2, toma una forma simple en la notación de vectores de dimensión cuatro. Consideremos la divergencia de dimensión cuatro de j_μ:

$$\nabla_\mu j_\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j}. \tag{25.18}$$

Esta ley de conservación de la carga dice que el flujo saliente de corriente por unidad de volumen es igual y opuesto al aumento por unidad de tiempo de la densidad de carga. En otras palabras, que

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Introduciendo esto en la ecuación (25.18), la ley de conservación de la carga adopta la forma simple

$$\nabla_\mu j_\mu = 0. \tag{25.19}$$

Como $\nabla_\mu j_\mu$ es un escalar invariante, si es cero en un sistema será cero en todos los otros. Tenemos el resultado de que si se conserva la carga en un sistema de coordenadas, entonces se conservará en todos los sistemas de coordenadas que se muevan con velocidad uniforme.

Como último ejemplo consideraremos el producto escalar del operador gradiente ∇_μ con él mismo. En tres dimensiones un producto de este tipo nos da el laplaciano

$$\nabla^2 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

¿Qué se obtiene en cuatro dimensiones? Muy fácil. Siguiendo nuestras reglas para el producto escalar y el gradiente, tenemos

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \nabla_\mu &= \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t} - \left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right) - \left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right) - \left(-\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2.\end{aligned}$$

Tabla 25-2

Cantidades importantes del análisis vectorial en tres y cuatro dimensiones.

	Tres dimensiones	Cuatro dimensiones
Vector	$\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$	$a_\mu = (a_t, a_x, a_y, a_z) = (a_t, \boldsymbol{a})$
Producto escalar	$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$	$a_\mu b_\mu = a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z = a_t b_t - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$
Operador vectorial	$\boldsymbol{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$	$\nabla_\mu = (\partial/\partial t, -\partial/\partial x, -\partial/\partial y, -\partial/\partial z) = (\partial/\partial t, -\boldsymbol{\nabla})$
Gradiente	$\boldsymbol{\nabla}\psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z}\right)$	$\nabla_\mu \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}, -\boldsymbol{\nabla}\varphi\right)$
Divergencia	$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\nabla_\mu a_\mu = \frac{\partial a_t}{\partial t} + \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial a_t}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{a}$
Laplaciano y D'Alembertiano	$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2$	$\nabla_\mu \nabla_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \Box^2$

Este operador, que es el análogo del laplaciano en tres dimensiones se llama *D'Alembertiano* y tiene una notación especial:

$$\Box^2 = \nabla_\mu \nabla_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \tag{25.20}$$

Por su definición es un operador escalar invariante, siempre que se opera sobre un campo de dimensión cuatro, produce un nuevo campo de dimensión cuatro. (Algunos definen al d'Alembertiano con el signo opuesto al de la ecuación (25.20) de manera que deben tener cuidado cuando lean en la bibliografía.)

Hemos encontrado entonces los equivalentes de dimensión cuatro de la mayoría de las cantidades tridimensionales que teníamos en la tabla 25-1. (No tenemos el equivalente del producto cruz y de la operación rotacional; los obtendremos en el próximo capítulo.) Con el fin de que recuerden mejor todas estas cuestiones hemos resumido y reunido todas las definiciones y resultados importantes en la tabla 25-2.

25-4 La electrodinámica en notación cuatridimensional

Ya hemos encontrado el operador D'Alembertiano, sin darle este nombre, en la sección 18-6; las ecuaciones diferenciales que hallamos allí para el potencial pueden ser escritas con la nueva notación en la forma

$$\Box^2 \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \qquad \Box^2 \boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0}. \tag{25.21}$$

Las cuatro cantidades del segundo miembro de las dos ecuaciones (25.21) son ρ, j_x, j_y, j_z divididos entre ϵ_0, que es una constante universal y es la misma en todos los sistemas de coordenadas si se utiliza en todos ellos la misma unidad de carga. Entonces las cuatro cantidades ρ/ϵ_0, j_x/ϵ_0, j_y/ϵ_0, j_z/ϵ_0 se transforman como un vector de dimensión cuatro. Podemos escribirlas como j_μ/ϵ_0. El d'Alembertiano no cambia cuando el sistema de coordenadas cambia, por lo que las cantidades ϕ, A_x, A_y, A_z *también deben transformarse* como un vector de dimensión cuatro —lo que significa que *son* las componentes de un vector de dimensión cuatro—. Brevemente,

$$A_\mu = (\phi, \boldsymbol{A})$$

es un vector de dimensión cuatro. Lo que llamamos potenciales escalar y vectorial son en realidad diferentes aspectos del mismo hecho físico. Están íntimamente ligados. Y si se los mantiene juntos, la invariancia relativista del universo resulta evidente. Llamaremos *potencial de dimensión cuatro* a A_μ.

En la notación de vectores de dimensión cuatro las ecuaciones (25.21) quedan simplemente

$$\Box^2 A_\mu = \frac{j_\mu}{\epsilon_0}, \tag{25.22}$$

El contenido físico de esta ecuación es precisamente el mismo que el de las ecuaciones de Maxwell. Pero hay un cierto agrado en poderlas rescribir en forma tan elegante. Dicha forma es además muy significativa; nos muestra directamente la invariancia de la electrodinámica frente a la transformación de Lorentz.

Recuerden que las ecuaciones (25.21) se pueden deducir de las ecuaciones de Maxwell solamente imponiendo la condición de norma

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} = 0, \tag{25.23}$$

que sólo indica que $\nabla_\mu A_\mu = 0$; la condición de norma dice que la divergencia del vector de dimensión cuatro A_μ es cero. Esta condición se llama *condición de Lorenz.** Es muy conveniente porque es una condición invariante y, en consecuencia, las ecuaciones de Maxwell conservan la forma de la ecuación (25.22) para todos los sistemas de referencia.

* N. del T.: en nombre del danés Ludvig Lorenz, no confundir con el holandés Hendrik Lorentz, a cuya transformación nos hemos referido.

25-5 El cuadripotencial de una carga en movimiento

Aunque está implícito en lo que ya hemos dicho, lo haremos explícito escribiendo las leyes de transformación que dan ϕ y $\boldsymbol{A}$ en un sistema en movimiento en términos de ϕ y $\boldsymbol{A}$ en un sistema en reposo. Como $A_\mu = (\phi, \boldsymbol{A})$ es un vector de dimensión cuatro, las ecuaciones deben ser del tipo de las ecuaciones (25.21), excepto que t se remplaza por ϕ y x por $\boldsymbol{A}$. Entonces

$$\begin{aligned} \phi' &= \frac{\phi - vA_x}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad A'_y = A_y, \\ A'_x &= \frac{A_x - v\phi}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad A'_z = A_z. \end{aligned} \tag{25.24}$$

Esto presupone que el sistema de coordenadas con primas se mueve con velocidad v y en la dirección positiva del eje x, respecto al sistema de coordenadas sin ninguna prima.

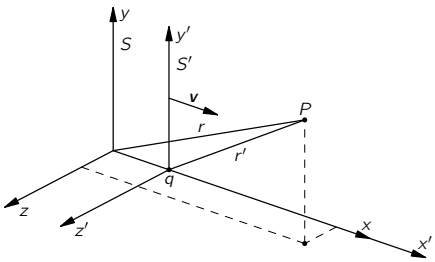


Figura 25-2. El sistema S' se mueve con velocidad $\boldsymbol{v}$ (en la dirección x) respecto a S. Una carga en reposo en el origen de S' está en $x = vt$ en el sistema S. Los potenciales en P se pueden calcular en cualquiera de los dos sistemas.

Consideremos un ejemplo de la utilidad del concepto de potencial de dimensión cuatro. ¿Cuáles son los potenciales vectorial y escalar de una carga q que se mueve con velocidad v según el eje x? El problema es sencillo en un sistema de coordenadas que se mueva con la carga, ya que en este sistema la carga está quieta. Supongan que la carga se encuentra en el origen del sistema S' como se muestra en la figura 25-2. El potencial escalar en el sistema en movimiento está dado entonces por

$$\phi' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r'}, \tag{25.25}$$

donde r' es la distancia de q al punto donde se calcula el campo, medida desde el sistema en movimiento. Por supuesto, el potencial vectorial $\boldsymbol{A'}$ es cero.

Ahora hallamos directamente ϕ y $\boldsymbol{A}$, los potenciales medidos en el sistema de coordenadas en reposo. Las relaciones inversas a las de las ecuaciones (25.24) son

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\phi' + vA'_x}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad A_y = A'_y, \\ A_x &= \frac{A'_x + v\phi'}{\sqrt{1-v^2}}, \qquad A_z = A'_z. \end{aligned} \tag{25.26}$$

Utilizando ϕ' dado por la ecuación (25.25), y $\boldsymbol{A'} = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{r'\sqrt{1-v^2}} \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}. \end{aligned}$$

Esto nos da el potencial escalar ϕ que podemos ver en S, pero desafortunadamente, dado en términos de las coordenadas de S'. Se puede expresar todo en términos de t, x, y, z remplazando t', x', y' y z' por medio de (25.1). Obtenemos así

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,\frac{1}{\sqrt{[(x-vt)/\sqrt{1-v^2}]^2 + y^2 + z^2}}. \tag{25.27}$$

Realizando el mismo proceso para las componentes de $\boldsymbol{A}$, se puede demostrar que

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{v}\phi. \tag{25.28}$$

Que son las mismas fórmulas que obtuvimos por el método diferencial en el capítulo 21.

25-6 Invariancia de las ecuaciones de la electrodinámica

Hemos encontrado que los potenciales ϕ y $\boldsymbol{A}$ considerados juntos constituyen un vector de dimensión cuatro que llamamos A_μ y que la ecuación de onda —la ecuación completa que determina A_μ en función j_μ— se puede escribir como en la ecuación (25.22). Esta ecuación junto con la de conservación de la carga —véase la ecuación (25.19)— nos da la ley fundamental del campo electromagnético:

$$\Box^2 A_\mu = \frac{1}{\epsilon_0}\, j_\mu, \qquad \nabla_\mu j_\mu = 0. \tag{25.29}$$

De este modo, en un pequeño espacio de la página tenemos todas las ecuaciones de Maxwell —hermosa y simple—. ¿Pero hemos aprendido algo al escribir las ecuaciones de esta manera, además de ser hermosas y simples? En primer lugar, ¿hay alguna diferencia respecto a su escritura anterior según sus diversas componentes? ¿Se puede deducir de estas ecuaciones algo que no se puede deducir de la ecuación de onda para los potenciales en función de cargas y corrientes? La respuesta es definitivamente no. Lo único que hemos hecho es cambiar el nombre a las cosas —utilizar una nueva notación—. Hemos escrito un cuadrado para representar las derivadas, pero el mismo no representa nada más ni nada menos que la segunda derivada respecto a t, menos la segunda derivada respecto a x, menos la segunda derivada respecto a y, menos la segunda derivada respecto a z. Y μ significa que tenemos cuatro ecuaciones, una por cada $\mu = t$, x, y, o z. ¿Cuál es entonces el significado del hecho que las ecuaciones puedan ser escritas en forma tan simple? Desde el punto de vista de deducir algo directamente, no significan nada. Quizá, la simplicidad de las ecuaciones significa que la naturaleza tiene también una cierta simplicidad.

Mostraremos algo interesante que hemos descubierto recientemente: *todas las leyes de la física pueden estar contenidas en una sola ecuación.* Esta ecuación es

$$\mathsf{U} = 0. \tag{25.30}$$

¡Qué ecuación tan simple! Por supuesto, es necesario saber qué significa el símbolo. U es una cantidad física que podemos llamar lo "no mundano" de la situación. Y tenemos una fórmula para ella. Así es como se calcula lo no mundano. Toman cualquiera de las leyes físicas que conocen y las escriben en una forma especial. Por ejemplo, supongamos que toman la ley de la mecánica $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ y la vuelven a escribir en la forma $\boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a} = 0$. Entonces pueden llamar a $(\boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a})$ —que naturalmente debe ser cero— el "desajuste" de la mecánica. Luego toman el *cuadrado* de esta desigualdad y la llaman U_1, que pueden llamar "lo no mundano de los efectos mecánicos". En otras palabras, toman

$$\mathsf{U}_1 = (\boldsymbol{F} - m\boldsymbol{a})^2. \tag{25.31}$$

Ahora escriben otra ley física, digamos $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$ y definen

$$\mathsf{U}_2 = \left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0}\right)^2,$$

que pueden llamar "lo no mundano de la electricidad gaussiana". Continúan así escribiendo U_3, U_4, etc. —una para cada ley física que exista—.

Finalmente llaman U a lo no mundano *total* del mundo que es la suma de U_i provenientes de todos los subfenómenos no mundanos que intervienen, es decir, $\mathsf{U} = \sum \mathsf{U}_i$. Entonces la gran "ley de la naturaleza" es

$$\boxed{\mathsf{U} = 0.} \tag{25.32}$$

Esta "ley" significa, por supuesto, que la suma de los cuadrados de cualquiera de los desajustes individuales es cero, y la única forma en que la suma de tantos cuadrados pueda ser cero es que cada uno de los términos sea cero.

Así la ley "hermosamente simple" de la ecuación (25.32) es equivalente a toda la serie de ecuaciones que han escrito originalmente. Es, por lo tanto, evidente

que una notación simple que no hace más que esconder la complejidad de las cosas, a través de una definición de los símbolos, no es realmente una simplificación. *Es sólo un truco.* La belleza que presenta la ecuación (25.32) —precisamente a partir del hecho de que varias ecuaciones se esconden dentro de ella— no es más que un truco. Cuando desarrollen esta ecuación, volverán al punto de partida.

No obstante, *hay* algo más en la simplicidad de las leyes del electromagnetismo escritas bajo la forma de la ecuación (25.29). Tienen un gran significado; y poseen una teoría escrita en forma vectorial que significa mucho más. El hecho de que se pueden escribir las ecuaciones electromagnéticas en una notación muy particular *que está concebida* para la geometría de dimensión cuatro de las transformaciones de Lorentz —en otras palabras, como ecuaciones vectoriales en un espacio de cuatro dimensiones— significa que la teoría es invariante frente a las transformaciones de Lorentz. El que se puedan escribir en forma tan hermosa se debe a que las ecuaciones de Maxwell son invariantes frente a estas transformaciones.

No es accidental que las ecuaciones de la electrodinámica se puedan escribir en la forma hermosamente elegante de la ecuación (25.29). La teoría de la relatividad fue desarrollada *debido a que se encontró experimentalmente* que los fenómenos predichos por las ecuaciones de Maxwell eran los mismos en cualquiera de los sistemas inerciales. Y fue precisamente estudiando las propiedades de transformación de las ecuaciones de Maxwell que Lorentz descubrió su transformación, la que mantenía invariantes a las ecuaciones.

No obstante, hay otra razón para escribir nuestras ecuaciones en esta forma. Se descubrió —después que Einstein intuyera que podía ser así— que *todas* las leyes de la física son invariantes frente a la transformación de Lorentz. Éste es el principio de relatividad. Sin embargo, si inventamos una notación que muestre inmediatamente cuándo una ley está escrita en forma invariante o no, es posible estar seguros al tratar de construir una nueva teoría, que sólo escribiremos ecuaciones que sean compatibles con el principio de relatividad.

El hecho de que las ecuaciones de Maxwell sean sencillas en esta notación particular no es un milagro, porque la notación fue inventada teniéndolas en cuenta. Pero el hecho físico interesante es que *toda ley* física —la propagación de las ondas mesónicas, o el comportamiento de los neutrinos en la desintegración beta, y así sucesivamente— deben tener esta misma invariancia frente a la misma transformación. En consecuencia, cuando se mueven con velocidad uniforme en una nave espacial, todas las leyes de la naturaleza se transforman de tal manera que no se presenta ningún fenómeno nuevo. Esto se debe a que el principio de relatividad es un hecho de la naturaleza, y es por ello que en la notación vectorial de cuatro dimensiones las ecuaciones del universo tienen un aspecto tan simple.

26

Transformación de Lorentz de campos

26-1 El potencial de cuatro dimensiones de una carga en movimiento

Vimos en el capítulo anterior que el potencial $A_\mu = (\phi, \boldsymbol{A})$ es un vector de dimensión cuatro. La componente temporal es el potencial escalar ϕ, y las tres componentes espaciales son el potencial vectorial $\boldsymbol{A}$. También calculamos los potenciales de una partícula en movimiento con velocidad uniforme en una línea recta usando la transformación de Lorentz. (Ya los habíamos hallado por otro método en el capítulo 21.) Para una carga puntual cuya posición en el tiempo t es $(vt, 0, 0)$, los potenciales en el punto (x, y, z) son

$$\begin{aligned}
\phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}}\,\frac{q}{\left[\dfrac{(x-vt)^2}{1-v^2}+y^2+z^2\right]^{1/2}}\\
A_x &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}}\,\frac{qv}{\left[\dfrac{(x-vt)^2}{1-v^2}+y^2+z^2\right]^{1/2}}\\
A_y &= A_z = 0.
\end{aligned} \tag{26.1}$$

Las ecuaciones (26.1) dan los potenciales en x, y y z en el tiempo t, para una carga cuya posición "presente" (con lo cual entendemos la posición *en el tiempo* t) está en $x = vt$. Noten que las ecuaciones están en función de $(x - vt)$, y y z, que son las coordenadas medidas *de la posición actual* P de la carga en movimiento (véase figura 26-1). La influencia verdadera que realmente conocemos viaja a la velocidad c, así que es el comportamiento de la carga antes en la posición retardada P' lo que importa en realidad.* El punto P' está en $x = vt'$ (donde $t' = t - r'/c$ es el tiempo retardado). Pero dijimos que las cargas se estuvieron moviendo con velocidad uniforme en una línea recta, así que naturalmente el comportamiento en P' y en la posición actual están relacionados directamente. En realidad, si hacemos la suposición adicional de que los potenciales dependen solamente de la posición y la velocidad en el momento retardado, en la ecuación (26.1) tenemos una fórmula *completa* para los potenciales de una carga en movimiento *arbitrario*. Veámoslo en detalle. Supongan que tienen una carga en movimiento arbitrario, digamos que con la trayectoria mostrada en la figura 26-2, y que están tratando de hallar los potenciales en (x, y, z). Primero hallarán la posición retardada P' y la velocidad v' en ese punto. Luego imaginen que la carga debe mantenerse en movimiento con esta velocidad durante el tiempo de retardo $(t' - t)$, así que debe aparecer en una posición imaginaria P_{proy}, la que podemos llamar "posición proyectada" y debemos llegar allí con la velocidad v'. (Por supuesto, esto no es así; su posición real en t está en P.) Entonces los potenciales en (x, y, z) son justamente lo que las ecuaciones (26.1) deben dar para la carga imaginaria en la posición proyectada P_{proy}. Lo que estamos diciendo es que los potenciales dependen solamente de lo que las cargas estén haciendo en el tiempo *retardado*, los potenciales serán los mismos tanto si las cargas continúan moviéndose a una velocidad constante como si cambian sus velocidades después de t' —esto es, después que los potenciales que deberían aparecer en (x, y, z) en el tiempo t ya estén determinados—.

* Las primas que se usan aquí para indicar las posiciones y tiempos *retardados* no deben confundirse con las primas que se refieren a un sistema de referencia obtenido por transformación de Lorentz en el capítulo anterior.

26-1 El potencial de cuatro dimensiones de una carga en movimiento

26-2 Los campos de una carga puntual con una velocidad constante

26-3 Transformación relativista de los campos

26-4 Las ecuaciones de movimiento en notación relativista

En este capítulo: $c = 1$

Revisar
Volumen II, capítulo 20,
Soluciones de las ecuaciones de Maxwell en el espacio libre

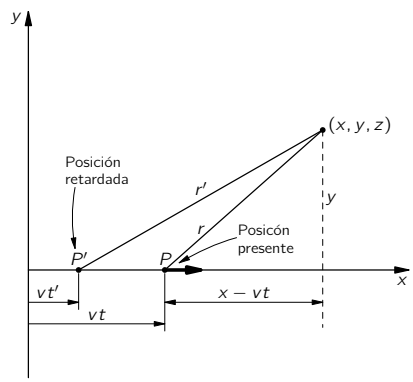


Figura 26-1. Localizando los campos en (x, y, z) debido a una carga q en movimiento según el eje x con la velocidad constante v. El campo "actual" en el punto (x, y, z) se puede expresar en función de la posición "presente" P, como también en función de P', la posición "retardada" (en $t' = t - r'/c$).

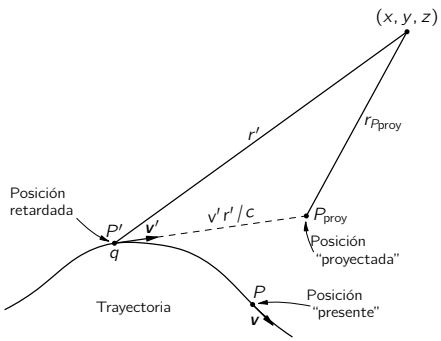


Figura 26-2. Una carga se mueve en una trayectoria arbitraria. Los potenciales en (x, y, z) en el tiempo t están determinados por la posición P' y la velocidad $\boldsymbol{v}'$ en el tiempo retardado $t - r'/c$. Están expresados convenientemente en función de las coordenadas de la posición "proyectada" P_{proy}. (La verdadera posición en t es P.)

Por supuesto, saben que mientras que tengamos la fórmula para los potenciales de una carga moviéndose en toda forma, tenemos la electrodinámica completa; podemos hallar los potenciales de cualquier distribución de carga por superposición. Por lo tanto, podemos resumir todos los fenómenos de la electrodinámica tanto escribiendo las ecuaciones de Maxwell como haciendo la siguiente serie de observaciones. (Recuérdenlas en caso de que alguna vez estén en una isla solitaria. Todo se puede reconstruir a partir de ellas. Por supuesto, sabrán la transformación de Lorentz; nunca olvidarán *eso* en una isla desierta o en cualquier otra parte.)

Primero, A_μ es un vector de cuatro dimensiones. *Segundo*, el potencial de Coulomb para una carga estática es $q/4\pi\epsilon_0 r$. *Tercero*, los potenciales producidos por una carga en movimiento cualquiera dependen solamente de la velocidad y de la posición en el tiempo retardado. Con estos tres hechos tenemos todo. Del hecho que A_μ es un vector de cuatro dimensiones, transformamos el potencial de Coulomb, que conocemos y obtenemos los potenciales para una velocidad constante. Luego, usando el último enunciado, que los potenciales solamente dependen de la velocidad anterior en el tiempo retardado, podemos encontrarlos usando el juego de la posición proyectada. No es una forma particularmente útil de hacer las cosas, pero es interesante demostrar que las leyes de la física pueden ponerse en muchas formas diferentes.

Algunas veces se le oye decir a la gente descuidada, que toda la electrodinámica se puede deducir únicamente de la transformación de Lorentz y de la ley de Coulomb. Por supuesto que esto es completamente falso. Primero, hemos supuesto que hay un potencial escalar y un potencial vectorial que unidos constituyen un vector de cuatro dimensiones. Eso nos dice cómo se transforman los potenciales. ¿Entonces por qué los efectos en el tiempo retardado son los únicos que cuentan? Mejor aún, ¿por qué los potenciales dependen solamente de la posición y la velocidad y no, por ejemplo, de la aceleración? Los *campos* $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ *sí* dependen de la aceleración. Si tratan de hacer el mismo tipo de razonamiento respecto a ellos, dirán que depende únicamente de la posición y la velocidad en el tiempo retardado. Pero los campos de una carga que se está acelerando serían los mismos de una carga en la posición proyectada —lo que es falso—. Los *campos* no solamente dependen de la posición y la velocidad a lo largo de la trayectoria, antes bien, incluso de la aceleración. Así que hay diversas suposiciones adicionales tácitas en este gran enunciado, de que todo se puede deducir de la transformación de Lorentz. (Si ven un enunciado global de que una inmensa cantidad de cosas puede provenir de un número muy pequeño de suposiciones, hallarán que es falso. Comúnmente hay un gran número de suposiciones implicadas que están lejos de ser evidentes si se examinan cuidadosamente.)

26-2 Los campos de una carga puntual con una velocidad constante

Ahora que tenemos los potenciales de una carga puntual que se está moviendo a velocidad constante, debemos hallar los campos —por razones prácticas—. Hay muchos casos donde tenemos partículas moviéndose uniformemente —por ejemplo, rayos cósmicos que atraviesan una cámara de niebla o cualquier electrón lento en un alambre—. Así pues, veamos al menos cuál es el aspecto de los campos a cualquier velocidad —aun para velocidades cercanas a la de la luz— suponiendo solamente que no hay aceleración. Es un asunto interesante.

Hallaremos los campos a partir de los potenciales usando las reglas de costumbre:

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}.$$

Primero, para E_z

$$E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

Pero A_z es cero, así que derivando ϕ en las ecuaciones (26.1), obtenemos

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}}\,\frac{z}{\left[\dfrac{(x-vt)^2}{1-v^2}+y^2+z^2\right]^{3/2}}. \tag{26.2}$$

Análogamente para E_y,

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}}\,\frac{y}{\left[\dfrac{(x-vt)^2}{1-v^2}+y^2+z^2\right]^{3/2}}. \tag{26.3}$$

La componente x es un poco más difícil. La derivada de ϕ es más complicada, y A_x no es nula. Primero,

$$-\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}}\,\frac{(x-vt)/(1-v^2)}{\left[\dfrac{(x-vt)^2}{1-v^2}+y^2+z^2\right]^{3/2}}. \tag{26.4}$$

Luego, derivando A_x respecto a t, hallamos

$$-\frac{\partial A_x}{\partial t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}}\,\frac{-v^2(x-vt)/(1-v^2)}{\left[\dfrac{(x-vt)^2}{1-v^2}+y^2+z^2\right]^{3/2}}. \tag{26.5}$$

Y finalmente, haciendo la suma,

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1-v^2}}\,\frac{x-vt}{\left[\dfrac{(x-vt)^2}{1-v^2}+y^2+z^2\right]^{3/2}}. \tag{26.6}$$

Examinaremos el significado físico de $\boldsymbol{E}$ dentro de un momento; primero hallaremos $\boldsymbol{B}$. Para la componente z,

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Como A_y es cero, sólo tenemos que encontrar una derivada. Noten, sin embargo, que A_x es simplemente $v\phi$ y $\partial/\partial y$ de $v\phi$ es simplemente $-vE_y$. Así pues,

$$B_z = vE_y. \tag{26.7}$$

Análogamente,

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = +v\,\frac{\partial\phi}{\partial z},$$

y

$$B_y = -vE_z. \tag{26.8}$$

Finalmente, B_x es cero, puesto que A_y y A_z son cero. Podemos escribir el campo magnético simplemente de la forma

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}. \tag{26.9}$$

Ahora veamos qué aspecto tienen los campos. Trataremos de dibujar una figura del campo en varias posiciones alrededor de la posición presente de la carga. Es cierto que la influencia de las cargas viene, en un cierto sentido, de la posición retardada; pero debido a que el movimiento está exactamente especificado, la posición retardada está dada únicamente en función de la posición presente. Para velocidades uniformes es mejor relacionar los campos con la posición actual, debido a que las componentes de los campos en (x, y, z) depende solamente de $(x - vt)$, y y z —que son las componentes de los desplazamientos $\boldsymbol{r}$ de la posición presente respecto a (x, y, z) (véase la figura 26-3)—.

Consideremos primero un punto con $z = 0$. Entonces $\boldsymbol{E}$ tiene solamente componentes x y y. Según las ecuaciones (26.3) y (26.6), el cociente de estas dos

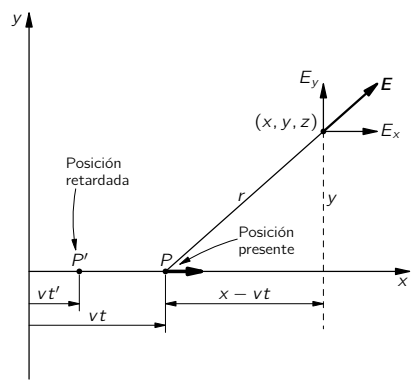


Figura 26-3. Para una carga que se está moviendo con velocidad constante, el campo eléctrico apunta radialmente desde la posición "presente" de la carga.

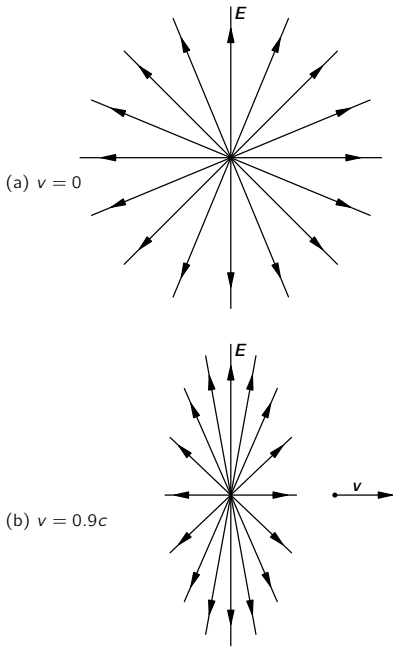


Figura 26-4. El campo eléctrico de una carga en movimiento con la velocidad constante $v = 0.9c$, parte (b), comparada con el campo de una carga en reposo, parte (a).

componentes es igual al cociente de las componentes x y y del desplazamiento. Esto significa que $\boldsymbol{E}$ está en *la misma dirección* que $\boldsymbol{r}$ como lo muestra la figura 26-3. Como E_z también es proporcional a z, está claro que este resultado es válido en tres dimensiones. En suma, el campo eléctrico es radial respecto a la carga y las líneas de campo se alejan radialmente de la carga, del mismo modo que lo hacen para una carga estática. Por supuesto, el campo no es exactamente el mismo que para la carga estática, debido a todos los factores extra de $(1 - v^2)$. Pero podemos demostrar antes algo interesante. La diferencia es precisamente lo que obtendrían si dibujaran el campo de Coulomb con un sistema especial de coordenadas en el que la escala de x se aplastara por el factor $\sqrt{1 - v^2}$. Si lo hacen, las líneas de campo se esparcirán hacia adelante y atrás de la carga y se apretujarán a los lados, como lo muestra la figura 26-4.

Siempre que relacionamos la intensidad de $\boldsymbol{E}$ con la densidad de las líneas de campo en la forma convencional, vemos un campo más fuerte a los lados y un campo débil adelante y atrás, que es justamente lo que dice la ecuación. Primero, si examinamos la intensidad del campo perpendicularmente a la línea de movimiento, a saber, para $(x - vt) = 0$, la distancia desde la carga es $\sqrt{y^2 + z^2}$. Aquí la intensidad del campo total es $\sqrt{E_y^2 + E_z^2}$, que es

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{1 - v^2}}\,\frac{1}{y^2 + z^2}. \tag{26.10}$$

Además, el campo es proporcional al inverso del cuadrado de la distancia —como el campo de Coulomb excepto que aumentado por el factor constante adicional $1/\sqrt{1 - v^2}$, que siempre es más grande que uno—. Así que a los *lados* de una carga en movimiento, el campo eléctrico es más fuerte que el que se obtiene de la ley de Coulomb. En realidad se tiene que el campo en la dirección lateral es más grande que el potencial de Coulomb por el cociente de la energía de la partícula y su masa en reposo.

Delante de la carga (y detrás), y y z son cero, y

$$E = E_x = \frac{q(1 - v^2)}{4\pi\epsilon_0(x - vt)^2}. \tag{26.11}$$

Otra vez el campo varía como el inverso del cuadrado de la distancia a la carga, pero ahora está *reducido* en el factor $(1 - v^2)$, de acuerdo con la imagen de las líneas de campo. Si v/c es muy pequeño, v^2/c^2 es aún más pequeño y el efecto del término $(1 - v^2)$ es muy pequeño; volvemos a la ley de Coulomb. Pero si una partícula se mueve muy cerca de la velocidad de la luz, el campo en la dirección hacia adelante se reduce enormemente y el campo en la dirección lateral aumenta grandemente.

Nuestro resultado obtenido para el campo eléctrico de una carga se puede escribir de la siguiente forma: supongan que dibujaran en un pedazo de papel las líneas de campo para una carga en reposo y luego movieran el cuadro con la velocidad v. Por supuesto, toda la imagen se comprimiría por la contracción de Lorentz, esto es, los granos de carbón sobre el papel aparecerían en diferentes lugares. El milagro aquí está en que el cuadro que verían cuando la página está volando todavía presentaría las líneas de campo de la carga puntual. La contracción las mueve acercándolas a los lados y esparciéndolas adelante y atrás, justamente en la forma apropiada para dar la densidad de líneas correcta. Hemos recalcado anteriormente que las líneas de campo no son reales sino solamente una forma de representar los campos. Sin embargo, aquí parecen casi reales. En este caso particular, si cometen el error de pensar que las líneas de campo están realmente en el espacio, y las transforman, obtendrán el campo correcto. No obstante, esto no torna las líneas de campo más reales. Todo lo que se necesita recordar para saber que no son reales es pensar en los campos eléctricos producidos por una carga junto con un imán; cuando el imán se mueve crea nuevos campos eléctricos que destruyen la hermosura de la imagen. Así que la idea simple de la imagen que se contrae en general no funciona. Sin embargo,

es una manera práctica de recordar cómo son los campos de una carga que se mueve rápidamente.

El campo magnético es $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}$ [según la ecuación (26.9)]. Si toman la velocidad cruz un campo $\boldsymbol{E}$ radial, obtendrán un $\boldsymbol{B}$ que circula alrededor de la línea de movimiento, como muestra la figura 26-5. Si vuelven a poner las c, verán que es el mismo resultado que teníamos para cargas con velocidades bajas. Una buena manera de ver dónde deben ir las c es refiriéndonos de vuelta a la ley de fuerza,

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}).$$

Verán que una velocidad cruz el campo magnético tiene las mismas dimensiones que un campo eléctrico. Así que el segundo miembro de la ecuación (26.9) debe tener un factor $1/c^2$:

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}}{c^2}. \tag{26.12}$$

Para una carga que se mueve lentamente ($v \ll c$), podemos tomar para $\boldsymbol{E}$ el campo de Coulomb; entonces

$$\boldsymbol{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2}\,\frac{\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{r^3}. \tag{26.13}$$

Esta fórmula corresponde exactamente a las ecuaciones para el campo magnético de una corriente que encontramos en la sección 14-7.

Nos gustaría indicar algo interesante para que lo piensen. (Lo volveremos a discutir más adelante.) Imaginen dos protones con velocidades perpendiculares, tal que uno cruzará sobre la trayectoria del otro, pero frente a él, así que no chocan. En cierto instante, sus posiciones relativas serán como en la figura 26-6(a). Veamos la fuerza sobre q_1 debida a q_2 y viceversa. Sobre q_2 solamente hay la fuerza eléctrica de q_1, puesto que q_1 no produce campo magnético a lo largo de su línea de movimiento. Sobre q_1, sin embargo, otra vez está el campo eléctrico y además una fuerza magnética, puesto que se está moviendo en un campo $\boldsymbol{B}$ formado por q_2. Las fuerzas están como se han dibujado en la figura 26-6(b). Las fuerzas eléctricas sobre q_1 y q_2 son iguales y opuestas. Sin embargo, hay una fuerza lateral (magnética) sobre q_1 y *ninguna fuerza lateral sobre* q_2. ¿La acción no es igual a la reacción? Dejamos esto para que lo piensen.

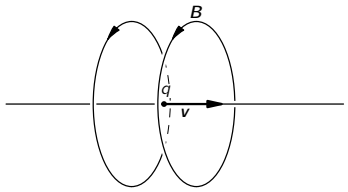


Figura 26-5. El campo magnético cerca de una carga en movimiento es $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}$. [Compárese con la figura 26-4.]

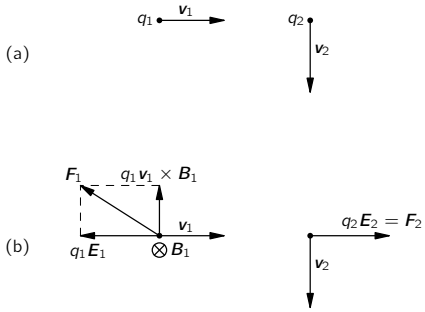


Figura 26-6. Las fuerzas entre dos cargas en movimiento no son siempre iguales y opuestas. Parece que la "acción" no es igual a la "reacción".

26-3 Transformación relativista de los campos

En la sección precedente calculamos los campos eléctrico y magnético a partir de los potenciales transformados. Por supuesto, los campos son importantes, a pesar del razonamiento dado anteriormente sobre el significado físico y la realidad de los potenciales. Los campos también son reales. Sería conveniente para muchos fines tener una manera de calcular los campos en un sistema en movimiento si ya conocen los campos en algún sistema en "reposo". Tenemos las leyes de transformación para ϕ y $\boldsymbol{A}$, porque A_μ es un vector de dimensión cuatro. Ahora conoceremos las leyes de transformaciones de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$. Dados $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ en un sistema de referencia, ¿cómo son en otro sistema que esté en movimiento? Es una transformación muy conveniente que se debe obtener. Siempre podríamos volver atrás a través de los potenciales, pero algunas veces es útil poder transformar los campos directamente. Ahora veremos cómo se hace.

¿Cómo podemos hallar las leyes de transformación de los campos? Conocemos las leyes de transformación de ϕ y de $\boldsymbol{A}$, y sabemos cómo se dan los campos en función de ϕ y $\boldsymbol{A}$ —debe ser fácil hallar la transformación para $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{E}$—. (Deben pensar que con cada vector puede haber algo que permita convertirlo en un vector de cuatro dimensiones, así que con $\boldsymbol{E}$ tiene que haber algo que podamos usar para la cuarta componente. Y también para $\boldsymbol{B}$. Pero no es así. Es completamente diferente de lo que se espera.) Para empezar, tomemos simplemente un campo magnético $\boldsymbol{B}$, que es, por supuesto, $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$. Ahora bien, sabemos que el potencial vectorial con sus componentes x, y y z solamente es un pedazo de algo; también hay una componente t. También sabemos que para derivadas como $\boldsymbol{\nabla}$, además

de las partes x, y y z, también hay una derivada respecto a t. Así pues, tratemos de imaginarnos lo que sucede si remplazamos "y" por una "t", o una "z" por una "t", o algo parecido.

Observen primero la forma de los términos de $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ cuando escribimos en componentes:

$$B_x=\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z},\qquad B_y=\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x},\qquad B_z=\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}. \tag{26.14}$$

La componente x es igual a un par de términos que solamente comprende componentes y y z. Llamemos a esta combinación de derivadas y componentes una "cosa zy" y démosle un nombre corto, F_{zy}. Simplemente entenderemos que

$$F_{zy}\equiv\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}. \tag{26.15}$$

Análogamente B_y es igual a la misma clase de "cosa", pero en esta ocasión es una "cosa xz". Y B_z es, por supuesto, la correspondiente "cosa yx". Tenemos

$$B_x=F_{zy},\qquad B_y=F_{xz},\qquad B_z=F_{yx}. \tag{26.16}$$

Ahora bien, ¿qué sucede si simplemente tratamos de inventar también algunas cosas tipo "t" como F_{xt} y F_{tz} (puesto que la naturaleza debe ser buena y simétrica en x, y, z, y t)? Por ejemplo, ¿qué es F_{tz}? Es, por supuesto,

$$\frac{\partial A_t}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

Pero recuerden que $A_t=\phi$, así que también es

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

Lo han visto anteriormente. Es la componente z de $\boldsymbol{E}$. Bueno, casi —hay un signo mal—. Pero olvidamos que en el gradiente de dimensión cuatro la derivada t viene con el signo opuesto al de x, y y z. Así pues, realmente deberíamos haber tomado la extensión más consistente de F_{tz}, como

$$F_{tz}=\frac{\partial A_t}{\partial z}+\frac{\partial A_z}{\partial t} \tag{26.17}$$

Entonces es exactamente igual a $-E_z$. Probando también F_{tx} y F_{ty}, hallamos que las tres posibilidades dan

$$F_{tx}=-E_x,\qquad F_{ty}=-E_y,\qquad F_{tz}=-E_z. \tag{26.18}$$

¿Qué sucede si ambos subíndices son t? ¿Y si ambos son x? Encontraremos cosas como

$$F_{tt}=\frac{\partial A_t}{\partial t}-\frac{\partial A_t}{\partial t},$$

y

$$F_{xx}=\frac{\partial A_x}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial x},$$

las cuales son cero.

Entonces tenemos seis de estas cosas F. Hay seis más que obtienen intercambiando los subíndices, pero realmente no dan nada nuevo, puesto que

$$F_{xy}=-F_{yx},$$

y así sucesivamente. Así pues, de las 16 posibles combinaciones de los cuatro subíndices tomados en pares, obtenemos sólo seis objetos físicos diferentes; *y son las componentes de* $\boldsymbol{B}$ y de $\boldsymbol{E}$.

Para representar el término general de F, usaremos los subíndices generales μ y ν, donde cada uno se puede sustituir por 0, 1, 2, o 3 —significando t, x, y y z en nuestra notación de dimensión cuatro usual—. También cada cosa será compatible con nuestra notación de dimensión cuatro si definimos $F_{\mu\nu}$ como

$$F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu, \tag{26.19}$$

recordando que, $\nabla_\mu = (\partial/\partial t, -\partial/\partial x, -\partial/\partial y, -\partial/\partial z)$, y que $A_\mu = (\phi, A_x, A_y, A_z)$.

Hemos hallado seis cantidades que van juntas en la naturaleza —que son aspectos diferentes de la misma cosa—. Los campos eléctricos y magnéticos que hemos considerado como vectores separados en nuestro mundo de movimiento lento (donde no nos preocupamos por la velocidad de la luz) no son vectores en un espacio de dimensión cuatro. Son partes de una nueva "cosa". Nuestro "campo" físico realmente es nuestro objeto de seis componentes $F_{\mu\nu}$. Ésa es la forma en que tenemos que considerarlo en relatividad. Resumimos nuestros resultados sobre $F_{\mu\nu}$ en la tabla 26-1.

Tabla 26-1

Las componentes de $F_{\mu\nu}$

$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$	
$F_{\mu\mu} = 0$	
$F_{xy} = -B_z$	$F_{xt} = E_x$
$F_{yz} = -B_x$	$F_{yt} = E_y$
$F_{zx} = -B_y$	$F_{zt} = E_z$

Como pueden ver, hemos tratado de generalizar el producto cruz. Empezamos con la operación rotacional y el hecho de que las propiedades de transformación del rotacional son las mismas que las propiedades de transformación de *dos* vectores —el vector tridimensional ordinario $\boldsymbol{A}$ y el operador gradiente que también sabemos se comporta como un vector—. Consideremos por un momento un producto cruz ordinario en tres dimensiones, por ejemplo, el momentum angular de una partícula. Cuando un objeto está en movimiento en un plano, la cantidad $(xv_y - yv_x)$ es importante. Para el movimiento en tres dimensiones, hay tres cantidades importantes de este tipo que llamaremos momentum angular:

$$L_{xy} = m(xv_y - yv_x), \qquad L_{yz} = m(yv_z - zv_y), \qquad L_{zx} = m(zv_x - xv_z).$$

Entonces (aunque puede ser que lo hayan olvidado a estas alturas) descubrimos en el capítulo 20 del volumen I el milagro de que estas tres cantidades se podían identificar con las componentes de un vector. Para lograr tal cosa, tuvimos que hacer una regla artificial con una convención de la mano derecha. Fue simplemente suerte. Fue suerte, porque L_{ij} (con i y j iguales a x, y o z) era un objeto antisimétrico:

$$L_{ij} = -L_{ji}, \qquad L_{ii} = 0.$$

De las nueve cantidades posibles sólo hay tres números independientes. Y ocurre precisamente que cuando cambian de sistema de coordenadas estos tres objetos se transforman exactamente en la misma forma que las componentes de un vector.

Por ello, esto mismo nos permite representar un elemento de superficie como un vector. Un elemento de superficie tiene dos partes —dx y dy por ejemplo— que podemos representar por el vector $d\boldsymbol{a}$ normal a la superficie. Pero no lo podemos hacer en cuatro dimensiones. ¿Cuál es la "normal" a $dx\,dy$? ¿Está según z o según t?

En resumen, para tres dimensiones sucede por suerte que, después de haber tomado una combinación de dos vectores como L_{ij}, se la pueda representar por otro vector porque hay precisamente tres términos que se pueden transformar como las componentes de un vector. Pero en cuatro dimensiones es evidentemente imposible porque hay seis términos independientes y no se pueden representar seis cosas por medio de cuatro cosas.

Aun en tres dimensiones es posible obtener combinaciones de vectores que no se pueden representar por vectores. Supongan que tomamos dos vectores cualesquiera $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$ y $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y, b_z)$ y hacemos las diversas combinaciones posibles de las componentes, como a_xb_x, a_xb_y, etc. Serían nueve cantidades posibles:

$$\begin{array}{lll} a_xb_x, & a_xb_y, & a_xb_z, \\ a_yb_x, & a_yb_y, & a_yb_z, \\ a_zb_x, & a_zb_y, & a_zb_z. \end{array}$$

Podríamos llamar T_{ij} a estas cantidades.

Si ahora vamos a un sistema rotado, de coordenadas (digamos que alrededor del eje z), las componentes de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ cambian. En el nuevo sistema, a_x por ejemplo se remplaza por

$$a'_x = a_x \cos\theta + a_y \operatorname{sen}\theta,$$

y b_y se remplaza por

$$b'_y = b_y \cos\theta - b_x \operatorname{sen}\theta.$$

Y análogamente para las otras componentes. Las nueve componentes de la cantidad producto T_{ij} que hemos inventado también cambian. Por ejemplo, $T_{xy} = a_x b_y$ se transforma en:

$$T'_{xy} = a_x b_y(\cos^2\theta) - a_x b_x(\cos\theta \operatorname{sen}\theta) + a_y b_y(\operatorname{sen}\theta\cos\theta) - a_y b_x(\operatorname{sen}^2\theta),$$

o sea

$$T'_{xy} = T_{xy}\cos^2\theta - T_{xx}\cos\theta\operatorname{sen}\theta + T_{yy}\operatorname{sen}\theta\cos\theta - T_{yx}\operatorname{sen}^2\theta.$$

Cada componente de T'_{ij} es una combinación lineal de las componentes de T_{ij}.

Así, descubrimos que no sólo es posible tener un "producto cruz" como $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ que tiene tres componentes que se transforman como un vector, sino que podemos —artificialmente— hacer otra clase de "producto" de dos vectores T_{ij} con *nueve* componentes que se transforman bajo una rotación según un conjunto complicado de reglas que podríamos determinar. Tal objeto que tiene dos subíndices para describirlo en lugar de uno, se llama *tensor*. Es un tensor "de rango dos", porque también pueden hacer este juego con tres vectores y obtener un tensor de tercer rango —o con cuatro para obtener un tensor de cuarto rango y así sucesivamente—. Un tensor de primer rango es un vector.

Por ello, concluimos que nuestra cantidad electromagnética F_{ij}, también es un tensor de rango dos, porque tiene dos índices. Sin embargo, es un tensor en cuatro dimensiones. Se transforma de una manera especial que hallaremos dentro de un momento —es precisamente de la forma en que se transforma un producto de vectores—. Para $F_{\mu\nu}$, sucede que si cambian el orden de los índices $F_{\mu\nu}$ cambia de signo. Es un caso especial —es un *tensor antisimétrico*—. Así que expresamos lo siguiente: los campos eléctricos y magnéticos son partes de un tensor antisimétrico de rango dos en cuatro dimensiones.

Hemos hecho un gran recorrido. ¿Recuerdan volviendo atrás cuando definimos lo que significaba velocidad? Ahora estamos hablando de "un tensor antisimétrico de rango dos en cuatro dimensiones".

Debemos, ahora, hallar la ley de transformación de $F_{\mu\nu}$. No es difícil de hacer; es simplemente laborioso —la inteligencia que interviene es cero, pero no lo es el trabajo—. Lo que queremos es la transformación de Lorentz de $\nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$. Como ∇_μ es justamente un caso especial de vector, trabajaremos con la combinación general antisimétrica de vectores, a la cual llamamos $G_{\mu\nu}$:

$$G_{\mu\nu} = a_\mu b_\nu - a_\nu b_\mu. \tag{26.20}$$

(Para nuestros fines a_μ será remplazado finalmente por ∇_μ y b_μ por el potencial A_μ.) Las componentes de a_μ y b_μ se transforman según las fórmulas de Lorentz, que son

$$\begin{aligned}
a'_t &= \frac{a_t - v a_x}{\sqrt{1-v^2}}, & b'_t &= \frac{b_t - v b_x}{\sqrt{1-v^2}},\\
a'_x &= \frac{a_x - v a_t}{\sqrt{1-v^2}}, & b'_x &= \frac{b_x - v b_t}{\sqrt{1-v^2}},\\
a'_y &= a_y, & b'_y &= b_y,\\
a'_z &= a_z, & b'_z &= b_z.
\end{aligned} \tag{26.21}$$

Ahora transformemos las componentes de $G_{\mu\nu}$. Empecemos con G_{tx}:

$$\begin{aligned} G'_{tx} &= a'_t b'_x - a'_x b'_t \\ &= \left(\frac{a_t - v a_x}{\sqrt{1-v^2}}\right)\left(\frac{b_x - v b_t}{\sqrt{1-v^2}}\right) - \left(\frac{a_x - v a_t}{\sqrt{1-v^2}}\right)\left(\frac{b_t - v b_x}{\sqrt{1-v^2}}\right) \\ &= a_t b_x - a_x b_t. \end{aligned}$$

Pero esto es exactamente G_{tx}, así que tenemos el resultado sencillo

$$G'_{tx} = G_{tx}.$$

Haremos uno más

$$G'_{ty} = \frac{a_t - v a_x}{\sqrt{1-v^2}}\, b_y - a_y \frac{b_t - v b_x}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{(a_t b_y - a_y b_t) - v(a_x b_y - a_y b_x)}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Así pues, obtenemos que

$$G'_{ty} = \frac{G_{ty} - v G_{xy}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Y, por supuesto, en la misma forma,

$$G'_{tz} = \frac{G_{tz} - v G_{xz}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Está claro cómo será el resto. Haremos una tabla de los seis términos; sólo que ahora podemos escribirlos para $F_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} F'_{tx} &= F_{tx}, & F'_{xy} &= \frac{F_{xy} - v F_{ty}}{\sqrt{1-v^2}}, \\ F'_{ty} &= \frac{F_{ty} - v F_{xy}}{\sqrt{1-v^2}}, & F'_{yz} &= F_{yz}, \\ F'_{tz} &= \frac{F_{tz} - v F_{xz}}{\sqrt{1-v^2}}, & F'_{zx} &= \frac{F_{zx} - v F_{zt}}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned} \tag{26.22}$$

Por supuesto, siempre tenemos $F'_{\mu\nu} = -F'_{\nu\mu}$ y $F'_{\mu\mu} = 0$.

Así pues, tenemos la transformación de los campos eléctricos y magnéticos. Todo lo que hay que hacer es mirar en la tabla 26-1 para encontrar lo que nuestra notación grandiosa en términos de $F_{\mu\nu}$ significa en función de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$. Es simplemente una cuestión de sustitución. Para que podamos ver qué aspecto tiene en símbolos ordinarios, escribiremos de nuevo nuestra transformación de las componentes de los campos en la tabla 26-2.

Tabla 26-2

La transformación de Lorentz de los campos eléctrico y magnético (Nota: $c = 1$)

$E'_x = E_x$	$B'_x = B_x$
$E'_y = \dfrac{E_y - v B_z}{\sqrt{1-v^2}}$	$B'_y = \dfrac{B_y + v E_z}{\sqrt{1-v^2}}$
$E'_z = \dfrac{E_z + v B_y}{\sqrt{1-v^2}}$	$B'_z = \dfrac{B_z - v E_y}{\sqrt{1-v^2}}$

Las ecuaciones de la tabla 26-2 nos dicen cómo cambian $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ si vamos desde un sistema inercial a otro. Siempre que conocemos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ en un sistema, podemos encontrar cómo son en otro que se está moviendo con velocidad v.

Podemos escribir estas ecuaciones en una forma que es más fácil de recordar si notamos que como v está en la dirección x, todas las funciones con v son componentes de los productos cruz $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$. Así pues, podemos escribir las transformaciones como se muestra en la tabla 26-3.

Tabla 26-3

Una forma alternativa para la transformación de los campos (Nota: $c = 1$)

$E'_x = E_x$	$B'_x = B_x$
$E'_y = \dfrac{(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})_y}{\sqrt{1 - v^2}}$	$B'_y = \dfrac{(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E})_y}{\sqrt{1 - v^2}}$
$E'_z = \dfrac{(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})_z}{\sqrt{1 - v^2}}$	$B'_z = \dfrac{(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E})_z}{\sqrt{1 - v^2}}$

Ahora es más fácil recordar adónde va cada componente. De hecho la transformación se puede escribir de manera aún más simple si definimos las componentes del campo según x como las componentes "paralelas" $E_\parallel$ y $B_\parallel$ (debido a que son paralelas a la velocidad relativa de S y S') y las componentes transversales —el vector suma de las componentes y y z— como las componentes "perpendiculares" $E_\perp$ y $B_\perp$. Entonces obtenemos las ecuaciones de la tabla 26-4. (También hemos vuelto a poner las c para que sea más conveniente cuando nos queramos referir a ellas después.)

Tabla 26-4

Otra forma aún para la transformación de Lorentz de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$

$E'_\parallel = E_\parallel$	$B'_\parallel = B_\parallel$
$E'_\perp = \dfrac{(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})_\perp}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$	$B'_\perp = \dfrac{\left(\boldsymbol{B} - \dfrac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}}{c^2}\right)_\perp}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

Las transformaciones de campo nos dan otra forma de resolver algunos problemas que hemos hecho antes —por ejemplo, encontrar los campos de una carga puntual en movimiento—. Anteriormente hemos hallado los campos derivando los potenciales. Pero podríamos hacerlo transformando el campo de Coulomb. Si tenemos una carga puntual en reposo en el sistema S, entonces sólo está el campo radial $\boldsymbol{E}$. En el sistema S' veremos una carga puntual que se está moviendo con velocidad u, si el sistema S' se mueve respecto al sistema S con velocidad $v = -u$. Dejaremos que demuestren que las transformaciones de las tablas 26-3 y 26-4 dan los mismos campos eléctricos y magnéticos que hemos hallado en la sección 26-2.

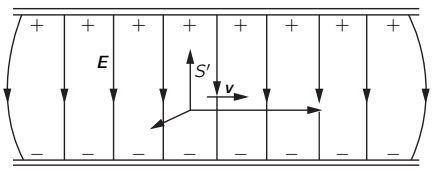


Figura 26-7. El sistema de coordenadas S' moviéndose a través de un campo eléctrico estático.

La transformación de la tabla 26-2 nos da una respuesta interesante y simple para lo que vemos al movernos respecto a *cualquier* sistema de cargas fijas. Por ejemplo, supongan que queremos conocer los campos en *nuestro* sistema de referencia S' si nos estamos moviendo entre las placas de un condensador, lo anterior se observa en la figura 26-7. (Por supuesto, esto es lo mismo que decir que un condensador cargado se está moviendo respecto a *nosotros*.) ¿Qué vemos? La transformación es fácil en este caso porque el campo $\boldsymbol{B}$ en el sistema original es cero. Primero supongamos que nuestro movimiento es perpendicular a $\boldsymbol{E}$; luego veremos un $\boldsymbol{E'} = \boldsymbol{E}/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ el cual es todavía completamente transversal. Además veremos un campo magnético $\boldsymbol{B'} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E'}/c^2$. (El $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ no aparece en nuestra fórmula para $\boldsymbol{B'}$ debido a que lo escribimos en función de $\boldsymbol{E'}$ en lugar de $\boldsymbol{E}$; pero es la misma cosa.) Así pues, cuando nos movemos perpendicularmente a un campo eléctrico estático, veremos una $\boldsymbol{E}$ reducida y una $\boldsymbol{B}$ transversal añadida. Si nuestro movimiento no es perpendicular a $\boldsymbol{E}$, dividimos $\boldsymbol{E}$ en $\boldsymbol{E}_\parallel$ y $\boldsymbol{E}_\perp$. La parte paralela no cambia, $E'_\parallel = E_\parallel$, y la componente perpendicular lo hace justamente como lo hemos descrito.

Tomemos el caso opuesto e imaginemos que nos estamos moviendo a través de un campo *magnético* estático puro. Esta vez veremos un campo *eléctrico* $\boldsymbol{E'}$ igual a $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B'}$ y el campo magnético cambiado por el factor $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (suponiendo

que es transversal). Mientras v sea mucho menor que c podemos despreciar el cambio del campo magnético y el principal efecto es el campo eléctrico que aparece. Como un ejemplo de este efecto, consideremos el problema, alguna vez famoso, de determinar la velocidad de un avión. No es muy famoso hoy día porque se puede usar el radar para calcular la velocidad del aire a partir de la reflexión en la Tierra, pero por muchos años fue muy difícil hallar la velocidad de un avión cuando hacía muy mal tiempo. No se podía ver la Tierra ni se sabía dónde era hacia arriba, etc. No obstante, era importante conocer con qué rapidez se estaban moviendo en relación a la Tierra. ¿Cómo se puede hacer lo anterior sin poder ver la Tierra? Muchos de los que conocían las fórmulas de transformación concibieron la idea de utilizar el hecho de que el avión se mueve en el campo magnético de la Tierra. Supongan que un avión está volando donde hay un campo magnético más o menos conocido. Tomemos precisamente el caso simple donde el campo magnético es vertical. Si estuviera volando a través de él con una velocidad horizontal $\boldsymbol{v}$, entonces, de acuerdo a nuestra fórmula, veríamos un campo eléctrico que es $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$, es decir, perpendicular a la línea de movimiento. Si sostenemos un alambre sin aislante a lo largo del avión, este campo eléctrico inducirá cargas en los extremos del alambre. Esto no es nada nuevo. Por lo cual, desde el punto de vista de alguien en el suelo, estamos moviendo el alambre a través del campo, y la fuerza $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ provoca que las cargas se muevan a los extremos del alambre. Las ecuaciones de transformación indicarán exactamente lo mismo de una manera diferente. (El hecho de que podamos decirlo en más de una manera no quiere decir que una forma es mejor que la otra. ¡Obtenemos así tantos métodos y herramientas diferentes que usualmente podemos llegar al mismo resultado de 65 maneras distintas!)

Así que para medir v, todo lo que tenemos que hacer es medir el voltaje entre los extremos del alambre. No lo podemos hacer utilizando un voltímetro debido a que los mismos campos actuarán sobre los alambres del voltímetro, pero existen otras maneras de medir tales campos. Hablamos de algunas de ellas cuando discutimos la electricidad atmosférica en el capítulo 9. Así pues, es posible medir la velocidad del avión.

No obstante, este importante problema nunca fue resuelto de esta forma. El motivo es que el campo eléctrico que se desarrolla es del orden de milivoltios por metro. Podemos medir tales campos, pero el problema es que estos campos, desafortunadamente, no son muy diferentes de otros campos eléctricos. El campo que se produce por el movimiento a través de otro campo magnético, no se puede distinguir de algún otro campo eléctrico que ya estaba en el aire debido a otra fuente, sea de cargas electrostáticas en el aire o en las nubes. Describimos, en el capítulo 9, que hay, normalmente, campos eléctricos sobre la superficie de la Tierra con intensidad aproximada de 100 voltios por metro. Pero son muy irregulares. A medida que el avión hace su recorrido a través del aire, encuentra fluctuaciones de campos eléctricos atmosféricos que son enormes en comparación con los campos diminutos producidos por el término $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$, y resulta por razones prácticas que es imposible medir la velocidad de un avión por su movimiento a través del campo magnético de la Tierra.

26-4 Las ecuaciones de movimiento en notación relativista*

No constituye un gran beneficio hallar los campos magnéticos y eléctricos a partir de las ecuaciones de Maxwell a menos que sepamos qué hacen los campos cuando los tenemos. Deben recordar que los campos son necesarios para hallar las fuerzas sobre las cargas y que estas fuerzas determinan el movimiento de la carga. Así pues, parte de la teoría de la electrodinámica es la relación entre el movimiento de cargas y las fuerzas.

Para una sola carga en los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$, la fuerza es

$$\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}). \tag{26.23}$$

* En esta sección volvemos a poner todas las c.

Esta fuerza es igual a la masa por la aceleración para bajas velocidades, pero la ley correcta para cualquier velocidad es que la fuerza es igual a $d\boldsymbol{p}/dt$. Si se escribe $\boldsymbol{p} = m_0\boldsymbol{v}/\sqrt{1-v^2/c^2}$, encontramos que la ecuación de movimiento relativistamente correcta es

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}). \tag{26.24}$$

Discutiremos esta ecuación desde el punto de vista de la relatividad. Como hemos puesto nuestras ecuaciones de Maxwell en forma relativista, sería interesante ver cuál sería el aspecto de las ecuaciones de movimiento en forma relativista. Veamos si podemos escribir la ecuación en notación con vectores de dimensión cuatro.

Sabemos que el momentum es parte de un vector de dimensión cuatro p_μ cuya componente temporal es la energía $m_0c^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Así que debemos pensar en sustituir el primer miembro de la ecuación (26.24) por dp_μ/dt. Luego, solamente necesitamos hallar una cuarta componente para que vaya con $\boldsymbol{F}$. Esta cuarta componente debe ser igual a la derivada de la energía respecto al tiempo, o sea, el trabajo hecho por unidad de tiempo, que es $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$. Luego escribiremos el segundo miembro de la ecuación (26.24) como un vector de cuatro dimensiones en la forma $(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}, F_x, F_y, F_z)$. Pero esto no es un vector de dimensión cuatro.

La derivada de un vector de dimensión cuatro respecto al *tiempo* ya no es un vector de dimensión cuatro, debido a que d/dt requiere elegir cierto sistema de referencia especial para medir t. Anteriormente tuvimos ese problema cuando tratamos de incluir $\boldsymbol{v}$ dentro de un vector de cuatro dimensiones. Nuestra primera conjetura fue que la componente temporal sería $cdt/dt = c$. Pero las cantidades

$$\left(c, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = (c, \boldsymbol{v}) \tag{26.25}$$

no son las componentes de un vector de dimensión cuatro. No obstante, se podría lograr que lo fueran multiplicando cada componente por $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$. La "velocidad de dimensión cuatro" u_μ es el vector de cuatro dimensiones

$$u_\mu = \left(\frac{c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right). \tag{26.26}$$

Así pues, parece que el truco es multiplicar d/dt por $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$, si queremos las derivadas para formar un vector de dimensión cuatro.

Nuestra segunda conjetura es que

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,\frac{d}{dt}(p_\mu) \tag{26.27}$$

debe ser un vector de cuatro dimensiones. ¿Pero qué es $\boldsymbol{v}$? Es la velocidad de la partícula —¡no la de un sistema de coordenadas!—. Entonces la cantidad f_μ definida por

$$f_\mu = \left(\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{\boldsymbol{F}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) \tag{26.28}$$

es la extensión a cuatro dimensiones de una fuerza —podemos llamarla "fuerza de dimensión cuatro"—. Es realmente un vector de cuatro dimensiones, y sus componentes espaciales no son las componentes de $\boldsymbol{F}$ sino de $\boldsymbol{F}/\sqrt{1-v^2/c^2}$.

La pregunta es ¿por qué f_μ es un vector de cuatro dimensiones? Sería bueno llegar a comprender un poco ese factor $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Como hasta ahora ha surgido dos veces, es hora de que veamos por qué d/dt siempre se puede arreglar con el mismo factor. La respuesta está en lo siguiente: cuando derivamos respecto al tiempo alguna función x, calculamos el incremento Δx en un intervalo pequeño Δt de la variable t. Pero en otro sistema de referencia el intervalo Δt debe corresponder a un cambio en t' y en x', así que si solamente variamos t', el cambio en x será diferente. Tenemos que hallar una variable para nuestra

derivación que sea una medida de un "intervalo" en el *espacio-tiempo*, que será la misma en todos los sistemas de coordenadas. Cuando tomamos un Δx para ese intervalo, será el mismo para todos los sistemas de coordenadas. Cuando una partícula "se mueve" en un espacio de dimensión cuatro, hay los cambios Δt, Δx, Δy, Δz. ¿Podemos formar un intervalo invariante a partir de ellos? Bueno, son las componentes del vector de cuatro dimensiones $x_\mu = (ct, x, y, z)$, así que si definimos una cantidad Δs por

$$(\Delta s)^2 = \frac{1}{c^2}\,\Delta x_\mu \Delta x_\mu = \frac{1}{c^2}(c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2) \tag{26.29}$$

—que es un producto escalar de dimensión cuatro— tenemos un buen escalar para usar como medida de un intervalo de dimensión. A partir de Δs —o su límite ds— podemos definir un parámetro $s = \int ds$. Y una derivada respecto a s, d/ds, es una buena operación en cuatro dimensiones, porque es invariante respecto a una transformación de Lorentz.

Es fácil relacionar ds con dt para una partícula en movimiento. Para una partícula puntual en movimiento,

$$dx = v_x\,dt, \qquad dy = v_y\,dt, \qquad dz = v_z\,dt, \tag{26.30}$$

y

$$ds = \sqrt{(dt^2/c^2)(c^2 - v_x^2 - v_y^2 - v_z^2)} = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{26.31}$$

Así pues, el operador

$$\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\,\frac{d}{dt}$$

es un *operador invariante*. Si operamos sobre cualquier vector de dimensión cuatro con él, obtenemos otro vector de dimensión cuatro. Por ejemplo, si operamos sobre (ct, x, y, z), obtenemos la velocidad de dimensión cuatro u_μ:

$$\frac{dx_\mu}{ds} = u_\mu.$$

Vemos ahora por qué el factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ arregla las cosas.

La variable invariante s es una cantidad física útil. Se la llama "tiempo propio" a lo largo de la trayectoria de una partícula, porque ds siempre es un intervalo de tiempo en un sistema de referencia que se está moviendo con la partícula en todo momento. (Entonces, $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$, y $\Delta s = \Delta t$.) Si pueden imaginar algún "reloj" cuya rapidez no dependa de la aceleración, tal reloj llevado con la partícula marcaría el tiempo s.

Ahora podemos retroceder y escribir la ley de Newton (corregida por Einstein) en la forma interesante

$$\frac{dp_\mu}{ds} = f_\mu, \tag{26.32}$$

donde f_μ está dada por la ecuación (26.28). También el momentum p_μ se puede escribir en la forma

$$p_\mu = m_0 u_\mu = m_0\,\frac{dx_\mu}{ds}, \tag{26.33}$$

donde las coordenadas $x_\mu = (ct, x, y, z)$ describen ahora la trayectoria de la partícula. Finalmente, la notación de cuatro dimensiones nos da esta forma muy sencilla de la ecuación de movimiento:

$$f_\mu = m_0\,\frac{d^2x_\mu}{ds^2}, \tag{26.34}$$

que nos recuerda a la ecuación $F = ma$. Es importante notar que la ecuación (26.34) *no* es la misma que $F = ma$, porque la fórmula de dimensión cuatro, ecuación (26.34), contiene la mecánica relativista que es diferente de la ley de Newton para velocidades altas. Es distinto el caso de las ecuaciones de Maxwell, donde pudimos rescribir las ecuaciones en forma relativista *sin ningún cambio en el significado* —pero con un simple cambio de notación—.

Volvamos ahora a la ecuación (26.24) y veamos cómo podemos escribir el primer miembro en notación de dimensión cuatro. Las tres componentes —divididas entre $\sqrt{1-v^2/c^2}$— son las componentes de f_μ, así que

$$f_x = \frac{q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = q\left[\frac{E_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{v_yB_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{v_zB_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]. \quad (26.35)$$

Ahora debemos poner todas las cantidades en su notación relativista. Primero, $c/\sqrt{1-v^2/c^2}$, $v_y/\sqrt{1-v^2/c^2}$ y $v_z/\sqrt{1-v^2/c^2}$ son las componentes t, y y z de la velocidad de dimensión cuatro u_μ. Y las componentes de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ son componentes del tensor de rango dos de los campos $F_{\mu\nu}$. Buscando en la tabla 26-1 las componentes de $F_{\mu\nu}$ que corresponden a E_x, B_z y B_y, obtenemos*

$$f_x = q(u_tF_{xt} - u_yF_{xy} - u_zF_{xz}),$$

lo cual se torna interesante. Cada término tiene el subíndice x, lo cual es razonable, puesto que estamos buscando una componente x. Luego todos los otros aparecen en pares: tt, yy, zz —excepto, el término xx que está ausente—. Así pues, lo ponemos simplemente y escribimos

$$f_x = q(u_tF_{xt} - u_xF_{xx} - u_yF_{xy} - u_zF_{xz}). \quad (26.36)$$

No hemos cambiado nada porque $F_{\mu\nu}$, es antisimétrico y F_{xx} es cero. La razón de introducir el término xx es que podemos escribir la ecuación (26.36) en la forma corta como sigue:

$$f_\mu = qu_\nu F_{\mu\nu}. \quad (26.37)$$

Esta ecuación es semejante a la ecuación (26.36) si establecemos la *regla* de que toda vez que un subíndice esté *dos veces* (como ν aquí), automáticamente suman sobre términos en la misma forma que para el producto escalar, *usando la misma convención para los signos.*

Pueden creer fácilmente que (26.37) sirve igualmente bien para $\mu = y$ o $\mu = z$, pero ¿y para $\mu = t$? Para divertirnos veamos qué dice:

$$f_t = q(u_tF_{tt} - u_xF_{tx} - u_yF_{ty} - u_zF_{tz}).$$

Ahora tenemos que traducir de vuelta a los E y las B. Obtenemos

$$f_t = q\left(0 + \frac{v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,E_x + \frac{v_y}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,E_y + \frac{v_z}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\,E_z\right), \quad (26.38)$$

o

$$f_t = \frac{q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Pero según la ecuación (26.38), se supone que f_t es

$$\frac{\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Ésta es lo mismo que la ecuación (26.38), puesto que $(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{v}$ es cero. Así pues, todo resulta bien.

Resumiendo, nuestra ecuación de movimiento se puede escribir en la forma elegante como sigue:

$$m_0\,\frac{d^2x_\mu}{ds^2} = f_\mu = qu_\nu F_{\mu\nu}. \quad (26.39)$$

Aunque es interesante ver que las ecuaciones se pueden escribir de esta forma, la misma no es particularmente útil. Comúnmente es más conveniente hallar el movimiento de partículas usando las ecuaciones originales (26.24), que es lo que haremos por lo general.

* Cuando regresamos las c en la tabla 26-1, todas las componentes de $F_{\mu\nu}$, correspondientes a las componentes de $\boldsymbol{E}$ están multiplicadas por $1/c$.

27

Energía del campo y momentum del campo

27-1 Conservación local
27-2 Conservación de la energía y del electromagnetismo
27-3 Densidad de energía y flujo de energía en el campo electromagnético
27-4 La ambigüedad de la energía de campo
27-5 Ejemplos de flujo de energía
27-6 Momentum del campo

27-1 Conservación local

Está comprobado que la energía de la materia no se conserva. Cuando un objeto radia luz pierde energía. Sin embargo, la energía perdida es posiblemente descriptible en alguna otra forma, en la luz, por ejemplo. En consecuencia, la teoría de la conservación de la energía es incompleta sin una consideración de la energía asociada con la luz o, en general, con el campo electromagnético. Nos ocuparemos ahora de la ley de conservación de la energía y también del momentum de los campos. Por supuesto, no podemos tratar una sin la otra, porque en la teoría de la relatividad son diferentes aspectos del mismo vector de dimensión cuatro.

En los primeros capítulos del volumen I discutimos la conservación de la energía; entonces, sólo dijimos que la energía total del mundo es constante. Ahora queremos extender el concepto de conservación de la energía en un sentido importante, en un sentido que diga en *detalle* sobre *cómo* se conserva la energía. La nueva ley indicará que si de una región sale energía es porque la misma *fluye* a través del contorno de esa región. Esta ley es un poco más fuerte que la conservación de la energía sin esa restricción.

Para ver lo que significa esta afirmación, examinemos cómo funciona la ley de conservación de la carga. Describimos la conservación de la carga diciendo que hay una densidad de corriente $\boldsymbol{j}$ y una densidad de carga ρ, y cuando la carga disminuye en alguna parte tiene que haber un flujo de carga saliendo de ese lugar. A esto lo llamamos conservación de carga. La forma matemática de la ley de conservación es

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{j}=-\frac{\partial\rho}{\partial t}. \tag{27.1}$$

Además, esta ley involucra la consecuencia de que la carga total del mundo siempre es constante —nunca hay ni ganancia ni pérdida netas de carga—. Sin embargo, la carga total del mundo podría ser constante de otra manera. Supongan que hay una carga Q_1 cerca de un punto (1) mientras que no hay carga cerca de un punto (2) a cierta distancia (figura 27-1). Supongan ahora que a medida que transcurre el tiempo la carga Q_1 desapareciera gradualmente y que *simultáneamente* con la disminución de Q_1 apareciera cierta carga Q_2 cerca del punto (2), de tal manera que en todo instante la suma de Q_1 y Q_2 fuera constante. Es decir, en cualquier estado intermedio la cantidad de carga perdida por Q_1 se agregaría a Q_2. Entonces la cantidad total de carga del mundo se conservaría. Es una conservación "mundial" pero no lo llamamos una conservación "local", porque para que la carga fuera de (1) a (2) no había necesidad de que apareciera en ninguna parte en el espacio entre el punto (1) y el punto (2). Así, localmente, la carga se "perdió" simplemente.

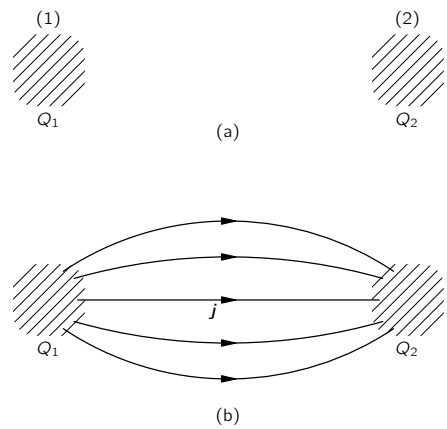


Figura 27-1. Dos maneras de conservar la carga: (a) $Q_1 + Q_2$ es constante; (b) $dQ_1/dt = -\int \boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{n}\,da = -dQ_2/dt$.

Hay una dificultad con esa ley de conservación "mundial" en la teoría de la relatividad. El concepto de "instantes simultáneos" en puntos distantes no es equivalente en sistemas diferentes. Dos eventos simultáneos en un sistema no pueden ser simultáneos en otro sistema que se mueve respecto a él. Para la conservación "mundial" del tipo descrito, es necesario que la carga perdida en Q_1 aparezca *simultáneamente* en Q_2. De otra manera habría instantes en que la carga no se conservaría. Parece que no hay manera de conseguir que la ley de conservación de carga sea relativistamente invariante sin hacerla una ley de conservación "local". En realidad, la exigencia de invariancia relativista de Lorentz parece restringir las leyes posibles de la naturaleza de manera sorprendente.

Además, en la teoría cuántica de campos moderna, por ejemplo, muchas veces se ha querido alterar la teoría permitiendo lo que llamamos una interacción "no local" —donde algo que está *aquí* tiene un efecto directo sobre algo que está *allá*— pero se cae en dificultades con el principio de relatividad.

La conservación "local" implica otra idea. Esta idea nos dice que una carga puede ir de un lugar a otro únicamente si sucede algo en el espacio intermedio. Para describir la ley no sólo necesitamos la densidad de carga ρ, sino también otro tipo de cantidad, a saber $\boldsymbol{j}$, un vector que da la rapidez del flujo de carga a través de una superficie. Así, el flujo se relaciona con la rapidez de variación temporal de la densidad de carga por medio de la ecuación (27.1). Éste es el tipo más extremo de la ley de conservación. Indica que la carga se conserva —"localmente"— de una manera especial.

Resulta que la conservación de la energía también es un proceso *local*. No sólo hay una densidad de energía en una región dada del espacio sino también un vector para representar la rapidez de flujo de la energía a través de una superficie. Por ejemplo, cuando una fuente luminosa radia, podemos hallar la energía luminosa que se aleja de la fuente. Si imaginamos una superficie matemática rodeando la fuente luminosa, la energía perdida desde dentro de la superficie es igual a la energía que fluye de la superficie hacia afuera.

27-2 Conservación de la energía y del electromagnetismo

Ahora escribiremos cuantitativamente la ley de conservación de la energía en el electromagnetismo. Tenemos que describir cuánta energía existe en todo elemento de volumen del espacio y, además, la rapidez de flujo de energía. Supongamos que primero analizaremos solamente la energía del campo electromagnético. Representaremos con u la *densidad de energía* del campo (es decir, la cantidad de energía por unidad de volumen en el espacio) y con el vector $\boldsymbol{S}$ representaremos el *flujo de energía* de campo (es decir, la energía que fluye por unidad de tiempo a través de un área unitaria perpendicular al flujo). Luego, por analogía perfecta con la conservación de carga, ecuación (27.1), podemos escribir la ley "local" de conservación de la energía del campo en la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S}. \tag{27.2}$$

Por supuesto, esta ley no es válida en general; no es cierto que la energía del campo se conserve. Supónganse que están en un cuarto oscuro y encienden la luz. De repente el cuarto queda lleno de luz, así que hay energía en el campo, aunque no había ninguna energía allí antes. La ecuación (27.2) no es la ley completa de conservación, porque la energía del *campo solo* no se conserva, únicamente la energía total del mundo —también está la energía de la materia—. La energía del campo variará si la materia realiza algún trabajo sobre el campo o el campo sobre la materia.

Pero si hay materia dentro del volumen de interés, sabemos cuánta energía contiene: cada partícula tiene una energía $m_0c^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$. La energía total de la materia es simplemente la suma de la energía de todas las partículas y el flujo de esta energía a través de una superficie es la suma de la energía que transporta cada partícula que cruza la superficie. Ahora sólo queremos hablar de la energía del campo electromagnético. Así pues, tenemos que escribir una ecuación que diga que la energía total del *campo* en un volumen dado disminuye *ya sea* porque la energía fluye saliendo del volumen, *o* porque el campo pierde energía que cede a la materia (o gana energía, que es simplemente una pérdida negativa). La energía del campo dentro de un volumen V es

$$\int_V u\,dV,$$

y su tasa de disminución es menos la derivada del tiempo de esta integral. El flujo de energía del campo que sale del volumen V es la integral de la componente normal de $\boldsymbol{S}$ sobre la superficie Σ que encierra el volumen V,

$$\int_\Sigma \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}\,da.$$

Así pues,

$$-\frac{d}{dt}\int_V u\,dV = \int_\Sigma \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}\,da + (\text{trabajo hecho en la materia dentro de } V). \tag{27.3}$$

Hemos visto antes que el campo realiza trabajo sobre cada unidad de volumen de materia a razón de $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}$. [La fuerza sobre una partícula es $\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$ y la rapidez con que se realiza trabajo es $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}=q\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}$. Si hay N partículas por unidad de volumen, la rapidez con que se hace trabajo por unidad de volumen es $Nq\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}$, pero $Nq\boldsymbol{v}=\boldsymbol{j}$.] Así pues, la cantidad $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}$ debe ser igual a la pérdida de energía por unidad de tiempo y por unidad de volumen *por* parte del campo. La ecuación (27.3) se convierte entonces en

$$-\frac{d}{dt}\int_V u\,dV = \int_\Sigma \boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{n}\,da + \int_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}\,dV. \tag{27.4}$$

Ésta es nuestra ley de conservación para la energía del campo. Se puede convertir en una ecuación diferencial como la ecuación (27.2) si transformamos el segundo término en una integral de volumen. Eso es fácil con el teorema de Gauss. La integral de superficie de la componente normal de $\boldsymbol{S}$ es la integral de su divergencia sobre el volumen contenido. Así pues, la ecuación (27.3) es equivalente a

$$-\int_V \frac{\partial u}{\partial t}\,dV = \int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S}\,dV + \int_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}\,dV,$$

donde hemos puesto la derivada temporal del primer término dentro de la integral. Como esta ecuación es válida para cualquier volumen, podemos sacar las integrales y tenemos la ecuación energética para los campos electromagnéticos:

$$-\frac{\partial u}{\partial t} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S} + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}. \tag{27.5}$$

Ahora bien, esta ecuación no nos sirve a no ser que sepamos qué son u y $\boldsymbol{S}$. Quizá les deberíamos decir lo que son en términos de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ porque lo que queremos realmente es el resultado. Sin embargo, les mostraremos en cambio el tipo de razonamiento que usó Poynting en 1884 para obtener fórmulas para $\boldsymbol{S}$ y u, de modo que puedan ver de dónde provienen. (Aunque no necesitan aprender esta deducción para nuestro trabajo posterior.)

27-3 Densidad de energía y flujo de energía en el campo electromagnético

La idea es suponer que hay una densidad de energía del campo u y un flujo $\boldsymbol{S}$ que dependen únicamente de los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$. (Por ejemplo, sabemos que en la electrostática al menos, la densidad de energía se puede escribir como $\frac{1}{2}\epsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}$.) Por supuesto, u y $\boldsymbol{S}$ podrían depender de los potenciales o de alguna otra cosa, pero veamos lo que podemos obtener. Podemos tratar de rescribir la cantidad $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}$ de modo que se convierta en la suma de dos términos: uno que sea la derivada de una cantidad respecto al tiempo y otro que sea la divergencia de una segunda cantidad. La primera cantidad sería entonces u y la segunda sería $\boldsymbol{S}$ (con signos apropiados). Debemos escribir ambas cantidades en términos de campos únicamente, es decir, escribiremos nuestra igualdad en la forma

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j} = -\frac{\partial u}{\partial t} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S}. \tag{27.6}$$

Primero hay que expresar el primer término en función de los campos únicamente. ¿Cómo hacerlo? Usando las ecuaciones de Maxwell, naturalmente. Según la ecuación de Maxwell para el rotacional de $\boldsymbol{B}$,

$$\boldsymbol{j} = \epsilon_0 c^2\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} - \epsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}.$$

Sustituyendo esto en (27.6) obtendremos todo en términos de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j}=\epsilon_0c^2\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})-\epsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{27.7}$$

Casi hemos terminado. El último término es una derivada temporal —es $(\partial/\partial t)(\frac{1}{2}\epsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E})$—. Así, $\frac{1}{2}\epsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}$ es al menos una parte de u. Es lo mismo que encontramos en electrostática. Todo lo que tenemos que hacer ahora es transformar el segundo término en la divergencia de algo.

Observen que el primer término del segundo miembro de (27.7) es igual a

$$(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{E}. \tag{27.8}$$

Y como saben por el álgebra vectorial, $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ es igual a $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$; así que nuestro término también es igual a

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{E}) \tag{27.9}$$

y tenemos la divergencia de "algo" como queríamos. ¡Sólo que esto es un error! Ya les advertimos antes que $\boldsymbol{\nabla}$ es "como" un vector, pero no "exactamente" lo mismo. La razón de que no lo sea es que hay una *convención* adicional proveniente del cálculo: cuando un operador diferencial está frente a un producto, actúa sobre todo lo que está a la derecha. En la ecuación (27.7), $\boldsymbol{\nabla}$ opera únicamente en $\boldsymbol{B}$ y no sobre $\boldsymbol{E}$. Pero en la forma (27.9), la convención normal diría que $\boldsymbol{\nabla}$ opera en $\boldsymbol{B}$ y en $\boldsymbol{E}$. Así pues, *no* es lo mismo. En efecto, si escribimos explícitamente las componentes de $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{E})$ podemos ver que es igual a $\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B})$ *más* otros términos. Es parecido a lo que ocurre cuando derivamos un producto en álgebra. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}(fg)=\frac{df}{dx}\,g+f\,\frac{dg}{dx}.$$

En vez de escribir explícitamente todas las componentes de $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{E})$, mostraremos un truco muy útil para este tipo de problema. Es un truco que les permite usar todas las reglas del álgebra vectorial en expresiones con el operador $\boldsymbol{\nabla}$ sin caer en dificultades. El truco es dejar de lado —por un momento al menos— la regla de la notación del cálculo que indica sobre qué actúa el operador de la derivada. Observen que normalmente se usa el orden de los términos para *dos* fines diferentes. Uno es para el cálculo: $f(d/dx)g$ no es lo mismo que $g(d/dx)f$, el otro es para vectores: $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ es diferente de $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$. Podemos, si queremos, abandonar momentáneamente la regla del cálculo. En vez de decir que una derivada opera sobre todo lo que está a la derecha, hacemos una *nueva* regla que no depende del orden en que se escriben los términos. Así podemos jugar con los términos sin preocuparnos.

Aquí está nuestra nueva convención: mostramos por medio de un subíndice, sobre el cual actúa un operador diferencial; el *orden* no tiene ninguna importancia. Además, supongan que representamos D por el operador $\partial/\partial x$. Entonces D_f significa que sólo la derivada de la cantidad variable f será tomada. Luego,

$$D_ff=\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Pero si tenemos D_ffg, significa

$$D_ffg=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)g.$$

Sin embargo, observen ahora que conforme a nuestra nueva regla, fD_fg significa lo mismo. Podemos escribir la misma cosa en cualquiera de las formas:

$$D_ffg=gD_ff=fD_fg=fgD_f.$$

Como ven, D_f puede ir hasta *después* de todo. (Es sorprendente que nunca se enseñe una notación tan práctica en los libros de matemáticas o de física.)

Puede que se pregunten: ¿y si *quiero* escribir la derivada de fg? *Quiero* la derivada de *ambos* factores. Es fácil: simplemente lo dicen; escriben $D_f(fg) + D_g(fg)$. Esto es simplemente $g(\partial f/\partial x) + f(\partial g/\partial x)$, que es lo que entienden por $\partial(fg)/\partial x$ en la notación antigua.

Verán que ahora es muy fácil obtener una nueva expresión para $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{E})$. Empecemos pasando a la nueva notación; escribimos

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{\nabla}_B\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{E}) + \boldsymbol{\nabla}_E\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{E}). \tag{27.10}$$

Una vez hecho esto, ya no tenemos que atenernos al orden. Siempre sabemos que $\boldsymbol{\nabla}_E$ opera sobre $\boldsymbol{E}$ únicamente y que $\boldsymbol{\nabla}_B$ opera sobre $\boldsymbol{B}$ únicamente. De esta manera podemos usar $\boldsymbol{\nabla}$ como si fuera un vector común. (Por supuesto, cuando terminemos volveremos a la notación "estándar" que todos usan habitualmente.) Ahora podemos realizar muchas cosas como intercambiar puntos, cruces y otros tipos de reordenamientos de términos. Por ejemplo, el término central de la ecuación (27.10) se puede rescribir como $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}$. (Recuerden que $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.) Y el último término es igual a $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\nabla}_E$. Parece raro, pero está bien. Pero si tratamos de volver a la convención ordinaria, tenemos que arreglárnoslas para que $\boldsymbol{\nabla}$ opere únicamente sobre su "propia" variable. El primero ya está en esa forma, así que omitiremos el subíndice. El segundo necesita cierto reordenamiento para poner el $\boldsymbol{\nabla}$ delante de la $\boldsymbol{E}$, lo cual lo podemos hacer cambiando el signo e invirtiendo el producto vectorial:

$$\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{\nabla}_E) = -\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}_E\times\boldsymbol{E}).$$

Ahora está en el orden convencional por lo cual volveremos a la notación habitual. La ecuación (27.10) es equivalente a

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}). \tag{27.11}$$

(En este caso especial, una manera más rápida hubiera sido usar componentes, pero valía la pena dedicar tiempo para mostrarles el truco matemático. Probablemente no lo verán en ninguna otra parte y es muy conveniente para desligar el álgebra vectorial de las reglas sobre orden de términos con derivadas.)

Regresemos a nuestro estudio de la conservación de la energía y usemos nuestro nuevo resultado, ecuación (27.11), para transformar el término en $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}$ de la ecuación (27.7). Esa ecuación de energía se convierte en

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j} = \epsilon_0c^2\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{E}) + \epsilon_0c^2\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) - \frac{\partial}{\partial t}(\tfrac{1}{2}\epsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}). \tag{27.12}$$

Además, como se pueden dar cuenta, casi hemos terminado. Tenemos un término que es una bonita derivada respecto a t para usar en u y otro que es una hermosa divergencia que representa a $\boldsymbol{S}$. Desafortunadamente, queda el término del centro, que no es ni una divergencia ni una derivada respecto a t. Así pues, casi lo conseguimos, pero no del todo. Después de pensar un poco, tenemos que volver a las ecuaciones diferenciales de Maxwell y descubrimos que afortunadamente $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}$ es igual a $-\partial\boldsymbol{B}/\partial t$, lo cual significa que podemos transformar el término adicional en algo que es una derivada temporal pura:

$$\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{B}\cdot\left(-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}}{2}\right).$$

Ahora tenemos exactamente lo que queremos. Nuestra ecuación de energía es

$$\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{\nabla}\cdot(\epsilon_0c^2\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{E}) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon_0c^2}{2}\,\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B} + \frac{\epsilon_0}{2}\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}\right), \tag{27.13}$$

que es exactamente como la ecuación (27.6) si hacemos las *definiciones*

$$u = \frac{\epsilon_0}{2}\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{\epsilon_0c^2}{2}\,\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B} \tag{27.14}$$

y

$$\boldsymbol{S} = \epsilon_0 c^2 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}. \tag{27.15}$$

(Invirtiendo el producto vectorial se consigue que los signos salgan bien.)

Ahora bien, nuestro programa ha sido exitoso. Tenemos una expresión de la densidad de energía que es la suma de una densidad de energía "eléctrica" y una densidad de energía "magnética", cuyas formas son justamente como las que encontramos en la estática, *al obtener la energía en términos de los campos*. Además, hallamos una fórmula para el vector del flujo de energía del campo electromagnético. Este nuevo vector es $\boldsymbol{S} = \epsilon_0 c^2 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ y se llama "vector de Poynting" en honor a su descubridor. Este vector nos dice con qué rapidez la energía de campo se mueve por el espacio. La energía que fluye a través de un área pequeña da por segundo es $\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{n}\, da$, donde $\boldsymbol{n}$ es el vector unitario perpendicular a da. (Ahora que tenemos nuestras fórmulas para u y $\boldsymbol{S}$, pueden olvidarse de cómo las obtuvimos, si quieren.)

27-4 La ambigüedad de la energía de campo

Antes de encarar algunas aplicaciones de las fórmulas de Poynting [ecuaciones (27.14) y (27.15)], queremos decirles que realmente no las hemos "demostrado". Todo lo que hicimos fue encontrar una "u" y una "$\boldsymbol{S}$" *posibles*. ¿Cómo sabemos que jugando hábilmente una vez más con los términos no encontraríamos otra fórmula para "u" y otra fórmula para "$\boldsymbol{S}$"? El nuevo $\boldsymbol{S}$ y la nueva u serían diferentes pero seguirían satisfaciendo la ecuación (27.6). Es posible. Se puede hacer, pero en las fórmulas que se han encontrado siempre intervienen diversas *derivadas* del campo (con términos de segundo orden como una segunda derivada o el cuadrado de una primera derivada). De hecho, ¡hay un número infinito de posibilidades diferentes para u y $\boldsymbol{S}$, y hasta ahora nadie ha concebido una manera experimental de decidir cuál es la correcta! La gente ha conjeturado que la más simple es probablemente la correcta, pero debemos decir que no sabemos con certeza cuál es la ubicación real de la energía del campo electromagnético en el espacio. Así pues, nosotros también adoptaremos la salida fácil y diremos que la energía del campo está dada por la ecuación (27.14). Luego, el vector de flujo $\boldsymbol{S}$ tiene que estar dado por la ecuación (27.15).

Es interesante que no haya una manera única de resolver la indefinición en la ubicación de la energía de campo. A veces se sostiene que este problema puede ser resuelto empleando la teoría de la gravitación en el siguiente razonamiento. En la teoría de la gravedad, toda la energía es fuente de atracción gravitacional. Así, la densidad de energía de la electricidad tiene que estar ubicada en forma apropiada para que sepamos en qué dirección actúa la fuerza de gravedad. Sin embargo, nadie ha hecho todavía un experimento tan delicado que permita determinar la ubicación precisa de la influencia gravitacional de los campos electromagnéticos. El que los campos electromagnéticos solos puedan ser la fuente de fuerza gravitacional es una idea de la que es difícil prescindir. En efecto, se ha observado que la luz se desvía al pasar cerca del Sol; podríamos decir que el Sol atrae a la luz. ¿No quieren permitir que la luz atraiga de igual manera al Sol? De todas maneras todos aceptan siempre las expresiones simples que hemos encontrado para la ubicación de la energía electromagnética y su flujo. Y aunque a veces los resultados que se obtienen empleándolas parecen extraños, nadie ha encontrado nada errado en ellos —es decir, nada que no concuerde con los experimentos—. Así pues, seguiremos al resto del mundo —además, creemos que probablemente es perfectamente correcto—.

Agreguemos un comentario acerca de la fórmula de energía. Antes que nada, decimos que la energía por unidad de volumen en el campo es muy simple: es la energía electrostática más la energía magnética, *si* escribimos a la energía electrostática en términos de E^2 y la energía magnética como B^2. Encontramos dos expresiones de ese tipo como expresiones *posibles* para la energía cuando resolvíamos problemas estáticos. También encontramos otras fórmulas para la energía del campo electrostático, como $\rho\phi$, que es *igual* a la integral de $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}$ para el caso electrostático. Pero en un campo electrodinámico la igualdad fallaba y no

había una manera evidente de decidir cuál era la correcta. No obstante, sabemos cuál es la adecuada. Análogamente, hemos encontrado la fórmula para la energía magnética que es válida en general. La fórmula correcta para la densidad de energía de campos *dinámicos* es la ecuación (27.14).

27-5 Ejemplos de flujo de energía

Nuestra fórmula para el vector de flujo de energía $\boldsymbol{S}$ es algo completamente nuevo. Ahora estudiaremos cómo funciona en algunos casos especiales y, también, si concuerda con lo que sabíamos anteriormente. El primer ejemplo que tomaremos es la luz. En una onda luminosa tenemos un vector $\boldsymbol{E}$ y un vector $\boldsymbol{B}$ perpendiculares entre sí y a la dirección de propagación de la onda. (Véase figura 27-2.) En una onda electromagnética, el módulo de $\boldsymbol{B}$ es $1/c$ por el módulo de $\boldsymbol{E}$ y, como son perpendiculares,

$$|\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}| = \frac{E^2}{c}.$$

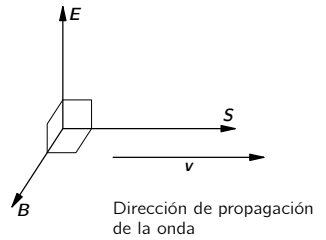


Figura 27-2. Los vectores $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{S}$ de una onda luminosa.

Entonces, para la luz, el flujo de energía por unidad de área por segundo es

$$S = \epsilon_0 c E^2. \tag{27.16}$$

Para una onda luminosa en la cual $E = E_0\cos\omega(t-x/c)$, el flujo medio de energía por unidad de tiempo por unidad de área, $\langle S\rangle_{\text{prom}}$ —que se llama "intensidad" de la luz—, es el valor medio del cuadrado del campo eléctrico multiplicado por $\epsilon_0 c$:

$$\text{Intensidad} = \langle S\rangle_{\text{prom}} = \epsilon_0 c\langle E^2\rangle_{\text{prom}}. \tag{27.17}$$

Aunque no lo crean, ya hemos deducido este resultado en la sección 31-5 del volumen I al estudiar la luz. Sabemos que es correcta porque también concuerda con algo más. Cuando tenemos un haz de luz, hay una densidad de energía en el espacio, dada por la ecuación (27.14). Usando $cB = E$ para una onda luminosa, obtenemos

$$u = \frac{\epsilon_0}{2}E^2 + \frac{\epsilon_0 c^2}{2}\left(\frac{E^2}{c^2}\right) = \epsilon_0 E^2.$$

Pero $\boldsymbol{E}$ varía en el espacio, así que la densidad media de energía es

$$\langle u\rangle_{\text{prom}} = \epsilon_0\langle E^2\rangle_{\text{prom}}. \tag{27.18}$$

Como la onda viaja a velocidad c, debemos pensar que la energía que atraviesa un metro cuadrado por segundo es c por la cantidad de energía que hay en un metro cúbico. Así pues, diríamos que

$$\langle S\rangle_{\text{prom}} = \epsilon_0 c\langle E^2\rangle_{\text{prom}}.$$

Y está bien; es igual a la ecuación (27.17).

Tomemos otro ejemplo. Aquí tenemos uno curioso. Examinemos el flujo de energía en un capacitor que estamos cargando lentamente. (No queremos frecuencias tan altas que el capacitor comience a parecerse a una cavidad resonante, sin embargo, tampoco queremos un CC.) Supongan que usamos un capacitor circular de placas paralelas del tipo que nos es familiar, como muestra la figura 27-3. Hay un campo eléctrico casi uniforme que está variando en el tiempo. En todo instante la energía electromagnética total que hay dentro es u por el volumen. Si las placas tienen un radio a y una separación h, la energía total entre las placas es

$$U = \left(\frac{\epsilon_0}{2}E^2\right)(\pi a^2 h). \tag{27.19}$$

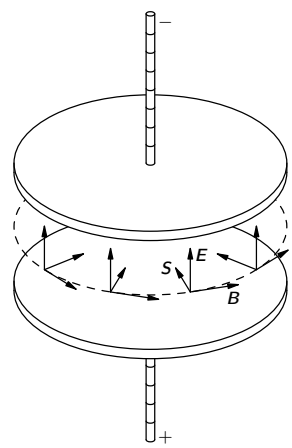


Figura 27-3. Cerca de un capacitor que se está cargando, el vector de Poynting $\boldsymbol{S}$ apunta radialmente hacia el eje.

Esta energía cambia al variar E. Cuando se está cargando el condensador, el volumen entre las placas está recibiendo energía a razón de

$$\frac{dU}{dt} = \epsilon_0\pi a^2 h E\dot{E}. \tag{27.20}$$

Por lo tanto, debe haber un flujo de energía que entra en ese volumen desde alguna parte. Por supuesto, saben que debe entrar por los alambres de carga —¡de ninguna manera!—. Como $\boldsymbol{E}$ es perpendicular a las placas no puede entrar al espacio entre éstas en esa dirección; $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ tiene que ser *paralelo* a las placas.

Recuerdan, por supuesto, que hay un campo magnético en círculos alrededor del eje cuando el capacitor se está cargando. Lo estudiamos en el capítulo 23. Empleando la última ecuación de Maxwell, encontramos que el campo magnético en el borde del capacitor está dado por

$$2\pi a c^2 B = \dot{E} \cdot \pi a^2,$$

o sea

$$B = \frac{a}{2c^2}\,\dot{E}.$$

La figura 27-3 muestra su dirección. Así pues, hay un flujo de energía proporcional a $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ que entra por los bordes, como muestra la figura. En realidad, la energía no está entrando por los alambres sino desde el espacio que rodea al capacitor.

Verifiquemos si la cantidad total de flujo a través de toda la superficie entre los bordes de las placas está de acuerdo con la variación de la energía que hay dentro por unidad de tiempo —esperemos que sea así—; para estar seguros, hicimos todo ese trabajo demostrando la ecuación (27.15), pero veamos. El área de la superficie es $2\pi ah$ y el módulo de $\boldsymbol{S} = \epsilon_0 c^2 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$ es

$$\epsilon_0 c^2 E\left(\frac{a}{2c^2}\,\dot{E}\right),$$

así que el flujo total de la energía es

$$\pi a^2 h \epsilon_0 E \dot{E}.$$

Concuerda con la ecuación (27.20). Sin embargo, nos dice algo especial: que cuando cargamos un capacitor, la energía no está viniendo por los alambres; está entrando por los bordes del espacio entre placas. ¡Eso es lo que dice esta teoría!

¿Cómo puede ser? *No* es una pregunta fácil, pero tenemos una manera de pensarla. Supongan que tuviéramos algunas cargas por encima y por debajo del capacitor y muy lejos. Cuando las cargas están lejos, hay un campo débil pero enormemente extendido que rodea el capacitor. (Véase la figura 27-4.) Luego, a medida que las cargas se juntan, el campo se hace más intenso más cerca del capacitor. Así pues, la energía de campo que está fuera se mueve hacia el capacitor y termina finalmente entre las placas.

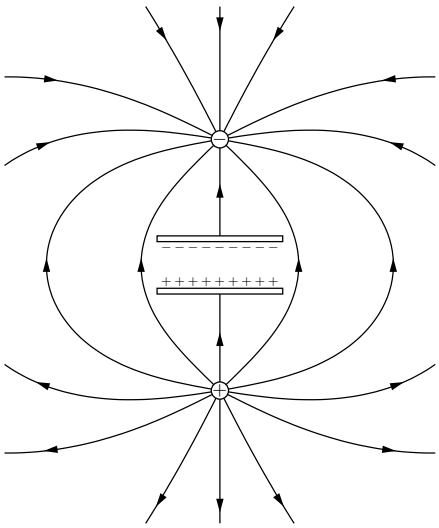


Figura 27-4. Los campos fuera de un capacitor cuando se han cargado por el aporte de dos cargas desde una gran distancia.

Como otro ejemplo, preguntemos qué ocurre en un pedazo de alambre de resistencia cuando circula corriente por él. Como el alambre tiene resistencia, hay un campo eléctrico a lo largo del mismo, que impulsa la corriente. Como hay una caída de potencial a lo largo del alambre, también hay un campo eléctrico justo fuera del alambre, paralelo a la superficie. (Véase figura 27-5.) Hay, además, un campo magnético que va alrededor del alambre debido a la corriente. Los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ son perpendiculares; en consecuencia, hay un vector de Poynting dirigido radialmente hacia adentro, como lo muestra la figura. Hay un flujo de energía que entra al alambre por todos lados. Por supuesto que es igual a la energía que se pierde en el alambre en forma de calor. Así pues, nuestra teoría "descabellada" dice que los electrones están obteniendo su energía para generar calor debido a la energía que fluye hacia el alambre desde el campo exterior. La intuición parecería indicarnos que los electrones obtienen su energía de ser empujados a lo largo del alambre, así que la energía debería estar fluyendo hacia abajo (o hacia arriba) a lo largo del alambre. Pero la teoría dice que lo que realmente está empujando a los electrones es un campo eléctrico que proviene de cargas muy lejanas y que los electrones obtienen de estos campos su energía para generar calor. De alguna manera la energía fluye desde las cargas distantes hacia una gran región del espacio y luego entra en el alambre.

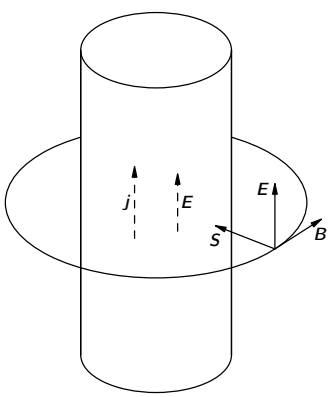


Figura 27-5. El vector de Poynting $\boldsymbol{S}$ cerca de un alambre por el que circula corriente.

Finalmente, para convencerlos realmente de que esta teoría es evidentemente loca, tomaremos un ejemplo más —un ejemplo en el que una carga eléctrica y

un imán están *en reposo* una cerca de otro: ambos completamente quietos—. Supongan que tomamos el ejemplo de una carga puntual que está cerca del centro de un imán de barra, como muestra la figura 27-6. Todo está en reposo, así que la energía no varía en el tiempo. Además, $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ son completamente estáticos. Pero el vector de Poynting dice que hay un flujo de energía porque hay un $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ que no es cero. Si examinan el flujo de energía, encuentran que simplemente da vueltas y más vueltas. No hay ninguna variación de energía en ninguna parte —todo lo que fluye hacia dentro de un volumen vuelve a fluir hacia afuera—. Es como si fluyera agua incompresible. Así pues, hay una circulación de energía en esta condición así llamada estática. ¡Y qué absurdo se está tornando!

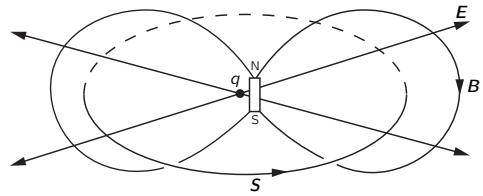


Figura 27-6. Una carga y un imán producen un vector de Poynting que circula en lazos cerrados.

No obstante, quizá no sea tan terriblemente enigmático, siempre y cuando recuerden que lo que llamamos un imán "estático" es realmente una corriente permanente en círculo. Dentro de un imán permanente los electrones están girando permanentemente. Así pues, puede que una circulación de energía por fuera no sea tan extraña después de todo.

Sin duda empiezan a tener la impresión de que la teoría de Poynting por lo menos viola parcialmente lo que ustedes intuyen como la ubicación de la energía en un campo electromagnético. Podrían creer que tienen que remendar todas sus intuiciones y que, en consecuencia, tienen que estudiar un montón de cosas aquí. Pero realmente no parece necesario. No necesitan sentir que caerán en grandes dificultades si de vez en cuando olvidan que la energía de un alambre está fluyendo hacia él desde fuera, en vez de fluir a lo largo del alambre. Parece tener muy raramente valor, al usar el concepto de conservación de la energía, observar detalladamente qué camino está siguiendo la energía. La circulación de energía alrededor de un imán y una carga parece no tener, en la mayoría de las circunstancias, absolutamente ninguna importancia. No es un detalle vital, pero es cierto que nuestras intuiciones ordinarias están completamente equivocadas.

27-6 Momentum del campo

A continuación discutiremos sobre el *momentum* del campo electromagnético. Como el campo tiene energía, tendrá cierto momentum por unidad de volumen. Llamemos $\boldsymbol{g}$ a esa densidad de momentum. Naturalmente que el momentum tiene diversas direcciones posibles, así que $\boldsymbol{g}$ tiene que ser un vector. Hablemos de una componente a la vez; tomamos primero la componente x. Como cada componente del momentum se conserva, debemos escribir una ley parecida a lo siguiente:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\text{momentum}\\ \text{de la materia}\end{pmatrix}_x=\frac{\partial g_x}{\partial t}+\begin{pmatrix}\text{flujo saliente}\\ \text{de momentum}\end{pmatrix}_x.$$

El primer miembro es fácil. La derivada del momentum de la materia respecto al tiempo es simplemente la fuerza sobre ella. Para una partícula es $\boldsymbol{F}=q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$; para una distribución de cargas, la fuerza por unidad de volumen es $(\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B})$. El término "flujo saliente de momentum" es, sin embargo, extraño. No puede ser la divergencia de un vector porque no es un escalar; es más bien la componente x de cierto vector. De todas maneras, se debe parecer probablemente a algo como

$$\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial z},$$

porque la componente x del momentum podría estar fluyendo en cualquiera de las tres direcciones. En todo caso, cualesquiera sean a, b y c, se supone que la combinación iguala al flujo saliente de la componente x del momentum.

El juego sería ahora escribir $\rho\boldsymbol{E}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B}$ únicamente en términos de $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ —eliminando ρ y $\boldsymbol{j}$ por medio de las ecuaciones de Maxwell— y luego barajar términos y hacer sustituciones para obtenerlo en una forma que se parezca a

$$\frac{\partial g_x}{\partial t}+\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial z}.$$

Luego, identificando términos, podríamos tener expresiones para g_x, a, b y c. Es mucho trabajo y no vamos a hacerlo. En su lugar, sólo vamos a hallar una expresión para $\boldsymbol{g}$, la densidad de momentum —y por un camino diferente—.

Hay un teorema importante de la mecánica que es éste: toda vez que hay un flujo de energía en cualquier circunstancia (energía de campo o cualquier otra clase de energía), la energía que fluye a través de la unidad de área por unidad de tiempo, multiplicada por $1/c^2$, es igual al momentum por unidad de volumen en el espacio. En el caso especial de la electrodinámica, este teorema da el resultado de que $\boldsymbol{g}$ es $1/c^2$ por el vector de Poynting:

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{c^2}\,\boldsymbol{S}. \tag{27.21}$$

Así pues, el vector de Poynting no sólo da el flujo de energía sino que también, si se divide entre c^2, la densidad de momentum. Con el otro análisis que sugerimos se obtendría el mismo resultado, pero es más interesante señalar este resultado más general. Daremos ahora un cierto número de ejemplos y razonamientos interesantes para convencerlos de la validez del teorema general.

Primer ejemplo: supongan que tenemos un montón de partículas en una caja —digamos que N por metro cúbico— y que se están moviendo con cierta velocidad $\boldsymbol{v}$. Consideremos ahora una superficie plana imaginaria perpendicular a $\boldsymbol{v}$. El flujo de energía a través de una unidad de área de esta superficie por segundo es Nv, el número de las que fluyen a través de la superficie por segundo, multiplicado por la energía que lleva cada una. La energía de cada partícula es $m_0c^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$. Por lo tanto, el flujo de energía por segundo es

$$Nv\,\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Pero el momentum de cada partícula es $m_0v/\sqrt{1-v^2/c^2}$, así que la *densidad* de momentum es

$$N\,\frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

que es simplemente $1/c^2$ por el flujo de energía —como dice el teorema—. Así pues, el teorema es válido para un puñado de partículas.

También es válido para la luz. Al estudiar la luz en el volumen I, vimos que cuando se absorbía energía de un haz de luz, se entregaba cierta cantidad de momentum al absorbente. De hecho, hemos demostrado en el capítulo 34 del volumen I que el momentum es $1/c$ por la energía absorbida [revisar ecuación (34.24) del volumen I]. Si dejamos que $\boldsymbol{U}$ sea la energía que llega a una unidad de área por segundo, entonces el momentum que llega a una unidad de área por segundo es $\boldsymbol{U}/c$. Pero el momentum está viajando a la velocidad c, por lo que su *densidad* frente al absorbente debe ser $\boldsymbol{U}/c^2$. Así que de nuevo el teorema es correcto.

Finalmente, daremos un razonamiento propuesto por Einstein, el cual demuestra lo mismo una vez más. Supongan que tenemos un vagón de ferrocarril sobre ruedas (que se supone sin fricción) con cierta masa M grande. En un extremo hay un dispositivo que disparará algunas partículas o luz (o lo que sea, no interesa), que luego se paran en el extremo opuesto del vagón. Originalmente había cierta energía en un extremo —digamos que la energía U indicada en la figura 27-7(a)— y luego, más tarde, está en el extremo opuesto, como muestra la figura 27-7(c). La energía U se ha desplazado una distancia L, la longitud del vagón. Ahora bien, la energía U tiene una masa U/c^2, así que si el vagón se quedara quieto, su centro de gravedad se movería. A Eistein no le gustaba la idea de que se pudiera mover el centro de gravedad de un objeto manipulando únicamente con su interior, así que supuso que es imposible mover el centro de gravedad haciendo cualquier cosa en el interior. Pero si ése es el caso, al mover la energía U de un extremo al otro, todo el vagón debe haber retrocedido cierta distancia x, como muestra la parte (c) de la figura. Pueden ver, en efecto, que la masa total del vagón, multiplicada por x, tiene que ser igual a la masa U/c^2

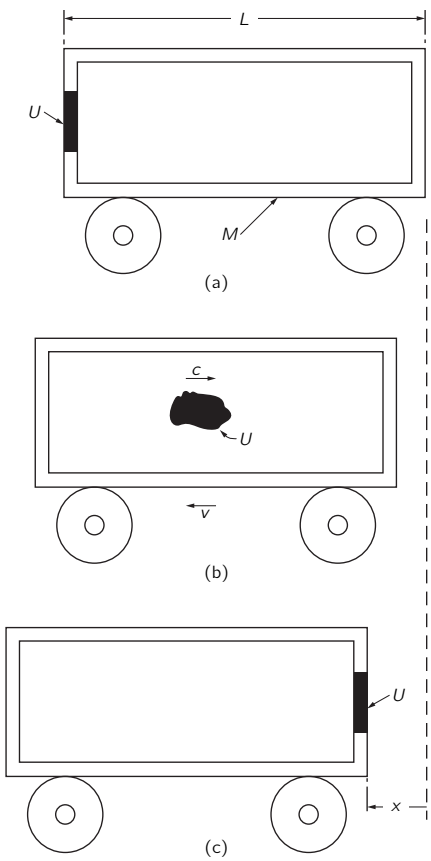


Figura 27-7. La energía U en movimiento a velocidad c lleva un momentum U/c.

de la energía que se movió multiplicada por L (suponiendo que U/c^2 es mucho menor que M):

$$Mx = \frac{U}{c^2}\,L. \tag{27.22}$$

Examinemos ahora el caso especial de la energía que lleva un destello de luz. (El razonamiento serviría también para partículas, pero seguiremos a Einstein, que estaba interesado en el problema de la luz.) ¿Qué es lo que hace que el vagón se mueva? Einstein razonó como sigue: cuando se emite la luz tiene que haber un retroceso, cierto retroceso desconocido con momentum p. Es este retroceso lo que hace que el vagón ruede hacia atrás. La velocidad v de retroceso del vagón será este momentum dividido entre la masa del vagón:

$$v = \frac{p}{M}.$$

El vagón se mueve con esta velocidad hasta que la energía U luminosa llega al extremo opuesto. Entonces, al golpear devuelve su momentum y detiene el vagón. Si x es pequeña, el tiempo durante el cual se mueve el vagón es casi igual a L/c; tenemos así

$$x = vt = v\,\frac{L}{c} = \frac{p}{M}\,\frac{L}{c}.$$

Introduciendo esta x en la ecuación (27.22), obtenemos

$$p = \frac{U}{c}.$$

Tenemos de nuevo la relación entre energía y momentum para la luz, del cual el argumento anterior muestra que la densidad del impulso es:

$$\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{U}}{c^2}. \tag{27.23}$$

Puede ser que se pregunten: ¿qué es lo importante en el teorema del centro de gravedad? Posiblemente sea *eso* lo que está mal. Quizá, pero entonces perderíamos también la conservación del momentum angular. Supongan que nuestro vagón se está moviendo sobre una vía a cierta velocidad v y que disparamos cierta energía luminosa desde la parte de *arriba* a la de *abajo* del vagón —desde A hasta B como en la figura 27-8—. Examinemos ahora el momentum angular del sistema respecto al punto P. Antes de que la energía U deje A tiene una masa $m = U/c^2$ y una velocidad v, así que tiene un momentum angular mvr_A. Cuando llega a B tiene la misma masa y para que el momentum *lineal* no varíe, todavía debe tener la velocidad v. Su momentum angular respecto a P es entonces mvr_B. Su momentum angular habrá variado *a no ser que* se le dé al vagón el momentum de retroceso apropiado al emitir la luz —es decir, a no ser que la luz lleve un momentum U/c—. Resulta que la conservación del momentum angular y el teorema del centro de gravedad están estrechamente relacionados en la teoría de la relatividad. Así pues, la conservación del momentum angular también se destruiría si nuestro teorema no fuera válido. Sea como fuere, resulta ser una ley de validez general, y en el caso de la electrodinámica podemos usarlo para obtener el momentum del campo.

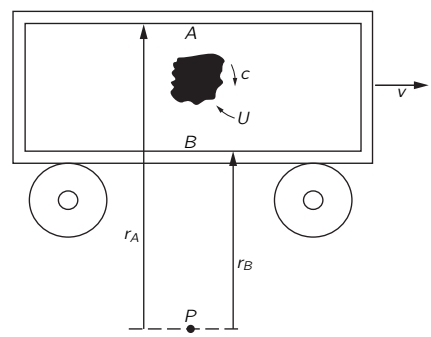


Figura 27-8. La energía U tiene que llevar un momentum U/c para que se conserve el momentum angular respecto a P.

Mencionaremos dos ejemplos más de momentum del campo electromagnético. Señalamos en la sección 26-2 el fallo de la ley de acción y reacción cuando dos partículas cargadas se mueven en trayectorias ortogonales. Las fuerzas sobre las dos partículas no se equilibran, así que la acción y la reacción no son iguales; en consecuencia, el momentum resultante de la materia tiene que estar variando. No se conserva. Pero el momentum del campo también varía en una situación como ésa. Si calculan la cantidad de momentum dada por el vector de Poynting, no es constante. Sin embargo, la variación del momentum de las partículas proviene justamente del momentum del campo, así que se conserva el momentum total de partículas más el campo.

Finalmente, otro ejemplo es el del imán y la carga mostrados en la figura 27-6. Tuvimos la poca suerte de encontrar que la energía estaba fluyendo en

círculos alrededor, pero ahora que sabemos que flujo de energía y momentum son proporcionales, también sabemos que en el espacio hay momentum circulando. Pero un momentum *circulando* significa que hay momentum *angular*. Hay, pues, momentum *angular* en el campo. ¿Recuerdan la paradoja que describimos en la sección 17-4 sobre un solenoide y algunas cargas montadas en un disco? Parecía como si al cesar la corriente todo el disco empezara a rotar. El enigma era: ¿de dónde provenía el momentum angular? La respuesta es que si tienen un campo magnético y algunas cargas, habrá un momentum angular en el campo. Debe haberlo puesto allí al establecer el campo. Cuando el campo desaparece, se devuelve el momentum angular. Así pues, el disco de la paradoja *sí* empezaría a rotar. Este místico flujo circular de energía, que a primera vista parecía tan ridículo, es absolutamente necesario. Hay realmente un flujo de momentum. Es necesario para mantener la conservación del momentum angular de todo el mundo.

28

La masa electromagnética

28-1 La energía del campo de una carga puntual

28-2 El momentum del campo de una carga en movimiento

28-3 Masa electromagnética

28-4 La fuerza de un electrón sobre sí mismo

28-5 Intentos de modificar la teoría de Maxwell

28-6 El campo de la fuerza nuclear

28-1 La energía del campo de una carga puntual

Uniendo la relatividad y las ecuaciones de Maxwell, hemos terminado nuestro principal trabajo respecto a la teoría del electromagnetismo. Existen, sin duda, algunos detalles que hemos omitido y una vasta área de la cual deberemos ocuparnos más adelante —la interacción de los campos electromagnéticos con la materia—. Pero detengámonos un momento para mostrarles que esta fabulosa construcción, que constituye un gran éxito en la explicación de muchos fenómenos, en última instancia se cae a pedazos. Cuando se va muy lejos en cualquier parte de la física, siempre se encuentran dificultades. Ahora discutiremos una dificultad muy seria —el fracaso de la teoría electromagnética clásica—. Todo este fracaso de la física clásica se debe a los efectos cuánticos. La mecánica clásica es una teoría matemáticamente consistente; sólo que no está de acuerdo con la experiencia. Sin embargo, es interesante que la teoría clásica del electromagnetismo sea una teoría insatisfactoria por sí misma. Sabemos que hay dificultades asociadas con las *ideas* de la teoría de Maxwell que ni están relacionadas directamente con la mecánica cuántica, ni ella las resuelve. Puede que digan: "Quizá sea inútil preocuparse por estas dificultades. Como la mecánica cuántica está destinada a cambiar las leyes de la electrodinámica, debemos esperar para ver qué dificultades subsisten después de la modificación". No obstante, cuando se une el electromagnetismo con la mecánica cuántica, las dificultades subsisten. De modo que no será una pérdida de tiempo considerar ahora cuáles son estas dificultades. Además tienen una gran importancia histórica. Más aún, podrán obtener cierta satisfacción por el hecho de poder ir suficientemente lejos en la teoría a fin de ver todo —incluyendo todas sus dificultades—.

El problema del que hablamos está asociado con los conceptos de momentum y energía electromagnéticos, cuando se aplican al electrón o a cualquier partícula cargada. El concepto de simples partículas cargadas y de campo electromagnético son en cierto modo incompatibles. A fin de discutir la dificultad, comenzaremos por realizar algunos ejercicios con nuestros conceptos de energía y de momentum.

Calculemos, en primer lugar, la energía de una partícula cargada. Supongan que tomamos un modelo simple de un electrón en el cual toda su carga q está uniformemente distribuida sobre la superficie de una esfera de radio a, que podremos considerar cero para el caso especial de una carga puntual. Calculemos ahora la energía en el campo electromagnético. Si la carga se encuentra quieta, no hay campo magnético, y la energía por unidad de volumen es proporcional al cuadrado del campo eléctrico. El módulo del campo eléctrico es $q/4\pi\epsilon_0 r^2$, y la densidad de energía es

$$u = \frac{\epsilon_0}{2}\,E^2 = \frac{q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}.$$

Para obtener la energía total, debemos integrar esta densidad sobre todo el espacio. Usando el elemento de volumen $4\pi r^2\,dr$, la energía total que llamaremos U_{elec} es

$$U_{\text{elec}} = \int \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r^2}\,dr.$$

Que se integra fácilmente. El límite inferior es a, y el superior ∞, así que

$$U_{\text{elec}} = \frac{1}{2}\,\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{1}{a}. \tag{28.1}$$

Si utilizamos la carga electrónica q_e para q y el símbolo e^2 en vez de $q_e^2/4\pi\epsilon_0$ entonces

$$U_{\text{elec}} = \frac{1}{2}\,\frac{e^2}{a}. \tag{28.2}$$

Todo está bien hasta que ponemos a igual a cero para la carga puntual —que es la gran dificultad—. Como la energía del campo varía inversamente con la cuarta potencia de la distancia al centro, su integral de volumen es infinita. Hay una cantidad de energía infinita en el campo que rodea una carga puntual.

¿Qué hay de malo con una energía infinita? Si la energía no puede salir sino que debe permanecer allí, ¿hay verdaderamente una dificultad cuando la energía es infinita? Por supuesto, una cantidad que resulta infinita puede ser molesta, pero lo que realmente importa es sólo si hay efectos físicos *observables*. Para responder a este problema debemos considerar otros aspectos además de la energía. Supongan que nos preguntamos cómo *cambia* la energía cuando *movemos* la carga. Si la *variación* es infinita caemos en una dificultad.

28-2 El momentum del campo de una carga en movimiento

Supongan que un electrón se está moviendo con velocidad uniforme por el espacio y supongan, por un momento, que la velocidad es baja comparada con la velocidad de la luz. Asociado con este electrón en movimiento hay un momentum —aunque el electrón no tuviese masa antes de recibir la carga— debido al momentum del campo electromagnético. Podemos demostrar que el momentum del campo tiene la dirección de la velocidad $\boldsymbol{v}$ de la carga y que, para pequeñas velocidades, es proporcional a v. Para un punto P a la distancia r del centro de la carga y con el ángulo θ respecto a la dirección del movimiento (véase figura 28-1) el campo eléctrico es radial y, como hemos visto, el campo magnético es $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}/c^2$. La densidad de momentum, ecuación (27.21) es

$$\boldsymbol{g} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}.$$

Es oblicua respecto a la dirección de movimiento, como se muestra en la figura y su módulo es

$$g = \frac{\epsilon_0 v}{c^2}\, E^2 \operatorname{sen}\theta.$$

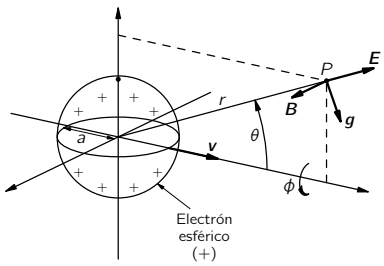


Figura 28-1. Los campos $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ y la densidad de momentum $\boldsymbol{g}$ para un electrón positivo. Para un electrón negativo, $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ se invierten pero no $\boldsymbol{g}$.

Los campos son simétricos respecto a la dirección de movimiento, así que cuando integramos sobre el espacio, las componentes transversales dan cero, resultando un momentum paralelo a $\boldsymbol{v}$. La componente de $\boldsymbol{g}$ en esta dirección es $g\operatorname{sen}\theta$, que debemos integrar sobre todo el espacio. Como elemento de volumen tomamos un anillo perpendicular a $\boldsymbol{v}$, como se muestra en la figura 28-2. Su volumen es $2\pi r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, dr$. El momentum total resulta entonces

$$\boldsymbol{p} = \int \frac{\epsilon_0 \boldsymbol{v}}{c^2}\, E^2 \operatorname{sen}^2\theta\, 2\pi r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, dr.$$

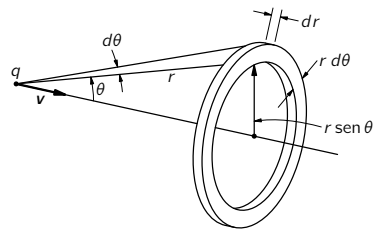


Figura 28-2. El elemento de volumen $2\pi r^2 \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, dr$ usado para calcular el momentum del campo.

Como E es independiente de θ (para $v \ll c$), podemos integrar inmediatamente sobre θ y la integral resulta

$$\int \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta = -\int (1-\cos^2\theta)\, d(\cos\theta) = -\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}.$$

Los límites de θ son 0 y π, por lo cual la integral sobre θ da solamente un factor 4/3 y se obtiene

$$\boldsymbol{p} = \frac{8\pi}{3}\,\frac{\epsilon_0 \boldsymbol{v}}{c^2} \int E^2 r^2\, dr.$$

La integral (para $v \ll c$) es la que hemos calculado hace poco para encontrar la energía; es $q^2/16\pi^2\epsilon_0^2 a$, y

$$\boldsymbol{p} = \frac{2}{3}\,\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{\boldsymbol{v}}{ac^2},$$

o

$$\boldsymbol{p} = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{ac^2}\,\boldsymbol{v}. \tag{28.3}$$

Además, el momentum del campo —el momentum electromagnético— es proporcional a $\boldsymbol{v}$. Es precisamente el que tendríamos para una partícula con masa igual al coeficiente de $\boldsymbol{v}$. Por lo tanto, podemos llamar *masa electromagnética*, m_{elec}, a este coeficiente y escribir

$$m_{\text{elec}} = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{ac^2}. \tag{28.4}$$

28-3 Masa electromagnética

¿De dónde proviene la masa? Recordemos que en nuestras leyes de la mecánica hemos supuesto que cualquier objeto "lleva" algo que llamamos masa —lo cual significa también que "lleva" un momentum proporcional a su velocidad—. Ahora descubrimos que es explicable que una partícula cargada lleve un momentum proporcional a su velocidad. Podría ser, de hecho, que la masa fuera simplemente un efecto electrodinámico. El origen de la masa es hasta ahora inexplicable. En la teoría de la electrodinámica tenemos finalmente una gran oportunidad para comprender algunas cuestiones que no comprendíamos antes. Surge inesperadamente —en realidad, de Maxwell y Poynting— que cualquier partícula cargada tenga un momentum proporcional a su velocidad por efecto de una influencia puramente electromagnética.

Seamos conservadores y por un momento digamos que hay dos clases de masa —que el momentum total de un objeto puede ser la suma de un momentum mecánico y de un momentum electromagnético—. El momentum mecánico es la masa "mecánica", m_{mec}, por $\boldsymbol{v}$. En experimentos donde medimos la masa de una partícula viendo cuál es su momentum o cómo sigue cierta órbita, estamos midiendo la masa total. Diremos, en general, que el momentum es la masa total ($m_{\text{mec}} + m_{\text{elec}}$) por la velocidad. Así pues, la masa observada puede constar de dos términos (o posiblemente más si incluimos otros campos): una parte mecánica más una parte electromagnética. Sabemos definitivamente que hay una parte electromagnética, y tenemos una fórmula para ella. Y es una posibilidad emocionante que la parte mecánica no exista —que toda la masa sea electromagnética—.

Veamos qué tamaño debe tener el electrón en el caso de no tener masa mecánica. Lo podemos encontrar poniendo la masa electromagnética de la ecuación (28.4) igual a la masa observada m_e del electrón. Encontramos

$$a = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{m_e c^2}. \tag{28.5}$$

La cantidad

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} \tag{28.6}$$

se llama "radio clásico del electrón"; su valor numérico es 2.82×10^{-13} cm, alrededor de un cienmilésimo del diámetro del átomo.

¿Por qué se llama r_0 en vez de a al radio del electrón? Porque se podría hacer igualmente bien el mismo cálculo suponiendo otra distribución de carga —la carga podría estar uniformemente distribuida en el volumen de una esfera o difundida en una pelota difusa—. Para cualquier suposición particular el factor $2/3$ se podrá cambiar por alguna otra fracción. Por ejemplo, para una carga uniformemente distribuida por todo el volumen de la esfera, $2/3$ se debe remplazar por $4/5$. En vez de discutir cuál es la distribución correcta, se decidió definir r_0 como el radio "nominal". Las diferentes teorías pueden adoptar sus coeficientes preferidos.

Continuemos desarrollando nuestra teoría electromagnética de la masa. Nuestro cálculo era válido para $v \ll c$; ¿qué sucede si vamos hacia velocidades más altas? Las primeras tentativas condujeron a una cierta confusión, pero Lorentz se dio cuenta de que la esfera cargada podría contraerse y transformarse en un

elipsoide a velocidades altas y que los campos deberían cambiar de acuerdo con las fórmulas (26.6) y (26.7) que obtuvimos para el caso relativista en el capítulo 26. Si calculan la integral para $\boldsymbol{p}$ en este caso, encuentran que para una velocidad arbitraria $\boldsymbol{v}$, el momentum se ve alterado por el factor $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$:

$$\boldsymbol{p} = \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{ac^2}\,\frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{28.7}$$

En otras palabras, la masa electromagnética crece con la velocidad, con la inversa de $\sqrt{1-v^2/c^2}$, un descubrimiento que fue hecho anteriormente de la teoría de la relatividad.

Hace tiempo se propusieron experimentos para medir la variación de la masa de una partícula con la velocidad a fin de determinar qué parte de la masa era mecánica y qué parte eléctrica. En esos tiempos se creía que la parte eléctrica *debía* variar con la velocidad, mientras que la parte mecánica *no* debía variar. Pero mientras se realizaban los experimentos, los teóricos también continuaban su labor. Poco después se desarrolló la teoría de la relatividad, la cual proponía que cualquiera fuese el origen de la masa, *siempre* debería variar como $m_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$. La ecuación (28.7) fue el comienzo de la teoría de que la masa depende de la velocidad.

Volvamos a nuestro cálculo de la energía en el campo, la cual está dada por la ecuación (28.2). De acuerdo con la teoría de la relatividad, la energía U debe tener la masa U/c^2; la ecuación (28.2) índica entonces que el campo de un electrón debe tener la masa

$$m'_{\text{elec}} = \frac{U_{\text{elec}}}{c^2} = \frac{1}{2}\,\frac{e^2}{ac^2}, \tag{28.8}$$

que no es la misma que la masa electromagnética, m_{elec}, de la ecuación (28.4). En efecto, si combinamos las ecuaciones (28.2) y (28.4), podemos escribir

$$U_{\text{elec}} = \frac{3}{4}\,m_{\text{elec}}c^2.$$

Esta fórmula fue descubierta antes de la relatividad, y cuando Einstein y otros comenzaron a darse cuenta de que siempre debería ser $U = mc^2$, hubo un gran desconcierto entre los científicos.

28-4 La fuerza de un electrón sobre sí mismo

La discrepancia entre las dos fórmulas para la masa electromagnética es particularmente molesta, porque hemos demostrado cuidadosamente que la teoría de la electrodinámica es compatible con el principio de relatividad. Y, sin embargo, la teoría de la relatividad implica sin lugar a dudas que el momentum debe ser igual a la energía por v/c^2. Así pues, estamos frente a una dificultad; tuvimos que haber cometido algún error. El error no ha sido en nuestro cálculo algebraico, pero nos hemos olvidado de otra cosa.

Al deducir nuestras ecuaciones para energía y momentum, supusimos las leyes de conservación. Supusimos que se tenía en cuenta *todas* las fuerzas y que se había incluido cualquier trabajo realizado y cualquier momentum asociado con otros mecanismos "no eléctricos". Ahora bien, si tenemos una esfera de carga, las fuerzas eléctricas son todas repulsivas y un electrón tenderá a disiparse. Debido a que el sistema tiene fuerzas no equilibradas, podemos cometer toda clase de errores en las leyes que se refieren a energía y momentum. Para tener un panorama *consistente*, debemos imaginar que hay algo que mantiene unido al electrón. La carga debe ser *mantenida* a la esfera por algo así como bandas de goma —de tal manera que impida que la carga se vuele—. Poincaré fue el primero en puntualizar que las bandas de goma —o lo que mantenga unido al electrón— deberían estar incluidas en el cálculo de la energía y del momentum. Por esta razón, las fuerzas adicionales no eléctricas son conocidas también por el nombre más elegante de "tensiones de Poincaré". Si se incluyen en el cálculo

las fuerzas adicionales, las masas obtenidas por los dos caminos cambian (de un modo que depende del detalle de las hipótesis). Y el resultado es compatible con la relatividad; es decir, la masa que resulta del cálculo del momentum es la misma que la que resulta del cálculo de la energía. No obstante, ambas contienen *dos* contribuciones: una masa electromagnética y una contribución de las tensiones de Poincaré. Solamente cuando se suman las dos tenemos una teoría consistente.

Así, es imposible obtener que toda la masa sea electromagnética en la forma que esperábamos. No es una teoría legítima si no tenemos nada más que la electrodinámica. Debe agregar algo más. Bien sea que lo llamen —"bandas de goma", o "tensiones de Poincaré" o de cualquier otra manera—, debe haber en la naturaleza otras fuerzas a fin de constituir una teoría cosistente de esta clase.

Se ve claramente que desde el momento en que introducimos fuerzas dentro del electrón, la belleza del concepto comienza a desaparecer. Las cosas se vuelven muy complicadas. Querrán preguntar: ¿cuál es la intensidad de estas tensiones? ¿Cómo se sacude el electrón? ¿Oscila? ¿Cuáles son todas sus propiedades internas? Y así sucesivamente. Es posible que un electrón tenga algunas propiedades internas complicadas. Si construimos una teoría del electrón por este camino, se podrían predecir propiedades extrañas, como modos de oscilación, que aparentemente no han sido observados. Decimos "aparentemente", porque observamos muchísimas cosas en la naturaleza a las que hasta ahora no les hemos podido dar significado. Puede que algún día descubramos que alguna de estas cuestiones (el muon, por ejemplo) se pueda explicar como una oscilación de las tensiones de Poincaré. No parece probable, pero nadie puede decirlo con certeza. Actualmente, hay mucho respecto a no comprender a las partículas fundamentales. De todas maneras, la estructura compleja que implica esta teoría es indeseable y la tentativa de expresar todas las masas en términos del electromagnetismo —al menos en la forma en que lo hemos descrito— se ha convertido en un callejón sin salida.

Razonemos un poco más sobre por qué decimos que tenemos una masa cuando el momentum del campo es proporcional a la velocidad. ¡Es fácil! La masa es el coeficiente entre momentum y velocidad. Pero podemos considerar la masa de otra manera: una partícula tiene masa si es necesario ejercer una fuerza sobre ella para acelerarla. Si observamos más detenidamente de dónde provienen las fuerzas lo entenderemos mejor. ¿Cómo sabemos que tiene que haber una fuerza? Porque hemos comprobado la ley de conservación del momentum para los campos. Si tenemos una partícula cargada y la empujamos un poco, se produce un cierto momentum en el campo electromagnético. De alguna manera tiene que haber entrado momentum al campo. Para esto debe haber una fuerza empujando al electrón a fin de ponerlo en movimiento —una fuerza además de la requerida por su inercia mecánica y debida a su interacción electromagnética—. Y debe haber una fuerza correspondiente reaccionando sobre el "propulsor". Pero, ¿de dónde proviene esta fuerza?

La imagen nos muestra algo parecido. Podemos imaginar al electrón como una esfera cargada. Cuando está en reposo, cada parte de la carga repele eléctricamente a cada una de las demás, pero las fuerzas se equilibran de a pares, de manera que no hay una fuerza *neta* resultante. [Véase figura 28-3(a).] Sin embargo, cuando el electrón se acelera las fuerzas no permanecen en equilibrio debido a que la influencia electromagnética demora cierto tiempo en ir de una parte a otra. Por ejemplo, la fuerza sobre la parte α en la figura 28-3(b) ejercida por una parte β del lado opuesto, depende de la posición de β en el instante inicial, como lo muestra la figura. Tanto el módulo como la dirección de la fuerza dependen del movimiento de la carga. Siempre que la carga se está acelerando, las fuerzas sobre varias partes del electrón podrían ser como en la figura 28-3(c). Cuando se suman todas esas fuerzas no se cancelan. Se cancelarán para una velocidad uniforme, si bien a primera vista pareciera que el retardo debería conducir a una fuerza no balanceada también para una velocidad uniforme. Pero ocurre que no hay una fuerza neta resultante a menos que el electrón sea acelerado. Con aceleración, si consideramos las fuerzas entre las diversas partes del electrón, acción y reacción no son exactamente iguales, y el electrón ejerce una fuerza *sobre sí mismo* que tiende a retardar la aceleración. El electrón se retarda, pero

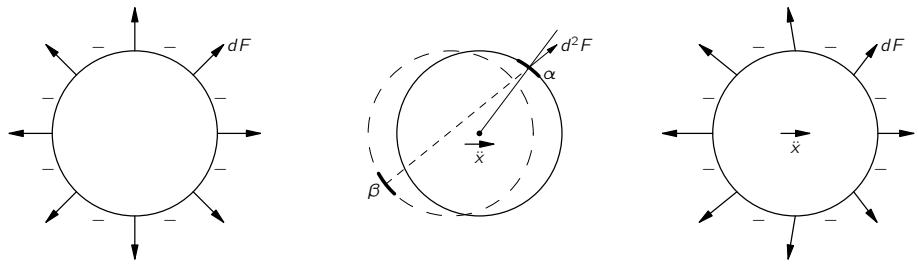


Figura 28-3. La autofuerza sobre un electrón acelerado no es cero debido al retardo. (Por dF entendemos la fuerza sobre un elemento de superficie da; por d^2F la fuerza sobre el elemento de superficie da_α debido a la carga que se encuentra sobre el elemento de superficie da_β.)

ejerciendo fuerza en sí mismo en forma similar a alguien que quisiera levantarse del suelo tirando de sus propias botas.

Es posible, pero difícil, calcular esta fuerza de autorreacción; pero no entraremos aquí en un cálculo complicado. Comentaremos lo que se obtiene para el caso particular y relativamente simple de movimiento en una sola dimensión, digamos según x. Entonces se puede escribir la autofuerza como una serie. El primer término de la serie depende de la aceleración $\ddot{x}$; el término siguiente es proporcional a $\dddot{x}$, y así sucesivamente.* El resultado es

$$F = \alpha\,\frac{e^2}{ac^2}\,\ddot{x} - \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}\,\dddot{x} + \gamma\,\frac{e^2 a}{c^4}\,\ddddot{x} + \cdots, \tag{28.9}$$

donde α y γ son coeficientes numéricos del orden de 1. El coeficiente α del término en $\ddot{x}$ depende de la distribución de carga que se adopte; si la carga está distribuida uniformemente sobre una esfera, entonces $\alpha = 2/3$. Es, pues, un término proporcional a la aceleración, que varía inversamente con el radio a del electrón y que está de acuerdo con el valor que obtuvimos en la ecuación (28.4) para m_{elec}. Si se adopta una distribución de carga diferente, de manera que α cambie, la fracción $2/3$ en la ecuación (28.4) variará de la misma manera. El término en $\dddot{x}$ es *independiente* del radio a adoptado y también de la distribución de carga adoptada; este coeficiente es *siempre* $2/3$. El término siguiente es proporcional al radio a y su coeficiente γ depende de la distribución de carga. Observarán que si hacemos tender a cero al radio a, el último término (y los de orden superior) tienden a cero; el segundo término permanece constante, pero el primer término —la masa electromagnética— tiende a infinito. Y podemos ver que este infinito aparece debido a la fuerza de una parte del electrón sobre otra —porque hemos admitido lo que quizá sea tonto, la posibilidad de que el electrón "puntual" actúe sobre sí mismo—.

28-5 Intentos de modificar la teoría de Maxwell

Discutiremos ahora cómo sería posible modificar la teoría de Maxwell de la electrodinámica de manera que pueda mantenerse la idea de que un electrón es un simple punto cargado. Se han realizado muchos intentos, y algunas de las teorías lograron mejorar las cosas de tal modo que toda la masa del electrón era electromagnética. Pero todas esas teorías han muerto. No obstante, es interesante discutir algunas de las posibilidades que han sido sugeridas —a fin de ver los esfuerzos de la mente humana—.

Empezamos nuestra teoría de la electricidad hablando de la interacción de una carga con otra. Luego edificamos una teoría de estas cargas interactuantes y terminamos en una teoría de campos. Creemos en ella lo suficiente como para poder hablar de una fuerza de una parte del electrón sobre otra. Quizá toda la dificultad sea que los electrones no actúan sobre sí mismos; quizá estamos haciendo

* Estamos usando la notación: $\dot{x} = dx/dt$, $\ddot{x} = d^2x/dt^2$, $\dddot{x} = d^3x/dt^3$, etcétera.

una extrapolación muy grande de la interacción de electrones separados a la idea de un electrón que interactúa consigo mismo. Además, han sido propuestas algunas teorías en las cuales se excluye la posibilidad de que un electrón actúe sobre sí mismo. En ellas no aparece el infinito debido a la autointeracción. Igualmente no aparece una masa electromagnética asociada con la partícula; toda la masa se vuelve ahora mecánica, pero surgen nuevas dificultades en la teoría.

Debemos decir inmediatamente que estas teorías requieren una modificación del concepto de campo electromagnético. Recordarán que dijimos al principio que la fuerza sobre una partícula en cualquier punto estaba determinada por sólo dos cantidades —$\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$—. Si abandonamos la "autofuerza" esto no puede ser cierto, porque si hay un electrón en un cierto lugar, la fuerza no está dada por los $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ totales, sino solamente por las partes debidas a las *otras* cargas. Siempre tendremos que tener en cuenta qué parte de $\boldsymbol{E}$ y de $\boldsymbol{B}$ se debe a la carga sobre la que están calculando la fuerza y qué parte se debe a las otras cargas. Esto hace mucho más complicada la teoría, pero se libera de la dificultad del infinito.

Así, podemos, *si queremos*, decir que no hay tal cosa de que el electrón actúa sobre sí mismo, y tirar a la basura todo el sistema de fuerzas de la ecuación (28.9). Sin embargo, ¡estaremos tirando el bebé con el agua del baño! Porque el segundo término en la ecuación (28.9), el término en $\dddot{x}$ es necesario. Esta fuerza hace algo bien definido. Si la descartan caen nuevamente en dificultades. Cuando aceleramos una carga, radia ondas electromagnéticas, de modo que pierde energía. Por lo tanto, para acelerar una carga, necesitamos más fuerza que la requerida para acelerar un objeto neutro de la misma masa; en caso contrario la energía no se conservaría. Así, la rapidez con que realizan trabajo sobre una carga acelerada debe ser igual a la rapidez con que se pierde energía por radiación. Hablamos antes de este efecto —se llama resistencia de radiación—. Queda aún una pregunta por contestar: ¿de dónde proviene la fuerza adicional contra la que debemos realizar este trabajo? Cuando una gran antena está radiando, la fuerza proviene de la influencia de parte de la corriente de la antena sobre otra. Para un solo electrón acelerado que está radiando en el espacio vacío, parecería que la fuerza puede provenir de un solo lugar —de la acción de una parte del electrón sobre otra—.

Encontramos anteriormente en el capítulo 32 del volumen I que una carga oscilante radia energía con cierta rapidez

$$\frac{dW}{dt} = \frac{2}{3}\,\frac{e^2(\ddot{x})^2}{c^3}. \tag{28.10}$$

Veamos qué obtenemos para la rapidez con que se realiza trabajo *sobre* un electrón contra la autofuerza (28.9). La rapidez con que se realiza trabajo es la fuerza por la velocidad, o $F\dot{x}$:

$$\frac{dW}{dt} = \alpha\,\frac{e^2}{ac^2}\,\ddot{x}\dot{x} - \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}\,\dddot{x}\dot{x} + \cdots \tag{28.11}$$

El primer término es proporcional a $d\dot{x}^2/dt$ y, por lo tanto, corresponde precisamente a la derivada respecto al tiempo de la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ asociada con la masa electromagnética. El segundo término debería corresponder a la potencia que se radia, ecuación (28.10). Pero es diferente. La discrepancia proviene de que el término de la ecuación (28.11) es verdadero en general, mientras que la ecuación (28.10) es válida solamente para una carga *oscilante*; podemos demostrar que los dos son equivalentes si el movimiento de la carga es periódico. Para hacerlo, rescribimos el segundo término de la ecuación (28.11) en la forma

$$-\frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}\,\frac{d}{dt}(\dot{x}\ddot{x}) + \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}(\ddot{x})^2,$$

que es simplemente una transformación algebraica. Si el movimiento del electrón es periódico, la cantidad $\dot{x}\ddot{x}$ vuelve periódicamente al mismo valor, de manera que si tomamos el valor *medio* de su derivada temporal obtenemos cero. El segundo término, sin embargo, es siempre positivo (es un cuadrado), de manera

que su valor medio es también positivo. Este término nos da el trabajo resultante realizado y es igual a la ecuación (28.10).

Además, el término en $\ddot{x}$ de la autofuerza se necesita para que haya conservación de energía en el sistema radiante y no lo podemos descartar. Precisamente, uno de los triunfos de Lorentz fue demostrar que había una fuerza de este tipo y que provenía de la acción de un electrón sobre sí mismo. Debemos creer en la idea de la acción de un electrón sobre sí mismo y *necesitamos* el término en $\dddot{x}$. El problema es cómo obtener este término sin que aparezca el primer término de la ecuación (28.9), que nos crea la dificultad. No lo sabemos. Ven que la teoría clásica del electrón ha llegado por sí misma a un aprieto angustioso.

Ha habido otros intentos de modificar las leyes a fin de poner las cosas en su lugar. Una manera propuesta por Born e Infeld es cambiar las ecuaciones de Maxwell de una forma complicada de modo que no resulten lineales. Entonces la energía electromagnética y el momentum resultan finitos. Pero las leyes que sugieren predicen fenómenos que nunca han sido observados. Su teoría tiene además otra dificultad sobre la que volveremos más adelante, y que es común a todas las tentativas de evitar los inconvenientes que hemos descrito.

La curiosa posibilidad siguiente fue sugerida por Dirac, quien dijo: admitamos que un electrón actúa sobre sí mismo por el *segundo* término de la ecuación (28.9) pero no por el primero. Él tuvo una idea ingeniosa para liberarse de uno pero no del otro. Observen, dijo, hicimos una suposición especial cuando tomamos solamente la onda *retardada* como solución de las ecuaciones de Maxwell; en cambio, si tomáramos la onda *adelantada*, obtendríamos algo diferente. La fórmula para la autofuerza sería

$$F = \alpha\,\frac{e^2}{ac^2}\,\ddot{x} + \frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}\,\dddot{x} + \gamma\,\frac{e^2 a}{c^4}\,\ddddot{x} + \cdots \tag{28.12}$$

Esta ecuación es precisamente como la ecuación (28.9) excepto por el signo del segundo término —y de algunos términos de orden superior— de la serie. Así, cambiar la onda retardada por la adelantada es simplemente cambiar el *signo* del retardo, lo cual no es difícil de entender que es equivalente a cambiar el signo de t en todas partes. El único efecto sobre la ecuación (28.9) es cambiar el signo de todas las derivadas temporales impares. Así pues, continuó Dirac, establezcamos la nueva regla de que un electrón actúa sobre sí mismo según la mitad de la *diferencia* entre el campo retardado y el adelantado que se producen. La diferencia entre las ecuaciones (28.9) y (28.12), dividida entre 2 es entonces

$$F = -\frac{2}{3}\,\frac{e^2}{c^3}\,\dddot{x} + \text{términos de orden superior.}$$

En todos los términos de orden superior, el radio a aparece en el numerador elevado a alguna potencia positiva. Por lo tanto, cuando pasamos al límite de una carga puntual, obtenemos solamente un término —precisamente el que necesitamos—. De esta manera, Dirac obtuvo la fuerza de resistencia de la radiación y no las fuerzas inerciales. No hay masa electromagnética y se salva la teoría clásica —pero a expensas de una hipótesis arbitraria respecto a la autofuerza—.

La arbitrariedad de la hipótesis adicional de Dirac fue eliminada, al menos hasta cierto punto, por Wheeler y Feynman, que propusieron una teoría aún más extraña. Ellos sugieren que las cargas puntuales interactúan *solamente* con las otras cargas, pero que las interacciones provienen la mitad de las ondas adelantadas y la otra mitad de las retardadas. Y lo más sorprendente es que resulta que en la mayoría de las situaciones no verán ningún efecto de las ondas adelantadas, aunque tienen el efecto de producir precisamente la fuerza de reacción de la radiación. La resistencia de la radiación *no* se debe al electrón que actúa sobre sí mismo, sino al siguiente efecto curioso. Cuando un electrón es acelerado en el instante t, sacude todas las otras cargas del universo en un instante *posterior* $t' = t + r/c$ (donde r es la distancia a la otra carga), debido a la onda *retardada*. Pero luego estas otras cargas reaccionan sobre el electrón original a través de sus

ondas *adelantadas*, que llegan en el tiempo t'', igual a t' *menos* r/c, y que, por supuesto, es precisamente t. (También reaccionan con sus ondas retardadas, pero esto corresponde simplemente a ondas "reflejadas" normales.) La combinación de las ondas adelantadas y retardadas significa que en el instante en que se acelera una carga oscilante, la misma siente el efecto de la fuerza de todas las otras cargas que "van a" absorber las ondas que irradia. ¡Ven en que líos se mete uno tratando de obtener una teoría del electrón!

Ahora vamos a describir otra clase de teoría, para mostrar cómo piensan las personas cuando se ven en dificultades. Es otra modificación de las leyes de la electrodinámica propuesta por Bopp. Dense cuenta que una vez que eligen cambiar las ecuaciones del electromagnetismo pueden empezar por donde quieran. Pueden cambiar la ley de fuerza para un electrón, o pueden cambiar las ecuaciones de Maxwell (como han visto en los ejemplos que hemos descrito), o pueden cambiar cualquier otra cosa. Una posibilidad es cambiar las fórmulas que dan los potenciales en función de cargas y corrientes. Una de nuestras fórmulas dice que los potenciales en cierto punto están dados por la densidad de corriente (o de carga) en todo otro punto y en un instante anterior. Utilizando nuestra notación de cuatro dimensiones para los potenciales, escribimos

$$A_\mu(1,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\int \frac{j_\mu(2,t-r_{12}/c)}{r_{12}}\,dV_2. \tag{28.13}$$

La idea genialmente simple de Bopp es ésta: puede que la dificultad esté en el factor $1/r$ de la integral. Supongan que empezáramos asumiendo únicamente la hipótesis de que el potencial en un punto depende de la densidad de carga de cualquier otro punto como *cierta* función de la distancia entre los puntos, por ejemplo, $f(r_{12})$. El potencial total en el punto (1) estará dado entonces por la integral de j_μ por esta función extendida a todo el espacio:

$$A_\mu(1,t) = \int j_\mu(2,t-r_{12}/c)f(r_{12})\,dV_2.$$

Eso es todo. Nada de ecuaciones diferenciales ni nada más. Bueno, una cosa más. Tratemos además de que el resultado sea relativistamente invariante. Así pues, por "distancia" deberemos tomar la "distancia" invariante entre dos puntos del espacio-tiempo. El cuadrado de esta distancia (con un signo que no importa) es

$$\begin{aligned} s_{12}^2 &= c^2(t_1-t_2)^2 - r_{12}^2 \\ &= c^2(t_1-t_2)^2 - (x_1-x_2)^2 - (y_1-y_2)^2 - (z_1-z_2)^2. \end{aligned} \tag{28.14}$$

Así pues, para una teoría relativistamente invariante, deberemos tomar cierta función del módulo de s_{12} o, lo que es lo mismo, cierta función de s_{12}^2. Así pues, la teoría de Bopp es que

$$A_\mu(1,t_1) = \int j_\mu(2,t_2)F(s_{12}^2)\,dV_2\,dt_2. \tag{28.15}$$

(La integral, por supuesto, se debe extender a todo el volumen de dimensión cuatro $dt_2\,dx_2\,dy_2\,dz_2$.)

Lo que queda por hacer es tomar una función conveniente para F. Suponemos una sola cosa respecto de F —que es muy pequeña, excepto cuando su argumento es casi nulo— de manera que una gráfica de F nos debería dar una curva como la de la figura 28-4. Es un pico estrecho con una superficie finita centrada en $s^2 = 0$, y con un ancho que podemos decir es aproximadamente a^2. Podemos decir, *grosso modo*, que cuando calculamos el potencial en el punto (1), los puntos (2) solamente producirán un efecto apreciable si $s_{12}^2 = c^2(t_1-t_2)^2 - r_{12}^2$ es diferente de cero en menos de $\pm a^2$. Podemos indicar lo anterior diciendo que F es importante solamente para

$$s_{12}^2 = c^2(t_1-t_2)^2 - r_{12}^2 \approx \pm a^2. \tag{28.16}$$

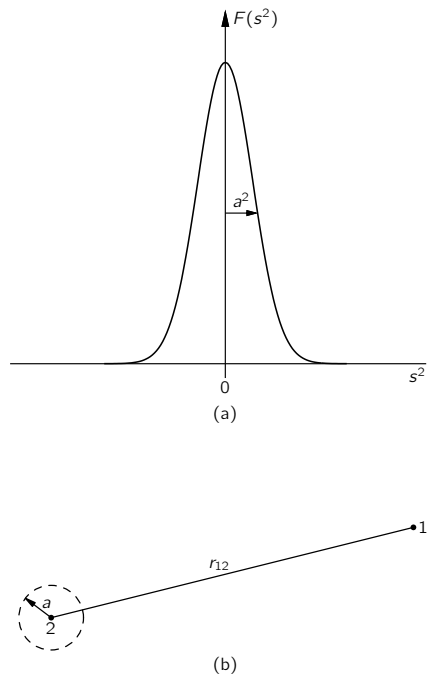


Figura 28-4. La función $F(s^2)$ en la teoría no local de Bopp.

Pueden hacerlo más matemáticamente si lo desean, pero la idea es ésta.

Supongamos ahora que a es muy pequeña comparada con el tamaño de los objetos ordinarios como motores, generadores y cosas similares de modo que en los problemas normales tienen $r_{12} \gg a$. En consecuencia la ecuación (28.16) dice que las cargas contribuyen a la integral de la ecuación (28.15) solamente cuando $t_1 - t_2$ cae en el pequeño intervalo

$$c(t_1 - t_2) \approx \sqrt{r_{12}^2 \pm a^2} = r_{12}\sqrt{1 \pm \frac{a^2}{r_{12}^2}}.$$

Como $a^2/r_{12}^2 \ll 1$, la raíz cuadrada puede aproximarse con $1 \pm a^2/2r_{12}^2$ y así

$$t_1 - t_2 = \frac{r_{12}}{c}\left(1 \pm \frac{a^2}{2r_{12}^2}\right) = \frac{r_{12}}{c} \pm \frac{a^2}{2r_{12}c}.$$

¿Cuál es el significado? Este resultado indica que los únicos *tiempos* t_2 que son importantes en la integral de A_μ, son aquellos que difieren del tiempo t_1, en el cual calculamos el potencial, en el retardo r_{12}/c —con una corrección despreciable en tanto $r_{12} \gg a$—. En otras palabras, esta teoría de Bopp se aproxima a la teoría de Maxwell —mientras estemos lejos de cualquier carga particular— en el sentido de que da los efectos de ondas retardadas.

Podemos ver aproximadamente, en efecto, qué nos dará la integral de la ecuación (28.15). Si integramos primero sobre t_2 desde $-\infty$ a $+\infty$ —tomando r_{12} fijo— entonces s_{12}^2 va también desde $-\infty$ a $+\infty$. La integral provendrá totalmente de los t_2 que caen en un pequeño intervalo de ancho $\Delta t_2 = 2 \times a^2/2r_{12}c$, centrado en $t_1 - r_{12}/c$. Digamos que la función $F(s^2)$, tiene el valor K en $s^2 = 0$, entonces la integral sobre t_2 da aproximadamente $Kj_\mu \Delta t_2$, o sea

$$\frac{Ka^2}{c}\,\frac{j_\mu}{r_{12}}.$$

Por supuesto, debemos tomar el valor de j_μ en $t_2 = t_1 - r_{12}/c$, de manera que la ecuación (28.15) se transforma en

$$A_\mu(1, t_1) = \frac{Ka^2}{c}\int \frac{j_\mu(2, t_1 - r_{12}/c)}{r_{12}}\, dV_2.$$

Si elegimos $K = 1/4\pi\epsilon_0 c a^2$ tenemos de vuelta la solución de las ecuaciones de Maxwell para el potencial retardado —¡incluyendo automáticamente la dependencia de $1/r$!—. Y todo esto proviene de la suposición simple de que el potencial en un punto del espacio-tiempo depende de la densidad de corriente en todos los otros puntos del espacio-tiempo, pero con un factor de peso que es cierta función estrecha de la distancia en dimensión cuatro entre los dos puntos. Esta teoría predice además una masa electromagnética finita para el electrón, y la energía y la masa cumplen la relación correcta para la teoría de la relatividad. Deben cumplirla, porque desde el punto de partida la teoría es relativistamente invariante y parece que todo está bien.

Hay, no obstante, una objeción fundamental a esta teoría y a todas las otras teorías que hemos descrito. Todas las partículas que conocemos obedecen las leyes de la mecánica cuántica, por lo que debe realizarse una modificación de la electrodinámica desde el punto de vista de la mecánica cuántica. La luz se comporta como fotones. No sigue en un 100 % la teoría de Maxwell. Así pues, hay que cambiar la teoría electrodinámica. Ya hemos mencionado que podría ser malgastar el tiempo esto de trabajar tanto para remendar la teoría clásica, porque podría suceder que en la electrodinámica cuántica las dificultades desaparecieran o se pudieran resolver de alguna otra manera. Sin embargo, las dificultades no se esfuman en la electrodinámica cuántica. Ésta es una de las razones por las cuales se ha dedicado tanto esfuerzo en salvar las dificultades clásicas, con la esperanza de que si se *pudieran* salvar las dificultades clásicas y *luego* se hicieran las modificaciones cuánticas, todo estaría en su lugar. La teoría de Maxwell presenta dificultades aún después de haber realizado las modificaciones cuánticas.

Los efectos cuánticos introducen realmente algunos cambios —la fórmula para la masa se modifica y aparece la constante de Planck $\hbar$— pero los resultados aún son infinitos a menos que corten alguna integración en alguna parte —como tuvimos que cortar las integrales clásicas en $r = a$—. Y los resultados obedecen a la forma en que cortan la integral. Desafortunadamente no podemos demostrarles aquí que las dificultades son en realidad básicamente las mismas, porque hemos desarrollado muy poco de la teoría de la mecánica cuántica y mucho menos la de la electrodinámica cuántica. Deberán creer entonces en nuestras palabras cuando decimos que la cuantización de la teoría electrodinámica de Maxwell da una masa infinita para un electrón puntual.

Resulta, sin embargo, que nadie ha tenido todavía éxito en construir una teoría cuántica *autoconsistente* a partir de *alguna* de las teorías modificadas. Las ideas de Born e Infeld nunca han podido convertirse satisfactoriamente en una teoría cuántica. Lo mismo puede decirse de las teorías de las ondas adelantadas y retardadas de Dirac o de Wheeler y Feynman, y también de la teoría de Bopp. Hasta el día de hoy no se conoce una solución para este problema. No sabemos cómo construir una teoría consistente —incluyendo la mecánica cuántica— que no nos dé un resultado infinito para la energía propia del electrón o de cualquier carga puntual. Al mismo tiempo, tampoco hay una teoría satisfactoria que describa una carga no puntual. Es un problema aún sin resolver.

En caso de que decidan precipitarse a construir una teoría en la cual la acción de un electrón sobre sí mismo sea completamente eliminada, es decir, la masa electromagnética pierda significado, para luego transformarla en una teoría cuántica, les advierto que seguramente caerán en dificultades. Hay evidencia experimental precisa de la existencia de la inercia electromagnética —hay evidencia de que parte de la masa de las partículas cargadas tiene origen electromagnético—.

Se solía decir en libros más viejos que como evidentemente la naturaleza no nos va a regalar dos partículas —una neutra y la otra cargada pero idénticas desde todo otro punto de vista— nunca estaremos en condiciones de decir qué parte de la masa es electromagnética y qué parte es mecánica. El caso es que la naturaleza *ha* sido suficientemente amable como para regalarnos tales objetos, de manera que comparando la masa observada para la partícula cargada con la de la neutra, podemos decir si hay masa electromagnética. Por ejemplo, hay neutrones y protones. Interactúan entre sí con fuerzas tremendas —las fuerzas nucleares— cuyo origen es desconocido. Sin embargo, como ya lo hemos dicho, las fuerzas nucleares tienen una propiedad notable. En lo que a ellas respecta el neutrón y el protón son exactamente iguales. Las fuerzas *nucleares* entre neutrón y neutrón, entre neutrón y protón y entre protón y protón son idénticas hasta donde podemos discernir. Solamente las pequeñas fuerzas electromagnéticas son diferentes; eléctricamente el protón y el neutrón son tan diferentes como el día y la noche. Esto es precisamente lo que queríamos. Hay dos partículas, idénticas desde el punto de vista de la interacción fuerte, pero eléctricamente diferentes. Y tienen además una pequeña diferencia en las masas. La diferencia de masa entre el protón y el neutrón —expresada como la diferencia de las energías en reposo mc^2 y en unidades de MeV— es aproximadamente 1.3 MeV que es alrededor de 2.6 veces la masa del electrón. Así, la teoría clásica predecirá entonces un radio de aproximadamente $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{2}$ del radio clásico del electrón, o sea, alrededor de 10^{-13} cm. Por supuesto, en realidad se deberá usar la teoría cuántica, pero por algún accidente extraño todas las constantes —2π y $\hbar$, etc.— aparecen de tal modo que la teoría cuántica da aproximadamente el mismo radio que la teoría clásica. ¡La única dificultad es que el *signo* está mal! El neutrón es *más pesado* que el protón.

La naturaleza nos ha dado también varios otros pares —o ternas— de partículas que parecen ser exactamente iguales excepto por su carga eléctrica. Interactúan con protones y neutrones, por medio de la denominada interacción "fuerte" de las fuerzas nucleares. En tales interacciones, las partículas de una clase determinada —los mesones π, por ejemplo— se comportan en todos los aspectos como un solo objeto *excepto* por su carga eléctrica. En la tabla 28-1 damos una lista de tales partículas, junto con sus masas medidas. Los mesones π cargados —positiva

Tabla 28-1

Masas de partículas

Partícula	Carga (electrónica)	Masa (MeV)	Δm[1] (MeV)
n (neutrón)	0	939.5	
p (protón)	+1	938.2	−1.3
π (mesón π)	0	135.0	
	±1	139.6	+4.6
K (mesón K)	0	497.8	
	±1	493.9	−3.9
Σ (sigma)	0	1 191.5	
	+1	1 189.4	−2.1
	−1	1 196.0	+4.5

[1] Δm = (Masa de la cargada) − (Masa de la neutra).

o negativamente— tienen una masa de 139.6 MeV pero el mesón π neutro es 4.6 MeV más liviano. Creemos que esta diferencia de masa es electromagnética; debería corresponder a una partícula de radio 3 o 4×10^{-14} cm. Pueden ver en la tabla que las diferencias de masa de las otras partículas son generalmente del mismo orden.

Ahora bien, el tamaño de estas partículas se puede determinar por medio de otros métodos, por ejemplo, por los diámetros que parecen tener en las colisiones a altas energías. Así, si cortamos nuestras integrales de la energía del campo en el radio obtenido por estos otros métodos la masa electromagnética se presenta en general de acuerdo a la teoría electromagnética. Ésta es la razón por la cual creemos que las diferencias representan la masa electromagnética.

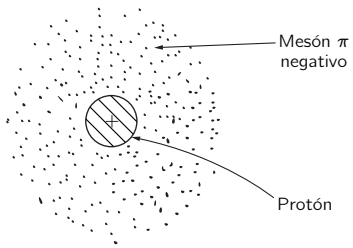


Figura 28-5. Un neutrón puede existir a veces como un protón circundado por un mesón π negativo.

Sin duda les preocupan los diferentes signos de las diferencias de masa que aparecen en la tabla. Es fácil ver por qué las partículas cargadas deben ser más pesadas que las neutras. Pero ¿y los pares como el protón y el neutrón, donde la masa medida resulta al revés? Bueno, lo que les sucede es que estas partículas son complicadas y el cálculo de la masa electromagnética debe ser más elaborado para ellas. Por ejemplo, aunque el neutrón no tiene carga *neta*, *sí* tiene una distribución de carga en su interior —solamente su carga *neta* es cero—. En efecto, creemos que el neutrón se presenta —al menos a veces— como un protón con un mesón π negativo en una "nube" alrededor de él, como muestra la figura 28-5. Aunque el neutrón es "neutro" porque su carga total es cero, quedan energías electromagnéticas (por ejemplo, tiene un momento magnético), de manera que no es fácil decir cuál es el signo de la diferencia de masa electromagnética sin una teoría detallada de la estructura interna.

Solamente deseamos aquí recalcar los siguientes puntos: (1) la teoría electromagnética predice la existencia de una masa electromagnética, pero al hacerlo se viene al suelo porque no nos da una teoría consistente —y lo mismo podemos decir en cuanto a las modificaciones cuánticas—; (2) hay evidencia experimental de la existencia de la masa electromagnética, y (3) todas estas masas son aproximadamente iguales a la masa de un electrón. Así pues, volvemos nuevamente a la idea original de Lorentz —puede que toda la masa de un electrón sea puramente electromagnética, puede que todos los 0.511 MeV se deban a la electrodinámica. ¿Es o no así? No tenemos una teoría, así que no lo podemos decir.

Debemos mencionar un elemento más de información, que es el más molesto. Existe otra partícula en el universo llamada *muon* —o μ-mesón—, que hasta donde sabemos no difiere del electrón, sino en su masa. Actúa en todos los aspectos como un electrón: interactúa con los neutrinos y con el campo electromagnético y no tiene fuerzas nucleares. No hace nada distinto de lo que hace un electrón —al menos, nada que no se pueda comprender como una consecuencia de su masa muy elevada (206.77 veces la del electrón)—. Por lo tanto, cuando alguien tenga

finalmente una explicación para la masa del electrón, se le presentará el enigma de obtener el origen de la masa del muon. ¿Por qué? Porque cualquier cosa que haga el electrón también deberá hacerla el muon —pues la masa deberá resultar la misma—. Hay quienes creen firmemente en la idea de que el muon y el electrón son una misma partícula y que en la teoría final de la masa, la fórmula para la masa será una ecuación cuadrática con dos raíces —una para cada partícula—. También hay quienes proponen que debe haber una ecuación trascendente con un número infinito de raíces, y que se dedican a conjeturar cuáles deben ser las masas de las otras partículas de la serie y por qué estas partículas no han sido descubiertas todavía.

28-6 El campo de la fuerza nuclear

Queremos hacer algunas consideraciones más sobre la parte de la masa de las partículas nucleares que no es electromagnética. ¿De dónde proviene la otra gran fracción de la masa? Hay otras fuerzas además de las electrodinámicas —como las fuerzas nucleares— que tienen su propia teoría de campos, aunque nadie sabe si las teorías actuales son correctas. Hay teorías que predicen además una energía de campo que da a las partículas nucleares un término de masa análogo al de la masa electromagnética; podemos llamarlo "masa del campo mesónico π". Presumiblemente es muy grande, puesto que las fuerzas son grandes, y es posiblemente el origen de la masa de las partículas pesadas. Sin embargo, las teorías del campo mesónico están aún en pañales. Aun con la teoría bien desarrollada del electromagnetismo, nos fue imposible pasar de primera base en la explicación de la masa del electrón. Con la teoría de los mesones hacemos un *strike*.

Podemos detenernos un poco en delinear la teoría de los mesones, por su interesante conexión con la electrodinámica. En la electrodinámica se puede describir el campo en términos de un potencial de dimensión cuatro que satisface la ecuación

$$\Box^2 A_\mu = \text{fuentes}.$$

Ahora bien, hemos visto que partes del campo pueden ser radiadas, así que pueden existir en forma separada de la fuente. Son los fotones de luz, los cuales están descritos por una ecuación diferencial sin fuentes:

$$\Box^2 A_\mu = 0.$$

Se ha pensado que el campo de las fuerzas nucleares debe tener también sus propios "fotones" —se trataría presumiblemente de los mesones π— y que estarían descritos por una ecuación diferencial análoga. (A causa de la debilidad del cerebro humano, no podemos pensar en algo realmente nuevo, así que razonamos por analogía con lo que conocemos.) Así pues, la ecuación mesónica podría ser

$$\Box^2 \phi = 0,$$

donde ϕ podría ser un vector de dimensión cuatro diferente, o bien, quizás un escalar. Detectamos que los piones no tienen polarización, por lo que ϕ debe ser un escalar. Con la ecuación simple $\Box^2\phi = 0$, el campo mesónico variará con la distancia a la fuente como $1/r^2$, precisamente como lo hace el campo eléctrico. Pero sabemos que las fuerzas nucleares tienen un radio de acción mucho más corto, por lo que la ecuación simple no funciona. Hay una manera de cambiar la cuestión sin destruir la invariancia relativista: podemos sumar o restar al d'Alembertiano una constante multiplicada por ϕ. Por eso Yukawa sugirió que los cuantos libres del campo de las fuerzas nucleares podían obedecer la ecuación

$$-\Box^2\phi - \mu^2\phi = 0, \tag{28.17}$$

donde μ^2 es una constante —que es un invariante escalar—. (Como $\Box^2$ es un operador diferencial escalar en cuatro dimensiones, su invariancia no cambia si le sumamos otro escalar.)

Veamos qué nos da la ecuación (28.17) para la fuerza nuclear cuando las cosas no varían en el tiempo. Necesitamos una solución esféricamente simétrica de

$$\nabla^2\phi - \mu^2\phi = 0$$

alrededor de cierta fuente puntual, por ejemplo, el origen. Si ϕ depende solamente de r sabemos que

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi).$$

Tenemos así la ecuación

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) - \mu^2\phi = 0$$

o sea

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\phi) = \mu^2(r\phi).$$

Si consideramos $(r\phi)$ como nuestra variable dependiente, ésta es una ecuación que hemos visto muchas veces. Su solución es

$$r\phi = Ke^{\pm\mu r}.$$

Claramente ϕ no se hace infinita para r grande, así que el signo + en el exponente queda excluido. La solución es

$$\phi = K\,\frac{e^{-\mu r}}{r}. \tag{28.18}$$

Esta función se llama *potencial de Yukawa*. Para una fuerza atractiva K es un número negativo cuyo valor debe ajustarse de modo que se adapte a la intensidad de las fuerzas encontradas experimentalmente.

El potencial de Yukawa para las fuerzas nucleares cae más rápidamente que $1/r$ debido al factor exponencial. El potencial —y por lo tanto la fuerza— cae a cero mucho más rápidamente que $1/r$ para distancias mayores que $1/\mu$ como lo muestra la figura 28-6. El "alcance" de las fuerzas nucleares es mucho menor que el "alcance" de las fuerzas electrostáticas. Se ha encontrado experimentalmente que las fuerzas nucleares no se extienden más allá de aproximadamente 10^{-13} cm, por lo que $\mu \approx 10^{15}$ m^{-1}.

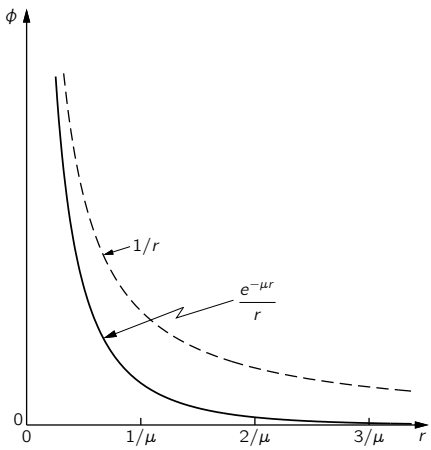


Figura 28-6. Potencial de Yukawa $e^{-\mu r}/r$, comparado con el potencial de Coulomb $1/r$.

Finalmente, examinemos la solución de la ecuación (28.17) para ondas libres. Siempre que sustituimos

$$\phi = \phi_0 e^{i(\omega t - kz)}$$

en la ecuación (28.17), obtenemos que

$$\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \mu^2 = 0.$$

Relacionando la frecuencia con la energía y el número de onda con el momentum, como hicimos al final del capítulo 34 del volumen I, obtenemos que

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = \mu^2\hbar^2,$$

que dice que el "fotón" de Yukawa tiene una masa igual a $\mu\hbar/c$. Si usamos para μ el valor estimado de 10^{15} m^{-1}, que da el alcance observado para las fuerzas nucleares, la masa resulta 3×10^{-25} g, o 170 MeV, que es más o menos la masa observada de los mesones π. Así, por medio de una analogía con la electrodinámica, podemos decir que el mesón π es el "fotón" del campo de las fuerzas nucleares. Pero ahora hemos llevado los conceptos de la electrodinámica a regiones donde puede que realmente no sean válidos —hemos ido más allá de la electrodinámica entrando en el problema de las fuerzas nucleares—.

29

El movimiento de cargas en campos eléctricos y magnéticos

29-1 Movimiento en un campo eléctrico o magnético uniforme
29-2 Análisis de momentum
29-3 Una lente electrostática
29-4 Una lente magnética
29-5 El microscopio electrónico
29-6 Campos guía en aceleradores
29-7 Enfoque con gradiente alternado
29-8 Movimiento en campos eléctricos y magnéticos cruzados

Revisar
Volumen I, capítulo 30, *Difracción*

29-1 Movimiento en un campo eléctrico o magnético uniforme

Ahora describiremos —principalmente en forma cuantitativa— los movimientos de cargas en diversas circunstancias. Así, la mayoría de los fenómenos interesantes en los que las cargas se están moviendo en campos se producen en situaciones muy complicadas, con muchas cargas interactuando entre sí. Por ejemplo, cuando una onda electromagnética pasa a través de un bloque de material o un plasma, millones y millones de cargas interactúan con las ondas y entre sí. Volveremos a este problema más tarde, pero por ahora queremos tan sólo discutir un problema más sencillo, el de los movimientos de una sola carga en un campo *dado*. De este modo desatendemos todas las otras cargas —excepto, por supuesto, las cargas y corrientes que hay en alguna parte para producir los campos que supondremos—.

Probablemente primero deberíamos preguntarnos acerca del movimiento de una partícula en un campo eléctrico uniforme. A velocidades bajas, el movimiento no es particularmente interesante —es sólo una aceleración uniforme en la dirección del campo—. Sin embargo, si la partícula adquiere suficiente energía para volverse relativista, el movimiento se torna más complicado. Pero les dejaremos la solución correspondiente para que se entretengan con ella.

Luego, consideremos el movimiento en un campo magnético uniforme con campo eléctrico cero. Ya resolvimos este problema —una solución es que la partícula va en un círculo—. La fuerza magnética $q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$ siempre es perpendicular al movimiento, así que $d\boldsymbol{p}/dt$ es perpendicular a $\boldsymbol{p}$ y tiene el módulo vp/R, donde R es el radio del círculo:

$$F = qvB = \frac{vp}{R}.$$

El radio de la órbita circular es

$$R = \frac{p}{qB}. \tag{29.1}$$

Ésta es solamente una posibilidad. Si la partícula tiene una componente de su movimiento en la dirección del campo, ese movimiento es constante, puesto que no hay componente de la fuerza magnética en la dirección del campo. El movimiento general de una partícula en un campo magnético uniforme es una velocidad constante paralela a $\boldsymbol{B}$ y un movimiento circular perpendicular a $\boldsymbol{B}$ —la trayectoria es una hélice cilíndrica (figura 29-1)—. El radio de la hélice está dado por la ecuación (29.1) si sustituimos p por $p_\perp$, la componente del momentum perpendicular al campo.

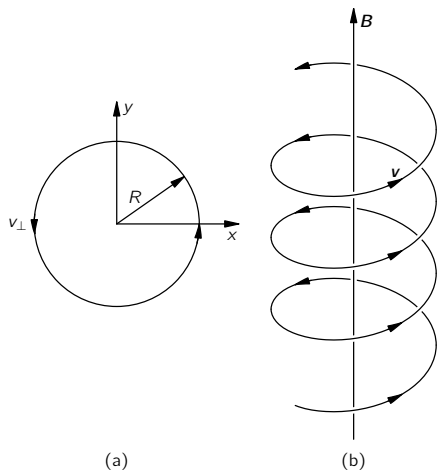


Figura 29-1. Movimiento de una partícula en un campo magnético uniforme.

29-2 Análisis de momentum

A menudo se usa un campo magnético uniforme cuando se hace un "analizador de momentum" o "espectrómetro de momentum", para partículas cargadas a altas energías. Supongan que se disparan partículas cargadas dentro de un campo magnético uniforme en el punto A en la figura 29-2(a), siendo el campo magnético perpendicular al plano del dibujo. Cada partícula describirá un círculo cuyo radio es proporcional a su momentum. Si todas las partículas entran perpendicularmente al borde del campo, abandonarán el campo a una distancia x (desde A) que es proporcional a su momentum p. Un contador colocado

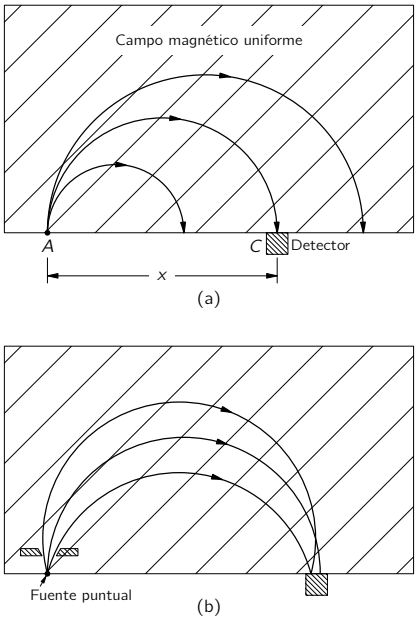


Figura 29-2. Espectrómetro de momentum con campo uniforme y enfoque a 180°: (a) momenta diferentes; (b) ángulos diferentes. (El campo magnético está dirigido perpendicularmente al plano de la figura.)

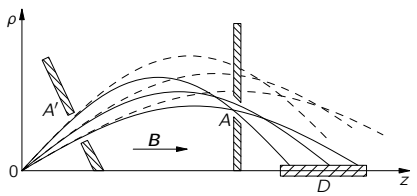


Figura 29-3. Espectrómetro de campo axial.

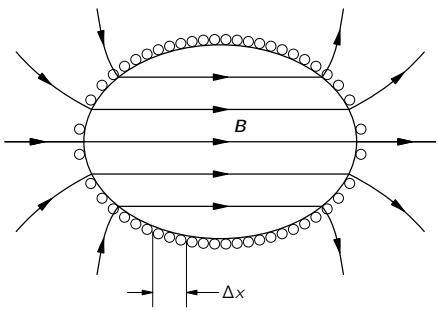


Figura 29-4. Una bobina elipsoidal con corrientes iguales en cada intervalo axial Δx produce un campo magnético uniforme dentro.

en un punto cualquiera como C, detectará solamente aquellas partículas cuyo momentum esté en un intervalo Δp cerca del momentum $p = qBx/2$.

Por supuesto, no es necesario que las partículas completen 180° antes de que sean contadas, pero los llamados "espectrómetros de 180°" tienen una propiedad especial. No es necesario que todas las partículas entren perpendicularmente al borde del campo. La figura 29-2(b) muestra las trayectorias de tres partículas, todas con el *mismo* momentum pero que entran al campo con diferentes ángulos. Vean que toman diferentes trayectorias, pero todas dejan el campo muy cerca del punto C. Decimos que hay un "foco". Tal propiedad de enfoque tiene la ventaja de que se pueden aceptar ángulos grandes en A —aunque comúnmente se imponen algunos límites, como se muestra en la figura—. Una aceptación de ángulos grandes generalmente significa que se cuentan más partículas en un tiempo dado, disminuyendo el tiempo necesario para una medición dada.

Cambiando el campo magnético, o moviendo el contador en la dirección x, o usando muchos contadores para cubrir un intervalo de x, se puede medir el "espectro" de momentum del haz entrante. [Por espectro del momentum $f(p)$ entendemos que el número de partículas con momentum entre p y $(p + dp)$ es $f(p)dp$.] Tales mediciones han sido hechas, por ejemplo, para determinar la distribución de energías en la desintegración β de varios núcleos.

Hay muchas formas de espectrómetros de momentum, pero describiremos uno más, que tiene un ángulo *sólido* de aceptación particularmente grande. Se basa en las órbitas helicoidales en un campo uniforme como la mostrada en la figura 29-1. Pensemos en un sistema de coordenadas cilíndricas —ρ, θ, z— establecido con el eje z en la dirección del campo. Si se emite una partícula desde el origen formando un ángulo α con el eje z, se moverá en una espiral cuya ecuación es

$$\rho = a \operatorname{sen} kz, \qquad \theta = bz,$$

donde a, b y k son parámetros que fácilmente se pueden calcular en función de p, α y el campo magnético B. Si representamos la distancia ρ desde el eje en función de z para un momentum dado, pero para diferentes ángulos iniciales, obtendremos curvas como las líneas continuas en la figura 29-3. (Recuerden que esto es una especie de proyección de una trayectoria helicoidal.) Cuando el ángulo entre el eje y la dirección inicial es grande, el valor pico de ρ es grande, pero la velocidad longitudinal es menor, así que las trayectorias para ángulos diferentes tienden a unirse en una especie de "foco" cerca del punto A de la figura. Siempre que pongamos una abertura estrecha en A, las partículas en un intervalo de ángulos iniciales pueden pasar y llegar hasta el eje, donde se pueden contar con un detector largo D.

Las partículas que abandonan la fuente en el origen con un momentum alto pero en los mismos ángulos, siguen la trayectoria mostrada por las líneas discontinuas y no pasan a través de la abertura en A. De modo que el aparato selecciona un intervalo pequeño de momentum. La ventaja sobre el primer espectrómetro descrito es que la abertura A —y la abertura A'— pueden ser un anillo, así que se aceptan partículas que abandonan la fuente en un ángulo sólido bastante grande. Se usa una gran fracción de las partículas provenientes de la fuente —una ventaja importante para fuentes débiles o para mediciones muy precisas—.

Se paga por esta ventaja, no obstante, debido a que se requiere un volumen grande de campo magnético uniforme y generalmente esto es práctico sólo para partículas de baja energía. Recuerden que una forma de hacer un campo magnético, es enrollar una bobina sobre una esfera con una densidad de corriente de superficie proporcional al seno del ángulo. También pueden demostrar que lo mismo es cierto para un elipsoide de rotación. De modo que tales espectrómetros a menudo se hacen enrollando una bobina elíptica sobre una estructura de madera (o aluminio). Todo lo que se necesita es que la corriente en cada intervalo de distancia axial Δx sea la misma, como muestra la figura 29-4.

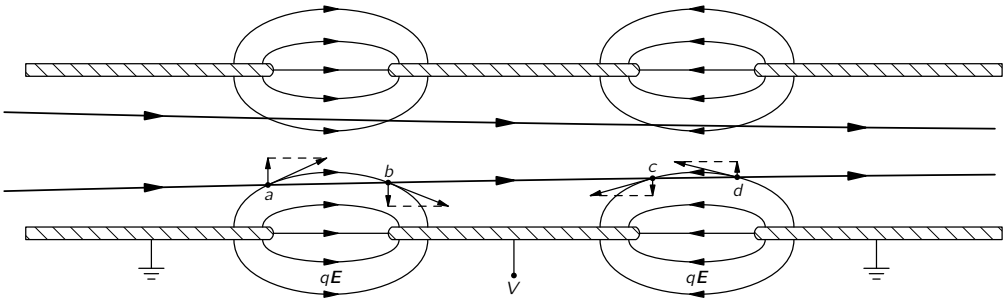


Figura 29-5. Una lente electrónica. Las líneas de campo mostradas son "líneas de fuerza", esto es, de $q\boldsymbol{E}$.

29-3 Una lente electrostática

El enfoque de partículas tiene muchas aplicaciones. Por ejemplo, los electrones que abandonan el cátodo en un tubo de TV son llevados a un foco en la pantalla —para hacer un fino punto—. En este caso, uno quiere tomar electrones de la misma energía pero con diferentes ángulos iniciales y llevarlos a un punto pequeño. El problema es parecido al de enfocar luz con una lente, y los dispositivos que realizan el trabajo correspondiente para partículas, también se llaman lentes.

Un ejemplo de lente para electrones está representado en la figura 29-5. Es una lente "electrostática" cuyo funcionamiento depende del campo eléctrico entre dos electrodos adyacentes. Su funcionamiento se puede comprender considerando lo que le sucede a un haz paralelo que entre desde la izquierda. Cuando los electrones llegan a la región a, experimentan una fuerza con una componente lateral y adquieren un cierto impulso que los desvía hacia el eje. Podrían pensar que obtendrían un impulso igual y opuesto en la región b, pero esto no sucede. Cuando los electrones alcanzan b han ganado energía y así *tardan menos tiempo* en la región b. Las fuerzas son las mismas, pero el tiempo es más corto, así que el impulso es menor. A través de las regiones a y b hay un impulso axial resultante y los electrones son desviados hacia un punto común. Al abandonar la región de alto voltaje las partículas reciben otro empuje hacia el eje. La fuerza sale en la región c y entra en la región d, pero las partículas permanecen más tiempo en la última región, así que hay otra vez un impulso resultante. Para distancias no muy alejadas del eje, el impulso total a través de la lente es proporcional a la distancia al eje (¿pueden ver por qué?), y ésta es precisamente la condición necesaria para el enfoque tipo lente.

Pueden usar el mismo razonamiento para demostrar que hay enfoque siempre y cuando el potencial del electrodo intermedio es positivo o negativo respecto a los otros dos. Lentes electrostáticas de este tipo se usan comúnmente en tubos de rayos catódicos y en algunos microscopios electrónicos.

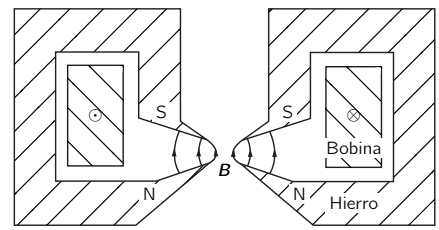


Figura 29-6. Una lente magnética.

29-4 Una lente magnética

Otra clase de lente —que se encuentra a menudo en microscopios electrónicos— es la lente magnética esbozada esquemáticamente en la figura 29-6. Un electroimán simétrico cilíndricamente tiene piezas polares circulares muy puntiagudas que producen un fuerte campo no uniforme en una región pequeña. Los electrones que viajen verticalmente a través de esta región son enfocados. Pueden comprender el mecanismo observando la vista ampliada de la región de las piezas polares dibujada en la figura 29-7. Consideren dos electrones a y b que abandonan la fuente S formando cierto ángulo respecto al eje. Cuando el electrón a alcanza el principio del campo, se desvía *alejándose de ustedes*, debido a la componente horizontal del campo. Pero entonces tendrá una velocidad lateral, así que cuando atraviese el fuerte campo vertical, adquirirá un impulso hacia el eje. La fuerza magnética le quita su movimiento lateral cuando abandona

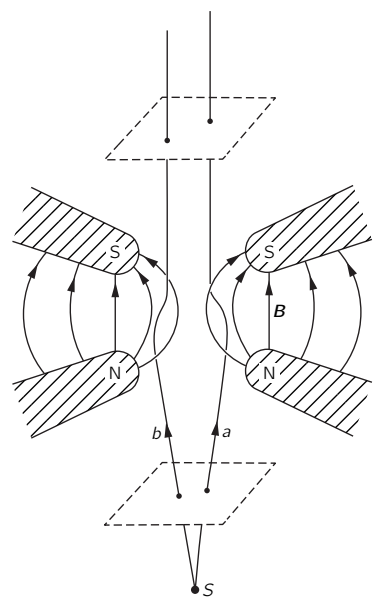


Figura 29-7. Movimiento de electrones en la lente magnética.

el campo, de modo que el efecto resultante es un impulso hacia el eje más una "rotación" alrededor del eje. Todas las fuerzas sobre la partícula b son opuestas, así que también es desviada hacia el eje. En la figura, los electrones divergentes son obligados a seguir trayectorias paralelas. La acción es como una lente con un objeto en el punto focal. Se puede usar otra lente similar más adelante para enfocar de nuevo los electrones en un solo punto, formando una imagen de la fuente S.

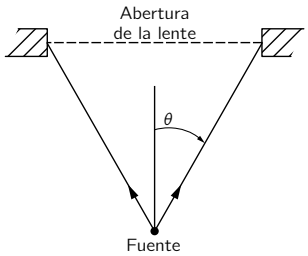


Figura 29-8. La resolución de un microscopio está limitada por el ángulo subtendido desde la fuente.

29-5 El microscopio electrónico

Saben que los microscopios electrónicos pueden "ver" objetos demasiado pequeños para que los vean microscopios ópticos. Discutimos en el capítulo 30 del volumen I las limitaciones básicas de cualquier sistema óptico debido a la difracción de la abertura de la lente. Si la abertura de la lente subtiende el ángulo 2θ desde una fuente (véase figura 29-8), dos manchas vecinas no se pueden ver separadas si están más cerca que

$$\delta \approx \frac{\lambda}{\operatorname{sen}\theta},$$

donde λ es la longitud de onda de la luz. Con el mejor microscopio óptico, θ se aproxima al límite teórico de 90°, así que δ es más o menos igual a λ, o aproximadamente 5 000 ángstroms.

Las mismas limitaciones también se podrían aplicar a un microscopio electrónico, pero allí la longitud de onda es —para electrones de 50 kilovoltios— cerca de 0.05 ángstroms. Si uno pudiera usar una abertura de lente de 30° aproximadamente, se podrían ver objetos a una distancia de $\frac{1}{5}$ de ángstrom. Como los átomos en las moléculas están separados de manera común en 1 o 2 ángstroms, podríamos obtener fotografías de moléculas. La biología sería fácil; tendríamos una fotografía de la estructura del ADN. ¡Qué cosa tan fabulosa! Además, la mayoría de las investigaciones actuales en biología molecular es intentar obtener la forma de moléculas orgánicas complejas. ¡Si sólo pudiéramos verlas!

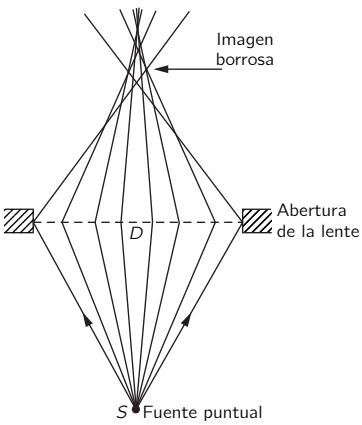


Figura 29-9. Aberración esférica de una lente.

Desafortunadamente, el mejor poder de resolución que ha sido alcanzado en un microscopio electrónico es alrededor de 20 ángstroms. La razón es que nadie ha diseñado una lente con una abertura grande. Todas las lentes tienen "aberración esférica", lo cual significa que los rayos con grandes ángulos respecto al eje tienen un punto focal diferente al de los rayos cercanos al eje, como se muestra en la figura 29-9. Debido a técnicas especiales, las lentes de microscopios ópticos se pueden hacer con una aberración esférica despreciable, pero nadie ha sido capaz de hacer una lente electrónica que evite la aberración esférica.

En realidad, se puede demostrar que cualquier lente electrostática o magnética del tipo que hemos descrito debe tener una cantidad irreducible de aberración esférica. Esta aberración —junto con la difracción— limita tener la facultad de resolución de los microscopios electrónicos a su valor actual.

Las limitaciones que hemos mencionado no se aplican a campos eléctricos y magnéticos que no tienen simetría axial o que no son constantes en el tiempo. Quizá algún día alguien imagine un nuevo tipo de lente para electrones que superara la aberración inherente de la lente para electrones simples. Entonces podremos fotografiar directamente los átomos. ¡Tal vez algún día los compuestos químicos serán analizados observando la posición de los átomos en lugar de observar el color de un precipitado!

29-6 Campos guía en aceleradores

Los campos magnéticos también son usados para producir trayectorias especiales de partículas en aceleradores de partículas de alta energía. Máquinas como el ciclotrón y el sincrotrón llevan las partículas a energías altas pasándolas repetidamente a través de un campo eléctrico. Las partículas se mantienen en sus órbitas cíclicas mediante un campo magnético.

Hemos visto que una partícula en un campo magnético uniforme seguirá una órbita circular. Esto, sin embargo, es cierto para un campo perfectamente uniforme. Imaginen un campo B que es casi uniforme sobre un área grande, pero que es ligeramente más fuerte en una región que en otra. Si ponemos una partícula de momentum p en este campo, describirá una órbita casi circular de radio $R = p/qB$. El radio de curvatura será, sin embargo, ligeramente más pequeño en la región donde el campo es más fuerte. La órbita no es un círculo cerrado sino que "caminará" por el campo, como lo muestra la figura 29-10. Podemos considerar que el ligero "error" en el campo produce un golpe angular extra que envía la partícula a una nueva senda. Si las partículas tienen que ejecutar millones de revoluciones en un acelerador, se necesita alguna clase de "enfoque radial" para mantener las trayectorias cerca de alguna órbita prefijada.

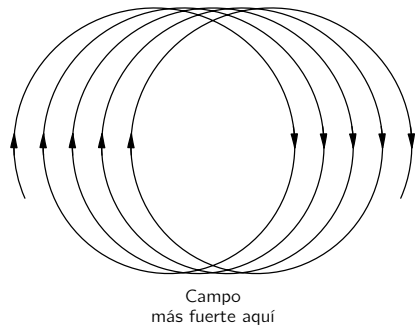


Figura 29-10. Movimiento de una partícula en un campo ligeramente no uniforme.

Otra dificultad con un campo magnético uniforme es que las partículas no permanecen en un plano. Si arrancan con el más ligero ángulo —o se les da un ligero ángulo con algún pequeño error en el campo— irán en una trayectoria helicoidal que finalmente las llevará al polo imán, o al techo, o al piso de la cámara de vacío. Hay que hacer algunos arreglos para disminuir tal movimiento vertical; el campo debe proporcionar "enfoque vertical" además de enfoque radial.

A primera vista sería de suponer que el enfoque radial se podría producir haciendo un campo magnético que aumentara a medida que aumenta la distancia desde el centro de la trayectoria prefijada. Si una partícula se aleja a un radio grande, estará en un campo fuerte que la desviará hacia el radio correcto. Si va a un radio muy pequeño, el desvío será menor y retornará hacia el radio prefijado. Si una partícula arrancara formando algún ángulo respecto al círculo ideal, oscilará alrededor de la órbita circular ideal, como muestra la figura 29-11. El enfoque radial debe mantener a la partícula cerca de la trayectoria circular.

En realidad hay también enfoque radial con la pendiente de campo *opuesta*. Esto puede suceder si el radio de curvatura de la trayectoria no aumenta más rápidamente que la distancia de la partícula al centro del campo. Las órbitas de la partícula serán como las dibujadas en la figura 29-12. Sin embargo, si el gradiente del campo es muy grande, las órbitas no retornarán al radio diseñado sino que serán espirales hacia dentro o hacia afuera, como muestra la figura 29-13.

Generalmente describimos la pendiente del campo en función del "gradiente relativo" o *índice de campo* n:

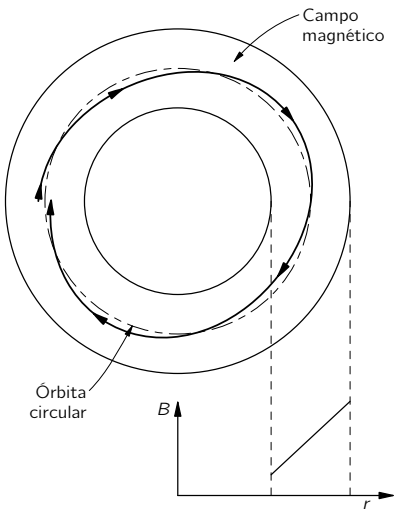


Figura 29-11. Movimiento radial de una partícula en un campo magnético con una pendiente positiva grande.

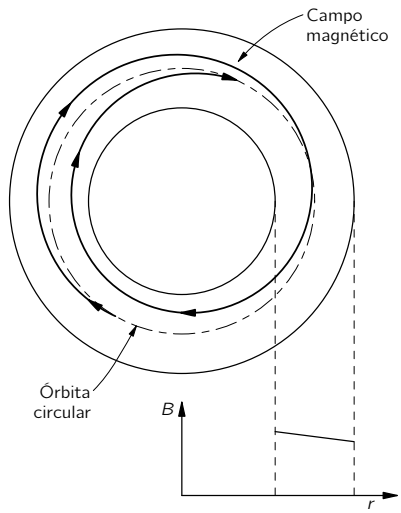


Figura 29-12. Movimiento radial de una partícula en un campo magnético con una pendiente negativa pequeña.

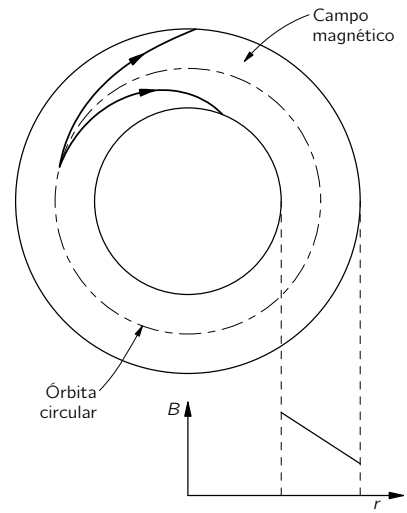


Figura 29-13. Movimiento radial de una partícula en un campo magnético con una pendiente negativa grande.

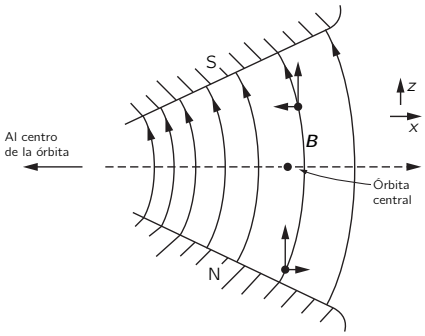


Figura 29-14. Un campo guía vertical como se ve en una sección perpendicular a la órbita.

$$n = \frac{dB/B}{dr/r}. \tag{29.2}$$

Un campo guía da enfoque radial si este gradiente relativo es mayor que -1.

Un gradiente radial de campo también producirá fuerzas *verticales* sobre las partículas. Supongamos que tenemos un campo que es fuerte cerca del centro de la órbita y débil en las afueras. De este modo, una sección vertical del imán perpendicular a la órbita podría ser como muestra la figura 29-14. (Para los protones las órbitas saldrían de la página.) Si el campo es fuerte a la izquierda y débil a la derecha, las líneas del campo magnético deben estar curvadas como se muestra. Podemos ver que esto debe ser así usando la ley de que la circulación de $\boldsymbol{B}$ es nula en el espacio libre. Si tomamos las coordenadas como lo muestra la figura, entonces

$$(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B})_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = 0,$$

o sea

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial x}. \tag{29.3}$$

Como suponemos que $\partial B_z/\partial x$ es negativa, debe haber una $\partial B_x/\partial z$ negativa igual. Si el plano "nominal" de la órbita es un plano de simetría donde $B_x = 0$, entonces la componente radial B_x será negativa encima del plano y positiva debajo. Las líneas deben estar curvadas como se muestra.

Tal campo tendrá propiedades de enfoque vertical. Imaginen un protón que esté viajando más o menos paralelo a la órbita central pero encima de ella. La componente horizontal de $\boldsymbol{B}$ producirá una fuerza hacia abajo sobre él. Si el protón está debajo de la órbita central, la fuerza está invertida. Así que hay una "fuerza restauradora" hacia la órbita central. Según nuestro razonamiento habrá enfoque vertical, siempre que el campo *vertical* disminuya al aumentar el radio; pero si el gradiente de campo es positivo, habrá un "desenfoque vertical". Por lo tanto, para que haya enfoque vertical, el índice de campo n debe ser menor que cero. Encontramos además que el enfoque radial n tenía que ser mayor que -1. Las dos condiciones juntas dan la condición

$$-1 < n < 0$$

para que las partículas se mantengan en órbitas estables. En ciclotrones, se usan valores muy cercanos a cero; en betatrones y sincrotrones, el valor comúnmente usado es $n = -0.6$.

29-7 Enfoque con gradiente alternado

Tales valores pequeños de n dan lugar a un enfoque más bien "débil". Claro que un gradiente positivo grande ($n \gg 1$) dará un enfoque radial mucho más efectivo, pero la fuerza vertical sería fuertemente de desenfoque. Análogamente, pendientes negativas grandes ($n \ll -1$) darían fuerzas verticales fuertes pero causarían desenfoque radial. Pero hace 10 años se halló que una fuerza que alterna entre enfoque fuerte y desenfoque fuerte pueden dar aún una fuerza de enfoque *resultante*.

Para explicar cómo funciona el *enfoque con gradiente alternado*, primero describiremos el funcionamiento de una lente cuadrupolar, que se basa en el mismo principio. Imaginen que se agrega un campo magnético negativo uniforme al campo de la figura 29-14, con la intensidad ajustada para producir campo cero en la órbita. El campo resultante —para pequeños desplazamientos desde el punto neutro— sería como el campo mostrado en la figura 29-15. Tal imán de cuatro polos se llama "lente cuadrupolar". Una partícula positiva que entra (desde el lector) a la derecha o a la izquierda del centro es atraída hacia el centro. Si la partícula entra arriba o abajo, es *rechazada* del centro. Ésta es una lente de enfoque horizontal. Si se invierte el gradiente horizontal —como puede hacerse invirtiendo todas las polaridades— los signos de todas las fuerzas se invierten

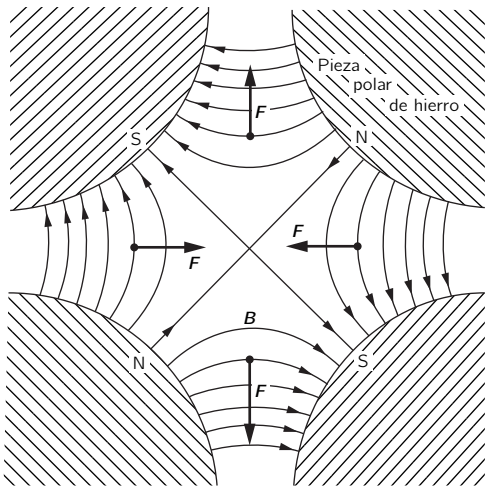


Figura 29-15. Una lente cuadrupolar de enfoque horizontal.

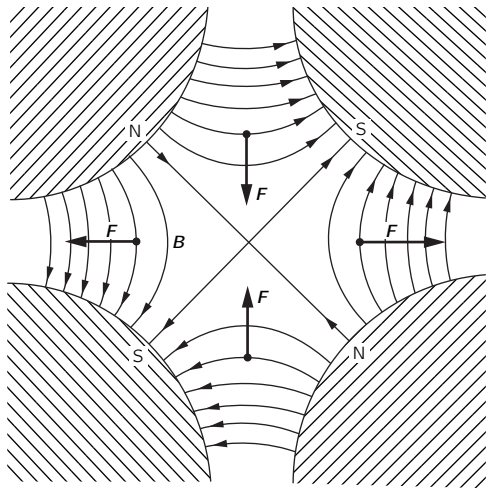


Figura 29-16. Una lente cuadrupolar de enfoque vertical.

y tenemos una lente de enfoque vertical, como en la figura 29-16. Para tales lentes, la intensidad de campo —y por tanto las fuerzas de enfoque— aumentan linealmente con la distancia al eje.

Ahora imagínense que dos de tales lentes se colocan en serie. Si alguna partícula entra con algún desplazamiento horizontal respecto al eje, como lo muestra la figura 29-17(a), será desviada hacia el eje en la primera lente. Cuando llega a la segunda lente está más cerca del eje, así que la fuerza hacia afuera es menor y la deflección hacia afuera es menor. Hay un desvío resultante hacia el eje; el efecto *promedio* es un enfoque horizontal. Por otra parte, si observamos una partícula que entra fuera del eje en la dirección vertical, la trayectoria será como muestra la figura 29-17(b). Primero la partícula se desvía *alejándose* del eje, pero luego llega a la segunda lente con un gran desplazamiento, sufre una fuerza intensa y así se dobla hacia el eje. Una vez más el efecto resultante es enfoque. Entonces un par de lentes cuadrupolares actúan independientemente para movimientos horizontales y verticales —muy parecido a una lente óptica—. Se usan lentes cuadrupolares para formar y controlar haces de partículas en la misma forma que las lentes ópticas se usan para haces de luz.

Debemos señalar que un sistema de gradiente alternado no *siempre* produce enfoque. Si los gradientes son muy grandes (en relación al momentum de la partícula o la distancia entre las lentes), el efecto resultante puede ser un desenfoque. Pueden ver cómo podría suceder eso imaginando que se aumentara la distancia entre las dos lentes de la figura 29-17, por ejemplo, en un factor de tres o cuatro.

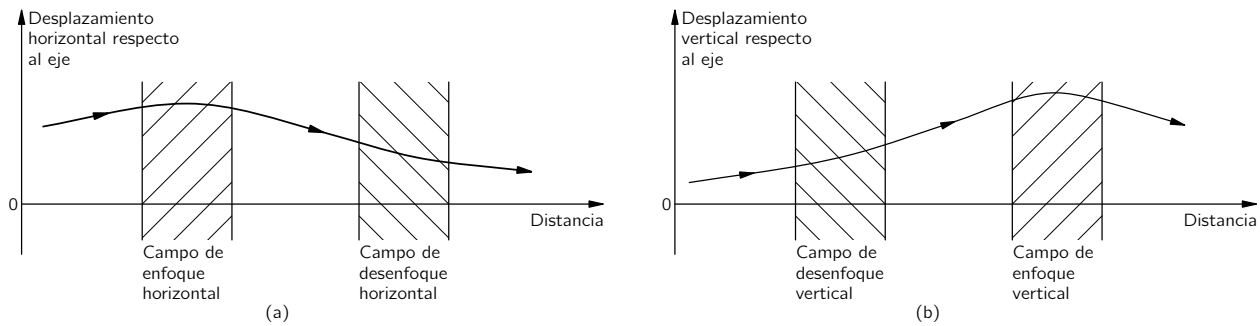


Figura 29-17. Enfoque horizontal y vertical con un par de lentes cuadrupolares.

Retornemos al imán guía de un sincrotrón. Podemos considerar que consiste en una sucesión alternada de lentes "positivas" y "negativas" con un campo uniforme superpuesto. El campo uniforme sirve para mantener las partículas, en promedio, en un círculo horizontal (con ningún efecto sobre el movimiento vertical) y las lentes alternadas actúan sobre cualquier partícula que tienda a perderse —empujándola siempre hacia la órbita central (en promedio)—.

Hay una buena analogía mecánica que demuestra que una fuerza que alterna entre una fuerza de "enfoque" y una fuerza de "desenfoque" puede tener un efecto de "enfoque" resultante. Imaginen un "péndulo" mecánico que consiste en una barra *sólida* con un peso en el extremo, suspendido de un pivote sujeto a un movimiento de arriba a abajo por medio de una manivela con motor. Tal péndulo tiene *dos* posiciones de equilibrio. Además de la normal, la posición colgando hacia abajo, el péndulo también está en equilibrio "colgando hacia arriba" —¡con su "lenteja" *encima* del pivote!—. Tal péndulo está dibujado en la figura 29-18.

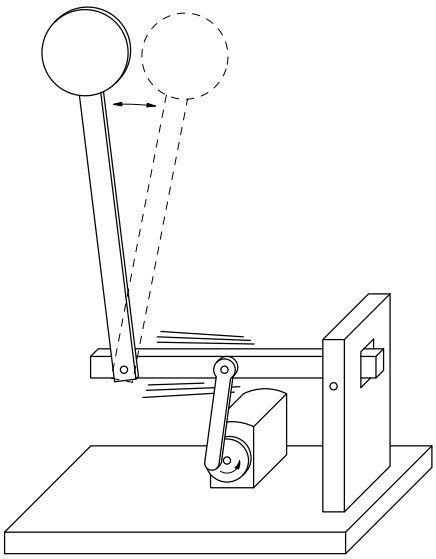


Figura 29-18. Un péndulo con un pivote oscilando puede tener una posición estable con la barra encima del pivote.

Por el siguiente razonamiento se puede ver que el movimiento vertical del pivote es equivalente a una fuerza de enfoque alternada. Cuando el pivote es acelerado hacia abajo, la "lenteja" tiende a moverse hacia dentro, como se indica en la figura 29-19. Cuando el pivote se acelera hacia arriba, el efecto se invierte. La fuerza que restaura la "lenteja" hacia el eje alterna, pero el efecto promedio es una fuerza hacia el eje. Así pues, el péndulo oscilará alrededor de una posición neutra que es justamente opuesta a la normal.

Por supuesto, hay una forma más fácil de mantener un péndulo al revés, ¡*balanceándolo* sobre el dedo! Pero ¡traten de balancear *dos* barras *independientes* en el *mismo dedo*! ¡O un palo con los ojos cerrados! Balancear implica hacer una corrección de lo que esté errado. Y esto no es posible, en general, si hay varias cosas que están erradas al mismo tiempo. En un sincrotrón hay miles de millones de partículas que van juntas, cada una de las cuales puede partir con un "error" diferente. La clase de enfoque que hemos descrito actúa sobre todas ellas.

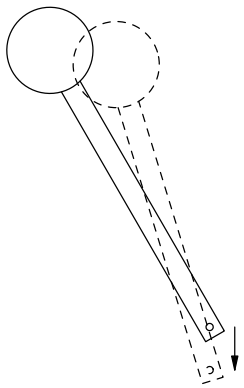


Figura 29-19. Una aceleración del pivote hacia abajo produce un movimiento del péndulo hacia la vertical.

29-8 Movimiento en campos eléctricos y magnéticos cruzados

Hasta ahora hemos hablado de partículas solamente en campos eléctricos o solamente en campos magnéticos. Hay algunos efectos interesantes cuando los dos tipos de campo están presentes al mismo tiempo. Supongan que tenemos un campo magnético uniforme $\boldsymbol{B}$ y un campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ perpendiculares entre sí. Las partículas que parten perpendiculares a $\boldsymbol{B}$ se moverán en curva como en la figura 29-20. (¡La figura es una curva *plana*, *no* una hélice!) Podemos comprender este movimiento cualitativamente. Cuando la partícula (supuesta positiva) se mueve en la dirección de $\boldsymbol{E}$, toma velocidad, de modo que el campo magnético la desvía muy poco. Cuando va contra el campo $\boldsymbol{E}$ pierde velocidad y cada vez se desvía continuamente más por el campo magnético. El efecto resultante es que tiene un "desplazamiento" promedio en la dirección de $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$.

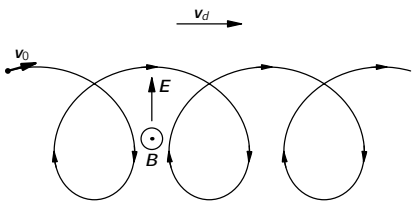


Figura 29-20. Movimiento de una partícula en campos eléctricos y magnéticos cruzados.

En realidad, podemos demostrar que el movimiento es circular uniforme superpuesto sobre un movimiento lateral uniforme a velocidad $v_d = E/B$ —la trayectoria de la figura 29-20 es una cicloide—. Imaginen un observador que se está moviendo hacia la derecha a una velocidad constante. En su sistema de referencia nuestro campo magnético se ha transformado en un nuevo campo magnético *más* un campo eléctrico *hacia abajo*. Si él tiene la velocidad correcta, su campo eléctrico total será nulo y verá al electrón que va en un círculo. Por lo tanto, el movimiento que *nosotros* vemos es un movimiento circular más una traslación a la velocidad de desplazamiento $v_d = E/B$. El movimiento de electrones en campos eléctricos y magnéticos perpendiculares es la base de los *magnetrones*, es decir, osciladores usados para generar energía de microondas.

Hay muchos otros ejemplos interesantes de movimientos de partículas en campos eléctricos y magnéticos —como las órbitas de los electrones y protones atrapados en los cinturones de Van Allen— pero desafortunadamente no tenemos tiempo para tratarlos aquí.

30

La geometría interna de los cristales

30-1 La geometría interna de los cristales
30-2 Enlaces químicos en cristales
30-3 Crecimiento de cristales
30-4 Redes cristalinas
30-5 Simetrías en dos dimensiones
30-6 Simetrías en tres dimensiones
30-7 Resistencia de metales
30-8 Dislocación y crecimiento de cristales
30-9 El modelo cristalino de Bragg-Nye

Revisar

CHARLES KITTEL, *Introduction to Solid State Physics*, John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 2ª ed., 1956.

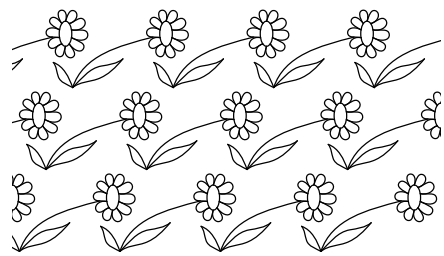
30-1 La geometría interna de los cristales

Hemos finalizado el estudio de las leyes básicas de la electricidad y el magnetismo y vamos a estudiar ahora las propiedades electromagnéticas de la materia. Comencemos describiendo sólidos —es decir, cristales—. Cuando los átomos de la materia no se están moviendo mucho de un lado a otro, se pegan y se ordenan en una configuración con la energía más baja posible. Si en cierto lugar los átomos han encontrado una disposición que parece ser de baja energía, los átomos que están en alguna otra parte se dispondrán probablemente de la misma manera. Por estas razones tenemos en un material sólido una configuración de átomos que se repite.

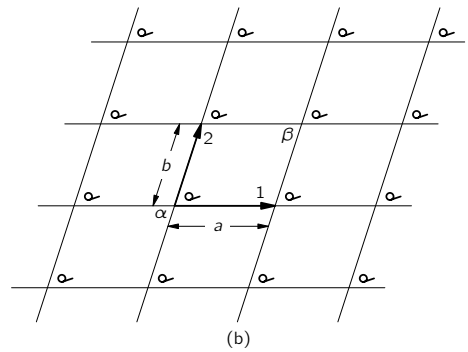
En otras palabras, la situación en un cristal es así: el ambiente de un átomo determinado en un cristal tiene cierto ordenamiento y si miran la misma clase de átomo un poco más lejos encontrarán uno cuyas inmediaciones son exactamente iguales. Si toman un átomo un poco más lejos a la misma distancia encontrarán, una vez más, exactamente la misma situación. El patrón se repite una y otra vez —y, por supuesto, en tres dimensiones—.

Imaginen el problema de diseñar un papel tapiz —o una tela o algún diseño geométrico para una superficie plana— en el cual se supone que ustedes tienen un elemento de diseño que se repite y se repite y se repite, de modo que pueden hacer la superficie tan grande como quieran. Es la analogía bidimensional de un problema que un cristal resuelve en tres dimensiones. Por ejemplo, la figura 30-1(a) muestra un tipo común de diseño de papel tapiz. Hay un solo elemento que se repite en un diagrama que puede continuar eternamente. Las características geométricas de este diseño de papel tapiz, considerando únicamente sus propiedades de repetición y no preocupándonos de la geometría de la flor misma o de su mérito artístico, están contenidas en la figura 30-1(b). Si empiezan en cualquier punto, pueden encontrar el punto correspondiente desplazándose una distancia a según la dirección de la flecha 1. También pueden llegar a un punto *correspondiente* si se desplazan una distancia b en la dirección de la otra flecha. Hay, por supuesto, muchas otras direcciones. Pueden, por ejemplo, ir del punto α al punto β y alcanzar una posición correspondiente, pero se puede considerar ese paso como una combinación de un paso en la dirección 1 seguido de un paso en la dirección 2. Se puede describir una de las propiedades básicas del diagrama por medio de los dos pasos más cortos hasta las posiciones cercanas iguales. Por posiciones "iguales" entendemos que si se pararan en cualquiera de ellas y miraran a su alrededor, verían exactamente lo mismo que si se pararan en otra. Es la propiedad fundamental de un cristal. La única diferencia es que un cristal es un ordenamiento tridimensional en vez de un ordenamiento bidimensional; y naturalmente, en vez de flores, cada elemento de la red cristalina es cierto tipo de arreglo de átomos —por ejemplo, seis átomos hidrógeno y dos de carbono— formando algún tipo de patrón. El diagrama de átomos en un cristal se puede hallar experimentalmente por medio de difracción de rayos X. Hemos mencionado brevemente este método antes, y no diremos nada más ahora excepto que se ha determinado el ordenamiento preciso de los átomos en el espacio para los cristales más simples y también para algunos bastante complejos.

El ordenamiento interno de un cristal se manifiesta de varias maneras. Primero, en ciertas direcciones, la intensidad de ligadura de los átomos es, por lo común, más fuerte que en otras direcciones. Esto significa que hay planos a través del cristal por donde se rompe más fácilmente que por otros. Se llaman planos de *división*.



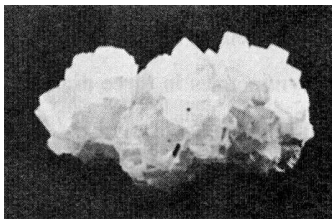
(a)



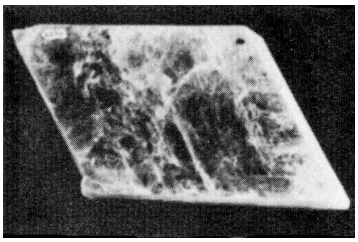
(b)

Figura 30-1. Un patrón que se repite en dos dimensiones.

(a)



(b)



(c)

Figura 30-2. Cristales naturales: (a) cuarzo, (b) cloruro de sodio, (c) mica.

Si rompen un cristal con una hoja de cuchillo se partirá a menudo siguiendo uno de esos planos. Segundo, la estructura interna aparece frecuentemente en la superficie debido a la manera en que se formó el cristal. Imaginen un cristal que se deposita de una solución. Hay átomos flotando en la solución y asentándose finalmente cuando encuentran una posición de energía más baja. (Es como si el papel tapiz se hiciera con flores vagando de un lado a otro hasta que una llegara accidentalmente a su lugar y se quedara pegada, y luego la siguiente, y la siguiente de modo que el diagrama creciera gradualmente.) Pueden darse cuenta que habrá ciertas direcciones en las que crecerá con rapidez diferente que en otras direcciones, creciendo así en una especie de forma geométrica. Debido a esos efectos, las superficies externas de muchos cristales muestran algunas de las características del ordenamiento interno de los átomos.

Por ejemplo, la figura 30-2(a) muestra la forma de un cristal típico de cuarzo cuyo diagrama interno es hexagonal. Si examinan detenidamente ese cristal, notarán que la parte externa no forma un hexágono muy bueno porque los lados no son todos de la misma longitud —de hecho, son a menudo muy desiguales—. Pero en un aspecto es un hexágono muy bueno: los *ángulos* entre las caras son exactamente 120°. Es claro que el tamaño de cualquier cara en particular es un accidente del crecimiento, pero los *ángulos* constituyen una representación de la geometría interna. Así pues, cada cristal de cuarzo tiene una forma diferente, aun cuando los ángulos entre caras correspondientes sean siempre los mismos.

La geometría interna de un cristal de cloruro de sodio también queda evidenciada por su forma externa. La figura 30-2(b) muestra la forma de un grano típico de sal. Nuevamente, el cristal no es un cubo perfecto, pero las caras *son* exactamente perpendiculares entre sí.

La mica es un cristal más complicado que tiene la forma que muestra la figura 30-2(c). Es un cristal altamente anisótropo, como se deduce fácilmente de que es muy resistente si tratan de romperlo en una dirección (horizontalmente en la figura), pero fácil de partir en la otra dirección (verticalmente). Comúnmente se usa para obtener láminas delgadas muy resistentes. La mica y el cuarzo son dos ejemplos de minerales naturales que contienen sílice. Un tercer ejemplo de mineral con sílice es el asbesto, el cual tiene la propiedad interesante de que se rompe fácilmente en dos direcciones pero no en la tercera. Se presenta como hecho de fibras *lineales* muy fuertes.

30-2 Enlaces químicos en cristales

Las propiedades mecánicas de los cristales dependen claramente del tipo de ligaduras químicas entre los átomos. La resistencia sorprendentemente diferente de la mica según direcciones distintas depende del tipo de ligaduras interatómicas en las diferentes direcciones. Ya han aprendido en química, sin duda, las distintas clases de enlaces químicos. En primer lugar, están los enlaces iónicos, como ya lo hemos estudiado en el cloruro de sodio. Hablando vagamente y rápido, los átomos de sodio han perdido un electrón y se han convertido en iones positivos; los átomos de cloro han ganado un electrón y se han convertido en iones negativos. Los iones positivos y negativos se disponen en un tablero de damas tridimensional y se quedan unidos debido a fuerzas eléctricas.

El enlace covalente —en el cual dos átomos comparten electrones— es más común y, por lo general, es muy fuerte. En un diamante, por ejemplo, los átomos de carbono tienen enlaces covalentes en las cuatro direcciones hacia sus vecinos más cercanos, así que el cristal es realmente muy duro. También hay enlace covalente entre silicio y oxígeno en un cristal de cuarzo, pero en realidad el enlace es allí sólo parcialmente covalente. Debido a que los átomos no comparten totalmente a los electrones, están parcialmente cargados y el cristal es algo iónico. La naturaleza no es tan simple como tratamos que lo sea; en realidad hay todas las graduaciones posibles entre el enlace covalente y el iónico.

Un cristal de azúcar tiene una clase más de ligadura. En él hay grandes moléculas en las cuales los átomos están unidos fuertemente con enlaces covalentes, de modo que la molécula es una estructura resistente. Pero como los enlaces

fuertes están completamente saturados, sólo hay atracciones relativamente débiles entre molécula y molécula. En esos cristales *moleculares* las moléculas mantienen su identidad individual, por así decir, y el ordenamiento interno podría ser como lo muestra la figura 30-3. Como las moléculas no están unidas fuertemente entre sí, los cristales son fáciles de romper. Son completamente diferentes de algo como el diamante, el cual es realmente una molécula gigante que no se puede romper en ninguna parte sin quebrar enlaces covalentes fuertes. La parafina es otro ejemplo de cristal molecular.

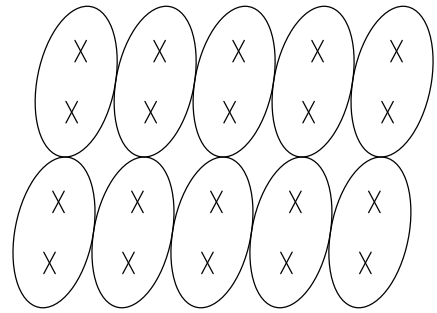


Figura 30-3. La red de un cristal molecular.

Un ejemplo extremo de cristal molecular se presenta en una sustancia como el argón sólido. Hay muy poca atracción entre los átomos —cada átomo es una molécula monoatómica completamente saturada—. Pero a temperaturas muy bajas, el movimiento térmico es muy pequeño, así que las ligeras fuerzas interatómicas pueden hacer que los átomos se asienten en un ordenamiento regular como una pila compacta de esferas.

Los metales forman una clase completamente diferente de sustancias. La ligadura es de un tipo enteramente diferente. En un metal, el enlace no es entre átomos adyacentes sino que se trata de una propiedad de todo el cristal. Los electrones de valencia no pertenecen a un solo átomo o a un par de átomos sino que son compartidos por todo el cristal. Cada átomo contribuye con un electrón a un fondo común universal de electrones y los iones atómicos positivos están en el mar de electrones negativos. El mar de electrones mantiene unidos a los átomos como una especie de pegamento.

Como en los metales no hay enlaces especiales en ninguna dirección especial, no hay direccionalidad intensa en la ligadura. Sin embargo, aún son cristalinos porque la energía total es mínima cuando los iones atómicos se disponen en algún arreglo definido —aunque, por lo general, la energía del arreglo preferido no es mucho más baja que otras posibles—. En una primera aproximación, los átomos de muchos metales son como pequeñas esferas apiladas de la manera más apretada posible.

30-3 Crecimiento de cristales

Traten de imaginar la formación natural de cristales en la Tierra. En la superficie de la Tierra hay una gran mezcla de toda clase de átomos. La acción volcánica, el viento y el agua los están revolviendo continuamente —los están moviendo continuamente de un lado a otro y los están mezclando—. Pero mediante un truco, los átomos de silicio comienzan a encontrarse gradualmente y a encontrar átomos de oxígeno para formar sílice. En cada momento se agrega un átomo a los otros para construir un cristal —la mezcla se deshace—. Y por ahí cerca los átomos de cloro y de sodio están encontrándose y construyendo un cristal de sal.

¿De qué modo una vez que un cristal comienza sólo permite que se le adhiera una clase particular de átomos? Sucede así porque todo el sistema está trabajando por conseguir la energía más baja posible. Un cristal en crecimiento aceptará un nuevo átomo si éste contribuye a una mayor baja de energía. ¿Pero cómo *sabe* dicho cristal que un átomo de silicio —o de oxígeno— en un lugar particular va a dar lugar a la energía más baja posible? Lo hace probando. En el líquido, todos los átomos están perpetuamente en movimiento. Cada átomo rebota contra sus vecinos unas 10^{13} veces por segundo. Si golpea en el lugar apropiado del cristal en crecimiento, tiene una probabilidad algo menor de saltar de nuevo si la energía es baja. Probando continuamente durante millones de años a razón de 10^{13} pruebas por segundo, los átomos se acumulan gradualmente en los lugares donde encuentran la energía más baja. Finalmente forman grandes cristales.

30-4 Redes cristalinas

El ordenamiento de los átomos en un cristal —la *red* cristalina— puede asumir muchas formas geométricas. Describiremos en primer lugar las redes más simples, las cuales son características de la mayoría de los metales y de la forma sólida de

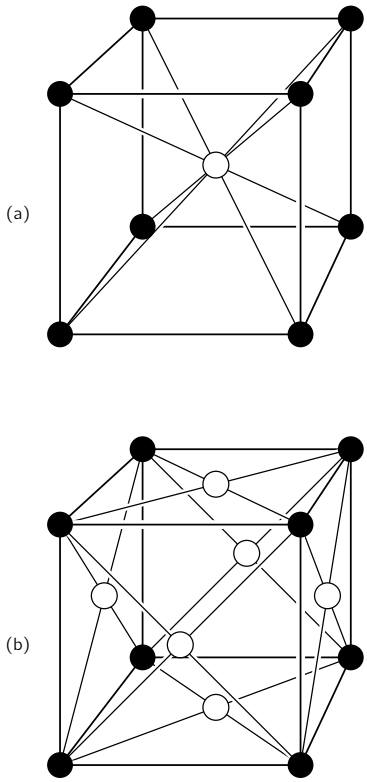


Figura 30-4. Una celda unitaria de un cristal cúbico: (a) cuerpo centrado, (b) caras centradas.

los gases nobles. Son las redes cúbicas que se pueden presentar en dos formas: la cúbica de cuerpo centrado mostrada en la figura 30-4(a), y la cúbica de caras centradas, mostrada en la figura 30-4(b). El dibujo muestra, por supuesto, sólo un cubo de la red; tienen que imaginar que el diagrama se repite indefinidamente en tres dimensiones. Además, para que el dibujo sea más claro, sólo se muestra el "centro" de los átomos. En un cristal real, los átomos se parecen más bien a esferas en contacto mutuo. En general, las esferas negras y blancas del dibujo pueden representar diferentes clases de átomos o pueden ser de la misma clase. Por ejemplo, el hierro tiene una red cúbica de cuerpo centrado a temperaturas bajas y una red cúbica de caras centradas a temperaturas más altas. Las propiedades físicas son completamente diferentes en las dos formas cristalinas.

¿Cómo aparecen esas formas? Imaginen que tienen el problema de apilar átomos esféricos lo más apretadamente posible. Una manera sería empezar haciendo una capa en un "arreglo hexagonal en apilamiento compacto", como lo muestra la figura 30-5(a). Luego podrían hacer una segunda capa como la primera, pero desplazada horizontalmente, como muestra la figura 30-5(b). Posteriormente pueden poner la tercera capa. Pero observen que existen *dos* maneras distintas de colocar la *tercera* capa. Si empiezan la tercera capa colocando un átomo en el punto A de la figura 30-5(b), cada átomo de la tercera capa está directamente encima de un átomo de la primera capa. Por otra parte, si empiezan la tercera capa poniendo un átomo en la posición B, los átomos de la tercera capa estarán exactamente en el punto medio de los triángulos formados por tres átomos de la primera capa. Cualquier otro lugar por donde se empiece es equivalente a A o a B, así que sólo hay dos maneras de colocar la tercera capa.

Si la tercera capa tiene un átomo en el punto B, la red cristalina es cúbica de caras centradas —pero vista oblicuamente—. Parece extraño que empezando con hexágonos terminen con cubos. Pero observen que un cubo visto desde un vértice tiene un contorno hexagonal. Por ejemplo, la figura 30-6, ¡podría representar un hexágono plano o un cubo visto en perspectiva!

Si se agrega una tercera capa a la figura 30-5(b) empezando con un átomo en A, no hay estructura cúbica y en su lugar la red tiene únicamente simetría hexagonal. Es claro que las dos posibilidades que hemos descrito, están empacadas de manera igualmente compacta.

Algunos metales —el cobre y la plata, por ejemplo— eligen la primera alternativa, la red cúbica de caras centradas. Otros —berilio y magnesio, por ejemplo— eligen la otra alternativa, forman cristales hexagonales. Es claro que la red cristalina que aparezca no puede depender únicamente de apilar esferitas, sino

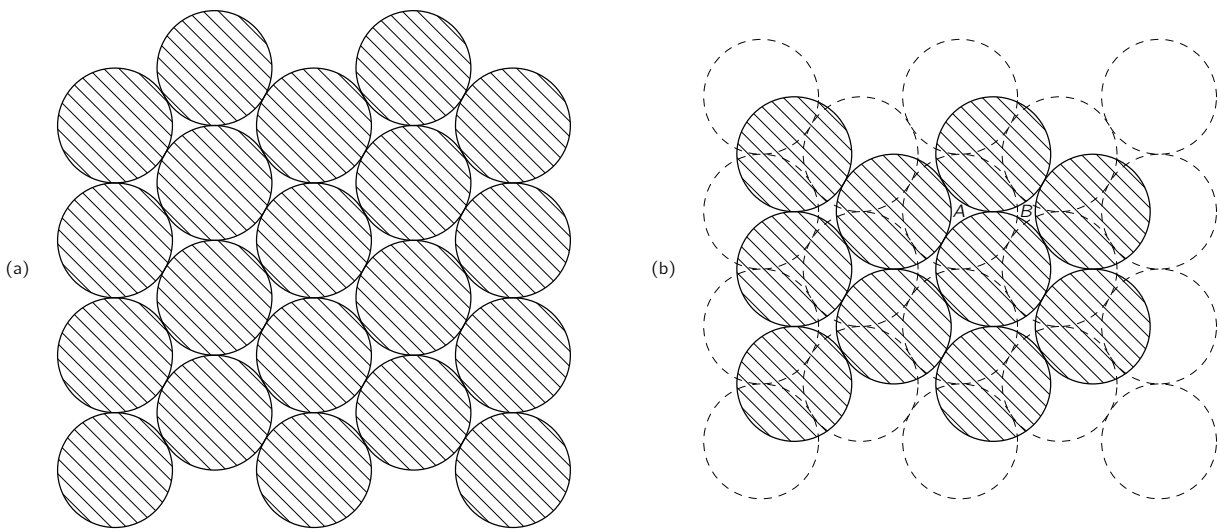


Figura 30-5. Construyendo una red hexagonal con un empaquetado compacto.

que también debe estar determinada en parte por otros factores. En particular, depende de la ligera dependencia angular remanente en las fuerzas interatómicas (o en el caso de los metales, de la energía del fondo común de electrones). Sin duda, aprenderán todas estas cosas en sus cursos de química.

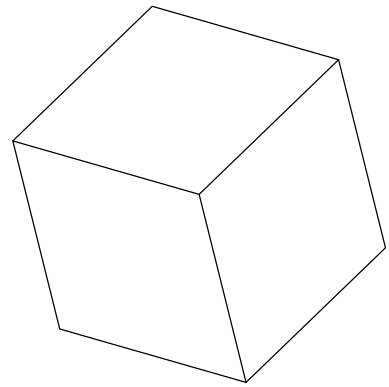


Figura 30-6. ¿Esto es un hexágono o un cubo visto desde un vértice?

30-5 Simetrías en dos dimensiones

Estudiemos ahora algunas propiedades de los cristales desde el punto de vista de sus simetrías internas. La característica principal de un cristal es que si empiezan de un átomo y se mueven hasta un átomo correspondiente a una unidad de red de distancia, están de nuevo en el mismo tipo de ambiente. Éste es el enunciado fundamental. Pero si fuera un átomo, habría otro tipo de desplazamiento que los llevaría de nuevo al mismo ambiente —es decir, otra "simetría" posible—. En la figura 30-7(a) se muestra otro diseño posible "tipo papel tapiz" (aunque probablemente no lo hayan visto nunca). Supongan que comparamos los ambientes de los puntos A y B. A primera vista, podrían pensar que son iguales —pero no es así—. Los puntos C y D son equivalentes para A; sin embargo, los ambientes de B son como los de A únicamente si se les invierte, como por reflexión en un espejo.

Hay otras clases de puntos "equivalentes" en el diagrama. Por ejemplo, los puntos E y F tienen ambientes "iguales" excepto que uno está rotado 90° respecto al otro. El diagrama es muy especial. Una rotación de 90° —o cualquier múltiplo— alrededor de un vértice como A da de nuevo el mismo diagrama. Un cristal con esa estructura tendría esquinas cuadradas por afuera, pero por dentro estaría más complicado que un simple cubo.

Ya que hemos descrito algunos ejemplos especiales, tratemos de descubrir todas las simetrías posibles que puede tener un cristal. Consideremos primero lo que ocurre en un plano. Se puede definir una red *plana* mediante los dos vectores llamados *primitivos* que van desde un punto de la red hasta los dos puntos equivalentes *más cercanos*. Los dos vectores **1** y **2** son los vectores primitivos de la red de la figura 30-1. Los dos vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ de la figura 30-7(a) son los vectores primitivos del diagrama que allí se muestra. Naturalmente, podríamos igualmente remplazar $\boldsymbol{a}$ por $-\boldsymbol{a}$ o $\boldsymbol{b}$ por $-\boldsymbol{b}$. Como $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tienen igual módulo y son perpendiculares, una rotación de 90° lleva $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{b}$ a $-\boldsymbol{a}$, dando nuevamente la misma red.

Vemos que hay redes que tienen simetría "cuádruple". Y antes hemos descrito un apilamiento compacto sobre un hexágono que podría tener una simetría séxtuple. Una rotación del ordenamiento de los círculos de la figura 30-5(a) en un ángulo de 60° alrededor del centro de cualquier círculo vuelve a reproducir el mismo diagrama.

¿Qué otras clases de simetría rotacional hay? Por ejemplo, ¿podemos tener una simetría rotacional quíntuple u óctuple? Es sencillo observar que son imposibles.

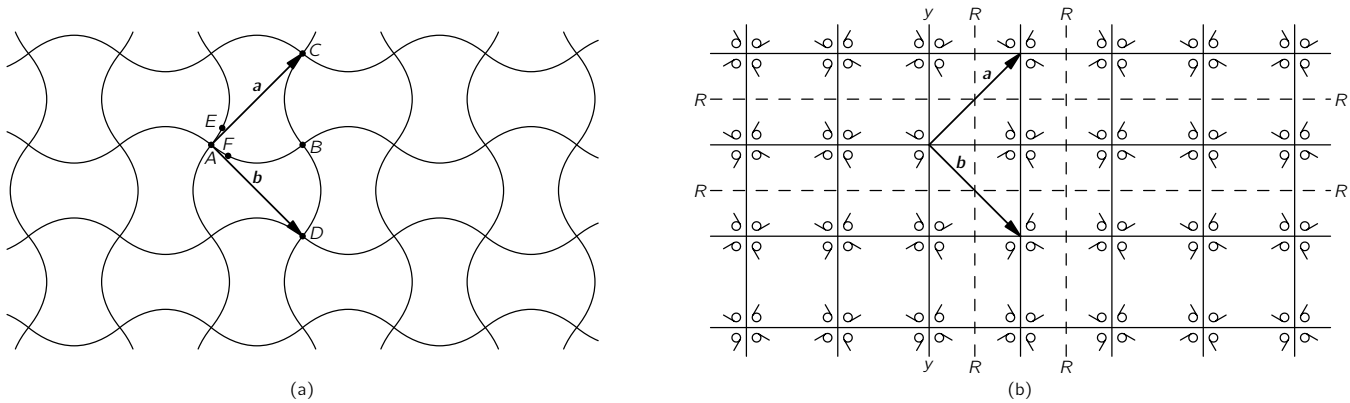


Figura 30-7. Un diagrama con mayor simetría.

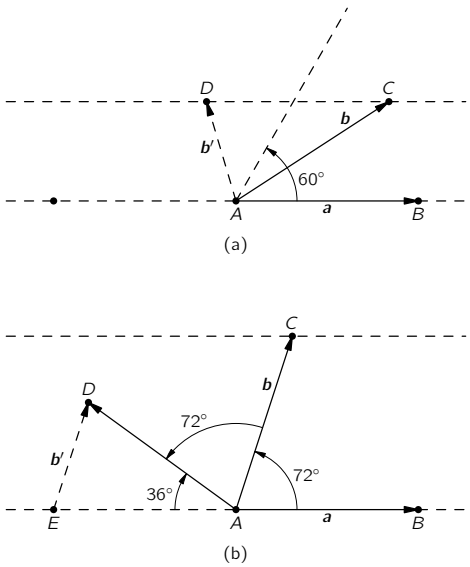


Figura 30-8. (a) Simetrías rotacionales mayores a séxtuple son imposibles. (b) Simetrías rotacionales quíntuples son imposibles.

La única simetría con más de cuatro ángulos es la simetría séxtuple. Demostremos primero que una simetría mayor que séxtuple es imposible. Supongan que tratamos de imaginar una red con dos vectores primitivos que forman un ángulo menor de 60°, como en la figura 30-8(a). Supongamos que los puntos B y C son equivalentes a A y que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son los dos vectores *más cortos* desde A hasta sus vecinos equivalentes. Pero claramente eso está mal, porque la distancia entre B y C es más corta que entre cualquiera de los dos y A. En D tiene que haber un vecino equivalente a A que está más cerca que B o que C. Deberíamos haber elegido $\boldsymbol{b}'$ como uno de nuestros vectores primitivos. En consecuencia, el ángulo entre los dos vectores primitivos tiene que ser 60° o más. La simetría octogonal no es posible.

¿Y la simetría quíntuple? Si suponemos que los vectores primitivos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ tienen longitudes iguales y forman un ángulo $2\pi/5 = 72°$, como en la figura 30-8(b), debería haber también un punto equivalente de la referencia D, a 72° de C. Pero entonces el vector $\boldsymbol{b}'$ de E a D es menor que $\boldsymbol{b}$, por lo que $\boldsymbol{b}$ no es un vector primitivo. No puede haber simetría quíntuple. Las únicas posibilidades que no nos llevan a este tipo de dificultad son $\theta = 60°$, 90° o 120°. Es claro que cero y 180° también son posibles. Una manera de enunciar nuestro resultado es que se puede dejar el diagrama invariante mediante una rotación de una vuelta completa (ninguna variación), media vuelta, un tercio, un cuarto o un sexto de vuelta. Y ésas son todas las simetrías rotacionales posibles en un plano —un total de cinco—. Si $\theta = 2\pi/n$, hablamos de una simetría "n-tuple". Decimos que un diagrama con n igual a 4 o a 6 tiene "mayor simetría" que uno con n igual a 1 o a 2.

Volviendo a la figura 30-7(a), vemos que el diagrama tiene simetría rotacional cuádruple. En la figura 30-7(b) hemos dibujado otro diseño que tiene las mismas propiedades de simetría que la parte (a). Las pequeñas figuras parecidas a una coma son objetos asimétricos que sirven para definir la simetría del diseño dentro de cada cuadrado. Vean que las comas están invertidas en cuadrados alternados, así que la celda unitaria es mayor que uno de los cuadrados pequeños. Si no hubiera comas, el diagrama todavía tendría simetría cuádruple, pero la celda unitaria sería menor. Los diagramas de la figura 30-7 tienen también otras propiedades de simetría. Por ejemplo, una reflexión respecto a cualquiera de las líneas discontinuas R–R reproduce el mismo diagrama.

Los diagramas de la figura 30-7 tienen además otra clase de simetría. Si se refleja el diagrama respecto a la línea Y–Y *y* además se le desplaza un cuadrado a la derecha (o a la izquierda) obtenemos el diagrama original de vuelta. La línea Y–Y se llama línea "de deslizamiento".

Éstas son todas las simetrías posibles en dos dimensiones. Hay una operación más de simetría espacial, que *en dos dimensiones* es equivalente a una rotación de 180°; sin embargo, es una operación bien distinta en tres dimensiones. Ésta es la *inversión*. Por inversión entendemos que cualquier punto con un vector de posición $\boldsymbol{R}$ respecto a un origen [el punto A de la figura 30-9(b), por ejemplo] se lleva al punto $-\boldsymbol{R}$.

Una inversión del diagrama (a) de la figura 30-9 produce un nuevo diagrama, pero una inversión del diagrama (b) reproduce el mismo diagrama. Para un diagrama bidimensional (como pueden ver en la figura), una inversión del diagrama (b) respecto al punto A es equivalente a una rotación de 180° alrededor del mismo punto. Supongan, sin embargo, que hiciéramos el diagrama de la figura 30-9(b) tridimensional, imaginando que los pequeños 6 y 9 tuvieran una "flecha" *que apunta afuera de la página*. Después de una inversión en tres dimensiones, todas las flechas estarán invertidas, de modo que el diagrama *no* se reproduce. Si indicamos la punta y la cola de las flechas por puntos y cruces, respectivamente, podemos hacer un diagrama *tridimensional*, como en la figura 30-9(c), el cual *no* es simétrico frente a inversiones, o podemos hacer un diagrama como el que se muestra en (d), el cual *sí* tiene esa simetría. Observen que *no* es posible imitar una inversión tridimensional por medio de ninguna combinación de rotaciones.

Si caracterizamos la "simetría" de un diagrama —o red— mediante los tipos de operaciones de simetría que hemos estado describiendo, resulta que hay 17

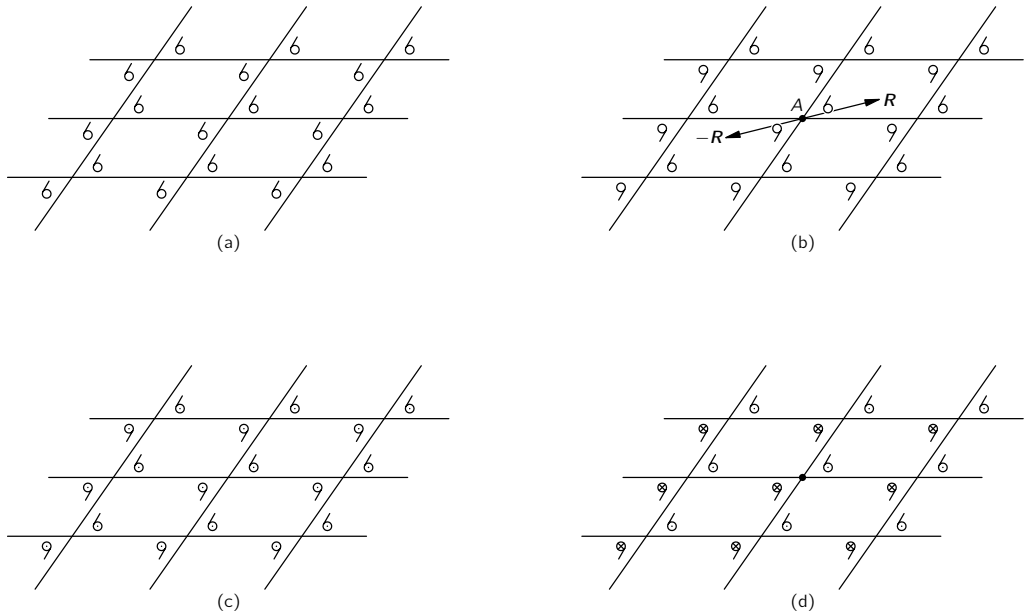


Figura 30-9. Simetría bajo inversión. El diagrama (b) no cambia si $\boldsymbol{R} \to -\boldsymbol{R}$, pero el diagrama (a) sí cambia. En tres dimensiones el diagrama (d) *es* simétrico bajo inversiones, pero (c) no.

diagramas distintos posibles en dos dimensiones. En la figura 30-1 hemos dibujado un diagrama de la simetría más baja posible y en la figura 30-7 uno de simetría mayor. Dejamos para que ustedes se entretengan tratando de construir los 17 diagramas posibles.

Es raro que para hacer papel tapiz y telas se utilicen muy pocos de los 17 diagramas posibles. Siempre se ven los mismos tres o cuatro diagramas básicos. ¿Es por falta de imaginación de los diseñadores, o porque muchos diagramas posibles no son agradables a la vista?

30-6 Simetrías en tres dimensiones

Hasta ahora hemos hablado únicamente de diagramas en dos dimensiones. Sin embargo, realmente estamos interesados en diagramas de átomos en tres dimensiones. En primer lugar, sabemos que un cristal tridimensional tendrá *tres* vectores primitivos. Si preguntamos entonces cuáles son las operaciones posibles de simetría en tres dimensiones, encontramos que ¡hay 230 simetrías diferentes posibles! Para ciertos fines se puede agrupar estos 230 tipos en siete clases, que son las dibujadas en la figura 30-10. La red de menor simetría se llama *triclínica*. Su celda unitaria es un paralelepípedo. Los vectores primitivos tienen longitud diferente y todos los ángulos entre ellos son desiguales. No hay ninguna posibilidad de simetría rotacional o de reflexión. Pero hay dos simetrías posibles —la celda unitaria cambia o no cambia por inversión respecto al vértice—. [Por inversión en tres dimensiones, también entendemos que el desplazamiento espacial $\boldsymbol{R}$ se remplaza por $-\boldsymbol{R}$ —en otras palabras, que (x, y, z) se transforma en $(-x, -y, -z)$—.] Así pues, la red triclínica sólo tiene dos simetrías posibles, a no ser que haya alguna relación especial entre los vectores primitivos. Por ejemplo, si todos los vectores son iguales y forman ángulos iguales, se tiene la red *trigonal* mostrada en la figura. Esta figura puede tener una simetría adicional; puede quedar invariante frente a una rotación alrededor de la diagonal principal del cuerpo.

Si uno de los vectores primitivos, $\boldsymbol{c}$ por ejemplo, es perpendicular a los otros dos, tenemos una celda unitaria *monoclínica*. Es posible una nueva simetría —una rotación de 180° alrededor de $\boldsymbol{c}$—. La celda hexagonal es un caso especial en que los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son iguales y el ángulo que forman es de 60°, de modo

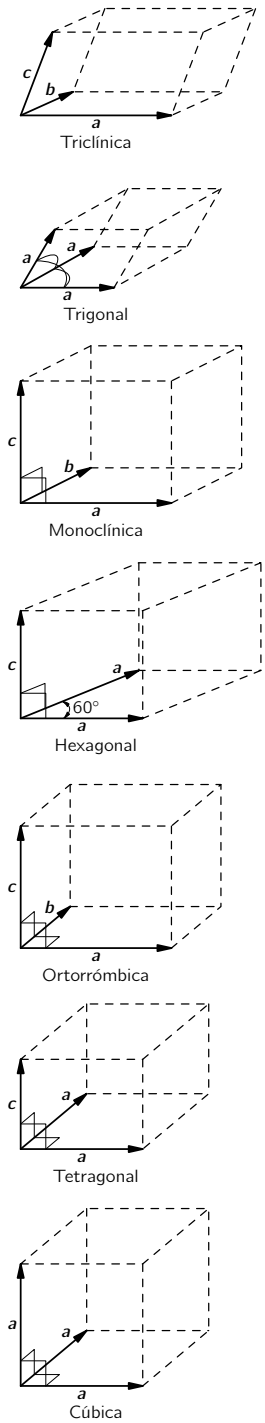


Figura 30-10. Las siete posibles clases de red cristalina.

que una rotación de 60°, o una de 120°, o una de 180° alrededor del vector $\boldsymbol{c}$ repite la misma red (para ciertas simetrías internas).

Si los tres vectores primitivos son perpendiculares pero de longitud diferente, tenemos la celda *ortorrómbica*. La figura es simétrica respecto a rotaciones de 180° alrededor de los tres ejes. Hay simetrías posibles de orden más alto en la celda *tetragonal* que tiene tres ángulos rectos y dos vectores primitivos iguales. Finalmente está la celda *cúbica*, que es la más simétrica de todas.

Lo importante de toda esta discusión acerca de simetrías es que las simetrías internas de los cristales se manifiestan —a veces de manera sutil— en las propiedades físicas macroscópicas del cristal. Por ejemplo, un cristal tendrá en general un tensor de polarizabilidad eléctrica. Si describimos el tensor en términos del elipsoide de polarización, es de esperar que algunas simetrías del cristal se manifiesten también en el elipsoide. Por ejemplo, un cristal cúbico es simétrico respecto a una rotación de 90° alrededor de cualquiera de las tres direcciones ortogonales. Es claro que el único elipsoide con esta propiedad es la esfera. *Un cristal cúbico tiene que ser un dieléctrico isotrópico.*

Por otra parte, un cristal tetragonal tiene una simetría rotacional cuádruple. Su elipsoide tiene que tener dos de sus ejes principales iguales y el tercero tiene que ser paralelo al eje del cristal. Análogamente, como el cristal ortorrómbico tiene una simetría rotacional doble alrededor de tres ejes ortogonales, sus ejes deben coincidir con los ejes del elipsoide de polarización. De manera parecida, *uno* de los ejes de un cristal monoclínico tiene que ser paralelo a *uno* de los ejes principales del elipsoide, aun cuando nada podemos expresar acerca de los otros ejes. Como un cristal triclínico no tiene simetría rotacional, el elipsoide puede tener ninguna orientación.

Como ven, podemos divertirnos bastante descubriendo las simetrías posibles y relacionándolas con los tensores físicos posibles. Sólo hemos considerado el tensor de polarización, pero las cosas se hacen más complicadas para otros —por ejemplo, para el tensor de elasticidad—. Hay una rama de la matemática, llamada "teoría de grupos" que se ocupa de estos temas, pero normalmente pueden descubrir lo que quieran con sentido común.

30-7 Resistencia de metales

Hemos dicho que los metales tienen por lo común una estructura cristalina cúbica simple; ahora queremos discutir sus propiedades mecánicas —las cuales dependen de esta estructura—. Los metales son, por lo general, muy "blandos" porque es fácil deslizar una capa del cristal sobre la que le sigue. Puede que piensen: "es ridículo; los metales son resistentes". Pues no es así; un *monocristal* de un metal se puede deformar muy fácilmente.

Supongan que nos fijamos en dos capas de un cristal sujeto a una fuerza de corte, como muestra el diagrama de la figura 30-11(a). A primera vista podrían pensar que la capa entera se resistiría al movimiento hasta que la fuerza fuera lo suficientemente grande como para empujar toda la capa "por encima de la loma", de modo que se corriera una muesca hacia la izquierda. Aunque el deslizamiento ocurra a lo largo de un plano, no es así como sucede. (Si así fuera, calcularían que el metal es mucho más resistente de lo que es.) Lo que sucede es que más o menos un átomo va cada vez; primero salta el átomo de la izquierda, luego el siguiente y así sucesivamente como se indica en la figura 30-11(b). El efecto es

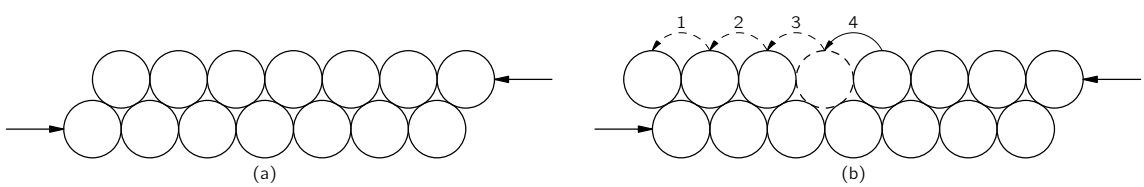


Figura 30-11. Deslizamiento de planos de un cristal.

que el espacio vacante entre dos átomos viaja rápidamente hacia la derecha con el resultado total de que toda la segunda capa se ha corrido un espaciamiento atómico. El deslizamiento ocurre de esta manera porque se necesita mucho menos energía para levantar un átomo cada vez por encima de la loma que levantar toda una fila. Una vez que la fuerza es suficiente para iniciar el proceso, éste va hasta el fin muy rápidamente.

En un cristal real el deslizamiento ocurre repetidamente en un plano, luego se detiene allí y empieza en otro plano. Los detalles de por qué empieza y se detiene son bastante misteriosos. De hecho, es muy extraño que las regiones sucesivas de deslizamiento estén frecuentemente espaciadas en forma bastante regular. La figura 30-12 muestra una fotografía de un minúsculo cristal delgado de cobre que ha sido estirado. Pueden ver los diversos planos donde ha habido deslizamiento.

El deslizamiento repentino de un solo plano cristalino se pone claramente en evidencia si toman un pedazo de alambre de estaño que contiene grandes cristales y lo estiran cerca de sus oídos. Pueden oír una ráfaga de "ticks" a medida que los planos saltan a sus nuevas posiciones uno después de otro.

El problema de tener un átomo "que falta" en una fila es algo más difícil de lo que parecería según la figura 30-11. Cuando hay más capas, la situación debe ser algo así como lo que muestra la figura 30-13. Una imperfección como ésta en un cristal se llama *dislocaciones*. Se presume que tales dislocaciones, o bien estaban presentes cuando se formó el cristal, o bien se generaron en alguna muesca o rajadura en la superficie. Una vez producidas, el cristal las puede mover en forma relativamente libre. Las deformaciones macroscópicas resultan del movimiento de tales dislocaciones en gran cantidad.

Las dislocaciones se pueden mover libremente —es decir, necesitan poca energía adicional— mientras que el resto del cristal tenga una red perfecta. Pero pueden "pegarse" si chocan contra otro tipo de imperfección del cristal. Si necesitan mucha energía para pasar la imperfección, se detendrán. Éste es precisamente el mecanismo que da resistencia a los cristales metálicos *imperfectos*. Los cristales puros de hierro son completamente blandos, pero una pequeña concentración de átomos de impureza puede originar imperfecciones suficientes para inmovilizar efectivamente las dislocaciones. Como saben, el acero, que es principalmente hierro, es muy duro. Para hacer acero, se disuelve una pequeña cantidad de carbono en el hierro fundido; si se enfría rápidamente, el carbono precipita en pequeños granos, ocasionando muchas distorsiones microscópicas en la red. Las dislocaciones ya no se pueden mover y el metal es duro.

El cobre puro es muy blando, pero se lo puede "endurecer por deformación". Esto se hace martillándolo o doblándolo para un lado y para otro. En este caso, se hacen muchas dislocaciones nuevas de diversos tipos que interfieren unas con otras, limitando su movilidad. Quizá hayan observado el truco de tomar una varilla de cobre "absolutamente blando" y enrollarla suavemente en la muñeca de alguien como una pulsera. En el proceso se endurece por deformación ¡y no es posible desenrollarla de nuevo fácilmente! Se puede ablandar de nuevo un metal endurecido por deformación como el cobre, mediante recocido a alta temperatura. El movimiento térmico de los átomos "plancha" las dislocaciones y hace que aparezcan de nuevo grandes monocristales. Hasta ahora hemos descrito únicamente la dislocación *por deslizamiento*. Hay muchas otras clases, una de las cuales es la dislocación *helicoidal* mostrada en la figura 30-14. Esas dislocaciones desempeñan a menudo un papel importante en el crecimiento de cristales.

Figura 30-12. Una fotografía de un cristal pequeño de cobre que ha sido estirado. [Cortesía de S. S. Brenner, Científico del Centro de Investigación de Acero de Estados Unidos, Monroeville, Pa.]

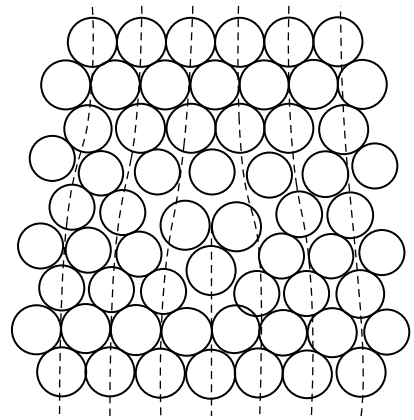


Figura 30-13. Una dislocación en un cristal.

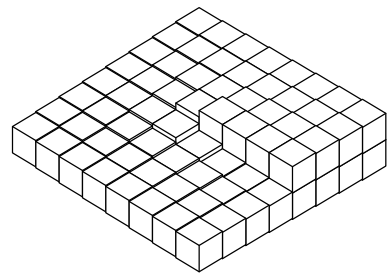


Figura 30-14. Una discolación helicoidal. [De Charles Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 2ª ed., John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1956.]

30-8 Dislocación y crecimiento de cristales

Durante mucho tiempo, uno de los grandes enigmas fue cómo es posible que los cristales puedan crecer. Hemos descrito cómo cada átomo podría, por pruebas repetidas, determinar si era mejor estar en el cristal o no. Eso significa que debe encontrar un lugar de baja energía. Sin embargo, un átomo puesto sobre una superficie nueva sólo está ligado por uno o dos enlaces desde abajo y no tiene la misma energía que tendría si estuviera colocado en una esquina, donde tendría átomos por los tres lados. Supongan que imaginamos un cristal en crecimiento

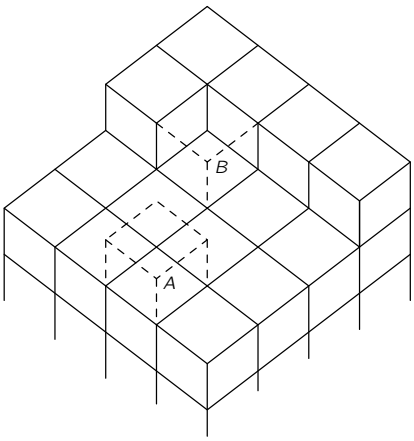


Figura 30-15. Crecimiento de un cristal.

como una pila de bloques, como muestra la figura 30-15. Si probamos un nuevo bloque, en la posición A digamos, tendrá únicamente uno de los seis vecinos que deberá tener finalmente. Con tantos enlaces que faltan, su energía no es muy baja. Estaría en mejores condiciones en la posición B, donde ya tiene la mitad de su cuota de enlaces. Los cristales crecen realmente fijando átomos en lugares como B.

¿Qué ocurre, sin embargo, cuando se termina una línea? Para empezar una nueva línea, un átomo tiene que llegar al reposo con sólo dos lados ligados y eso tampoco es muy probable. Y aunque lo hiciera, ¿qué ocurriría cuando se terminara la capa? ¿Cómo podría iniciarse una nueva capa? Una respuesta es que el cristal prefiere crecer en una dislocación, por ejemplo, alrededor de una dislocación helicoidal como lo muestra la figura 30-14. A medida que se agregan bloques a este cristal, siempre hay algún lugar donde hay tres enlaces disponibles. En consecuencia, el cristal prefiere crecer con una dislocación en él. La figura 30-16, que es una fotografía de un monocristal de parafina, muestra tal diagrama espiral de crecimiento.

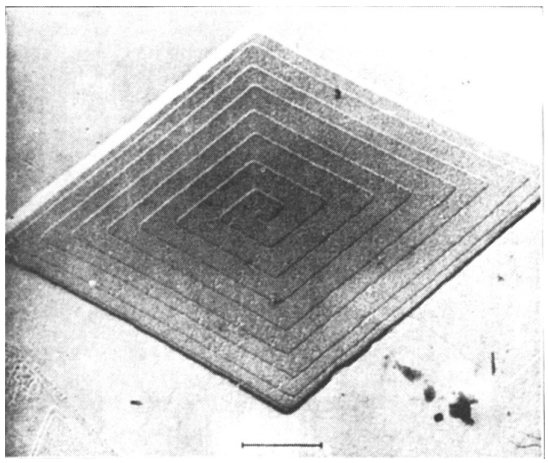


Figura 30-16. Un cristal de parafina que ha crecido al rededor de una dislocación helicoidal. [De Charles Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 2ª ed., John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1956.]

30-9 El modelo cristalino de Bragg-Nye

Por supuesto, no podemos ver lo que le pasa a cada uno de los átomos del cristal. Además, a estas alturas ya se dan cuenta de que hay mucho menos fenómenos complicados que no son fáciles de tratar cuantitativamente. Sir Lawrence Bragg y J. F. Nye han descubierto una manera de hacer un modelo de cristal metálico que muestra de modo sorprendente muchos de los fenómenos que se cree ocurren en un metal real. En las páginas que siguen hemos reproducido su artículo original, el cual describe su método y muestra algunos de los resultados obtenidos. (El artículo es una reproducción de *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. 190, septiembre, 1947, pp. 474-481 —con el permiso de los autores y de la Sociedad Real—.)

Modelo dinámico de estructura cristalina

Por Sir Lawrence Bragg, F. R. S. y J. F. Nye

Laboratorio Cavendish, Universidad de Cambridge

(Recibido el 9 de enero de 1947—Leído el 19 de junio 1947)

[Láminas 8 a 21]

Se representa la estructura cristalina de un metal por medio de un conjunto de burbujas, de un milímetro de diámetro o menos, flotando en la superficie de una solución jabonosa. Se sopla las burbujas con una pipeta fina por debajo de la superficie con presión de aire constante, resultando de tamaño notablemente uniforme. Se mantienen unidas por la tensión superficial, sea en una sola capa sobre la superficie o en una masa tridimensional. Un conjunto puede tener centenares de miles de burbujas y puede persistir durante una hora o más. Los conjuntos muestran estructuras que se ha supuesto que existen en los metales y simulan efectos que han sido observados, como límites de granos, dislocaciones y otros tipos de fallas, deslizamiento, recristalización, recocido y deformaciones debidas a átomos "extraños".

1. El modelo de burbujas

De vez en cuando se han descrito modelos de estructura cristalina en los cuales se representa los átomos por medio de pequeños imanes flotantes o suspendidos, o de discos circulares flotando en una superficie de agua y mantenidos juntos por las fuerzas de atracción capilar. Estos modelos tienen ciertas desventajas; por ejemplo, en el caso de objetos flotantes en contacto las fuerzas de roce dificultan su movimiento relativo libre. Una desventaja más seria es que el número de componentes es limitado, ya que se necesita un gran número de componentes para aproximar el estado de cosas existentes en un cristal real. El presente artículo describe el comportamiento de un modelo en el que se representa a los átomos por medio de burbujas pequeñas de 2.0 a 0.1 mm de diámetro flotando en la superficie de una solución jabonosa. Estas pequeñas burbujas son suficientemente persistentes para experimentos que duran una hora o más, se deslizan una sobre otra sin roce y se las puede producir en gran cantidad. Algunas de las ilustraciones de este artículo fueron obtenidas con conjuntos que llegaban a 100 000 burbujas o más. El modelo representa lo más cercanamente posible el comportamiento de una estructura metálica, porque las burbujas son de un solo tipo y se mantienen unidas por una atracción capilar general, la cual representa la fuerza de ligadura de los electrones libres del metal. Se ha dado una breve descripción del modelo en el *Journal of Scientific Instruments* (Bragg, 1942b).*

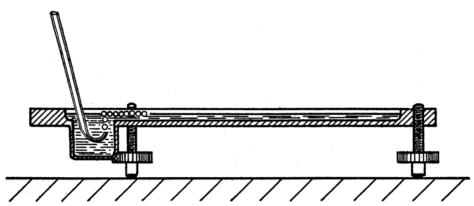


Figura 1. Aparato para la producción de balsas de burbujas.

2. Método de formación

Se sopla las burbujas por un orificio muy pequeño por debajo de la superficie de una solución jabonosa. Hemos obtenido los mejores resultados usando una solución cuya fórmula nos dio el señor Green, de la Royal Institution. Se agita bien 15.2 cc de ácido oleico (redestilado puro) en 50 cc de agua destilada. Se mezcla esto completamente con 73 cc de solución al 10 % de trietanolamina y se lleva la mezcla con 200 cc. A esto se le agrega 164 cc de glicerina pura. Se deja reposar y se retira el líquido claro de la parte inferior. En algunos experimentos se diluyó esto en tres veces su volumen de agua para reducir la viscosidad. El orificio de la boquilla está a unos 5 mm por debajo de la superficie.

* N. del T.: "Revista de Instrumentos Científicos".

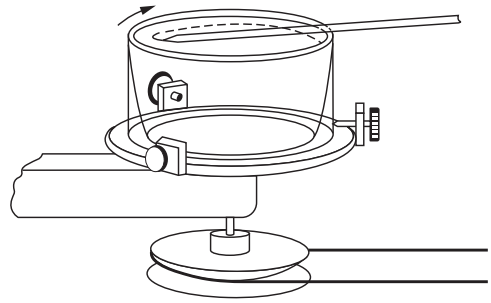


Figura 3. Aparato para producir burbujas pequeñas.

Por medio de dos frascos de Winchester se suministra una presión constante de aire de 50 a 200 cm de agua. Normalmente las burbujas tienen un amaso notablemente uniforme. Ocasionalmente salen de manera irregular, pero esto se puede corregir cambiando la boquilla o la presión. Se puede destruir fácilmente las burbujas indeseables pesando una pequeña llama por la superficie. La figura 1 muestra el aparato. Hemos encontrado que resulta ventajoso ennegrecer el fondo del recipiente porque de esa manera se manifiestan más claramente los detalles de estructura, como límites de granos y dislocaciones.

La figura 2, lámina 8, muestra un trozo de una "balsa" o cristal bidimensional de burbujas. Se puede apreciar su regularidad mirando la figura oblicuamente. El tamaño de las burbujas varía con la abertura, pero no parece variar en mayor grado con la presión o la profundidad del orificio debajo de la superficie. El principal efecto de aumentar la presión es aumentar la rapidez con que se expelen las burbujas. A modo de ejemplo, una boquilla de paredes gruesas y diámetro interno 49μ con una presión de 100 cm produjo burbujas de 1.2 mm de diámetro. Conviene referirse a las burbujas de 2.0 a 1.0 mm de diámetro como burbujas "grandes", a las de 0.8 a 0.6 mm de diámetro como burbujas "medianas" y a las 0.3 a 0.1 mm de diámetro como burbujas "pequeñas", ya que su comportamiento varía con el tamaño.

Con este aparato no nos ha sido posible reducir el tamaño de la boquilla para producir así burbujas de diámetro menor de 0.6 mm. Como se deseaba experimentar con burbujas muy pequeñas decidimos colocar la solución jabonosa en un recipiente rotante e introducir un chorro fino lo más paralelo posible a una línea de corriente. Las burbujas son barridas hacia afuera a medida que se forman y en condiciones estacionarias son razonablemente uniformes. Salen a razón de 1 000 o más por segundo, produciendo una nota alta. La solución jabonosa sube formando una pared empinada en el perímetro del recipiente mientras está rotando, pero lleva consigo la mayoría de las burbujas cuando cesa la rotación. Con este dispositivo, ilustrado en la figura 3, es posible obtener burbujas de hasta 0.12 mm de diámetro. A modo de ejemplo, un orificio de $38\,\mu$ en una boquilla de paredes delgadas, con una presión de 190 cm de agua y una velocidad de salida del fluido por el orificio de 180 cm/s, produjo burbujas de 0.14 mm de diámetro. En este caso, se usó una bandeja de 9.5 cm de diámetro y una velocidad de 6 rev/s. La figura 4, lámina 8, es una fotografía ampliada de estas burbujas "pequeñas" y muestra su grado de regularidad; con un recipiente rotante el diagrama no es tan perfecto como con un recipiente estático, pudiéndose ver que las filas son ligeramente irregulares mirándolas oblicuamente.

Estos cristales bidimensionales muestran estructuras que se han supuesto existen en los metales y simulan efectos que han sido observados, como límites de granos, dislocaciones y otros tipos de fallas, deslizamiento, recristalización, recocido y deformaciones debidas a átomos "extraños".

3. Límites de granos

Las figuras 5*a*, 5*b* y 5*c*, láminas 9 y 10, muestran límites de granos típicos para burbujas de 1.87, 0.76 y 0.30 mm de diámetro respectivamente. El ancho del área perturbada en el límite, donde las burbujas tienen una distribución irregular, es, en general, mayor cuanto mayores son las burbujas. En la figura 5*a*, que muestra pedazos de varios granos adyacentes, las burbujas que están en el límite entre dos granos adoptan en forma definida uno u otro ordenamiento cristalino. En la figura 5*c* hay una "capa de Beilby" bien marcada entre los dos granos. Como se verá, las burbujas pequeñas tienen mayor rigidez

que las grandes y esto parece dar lugar a una irregularidad mayor en la superficie de separación.

Los distintos granos se manifiestan nítidamente cuando se mira oblicuamente a las fotografías de las balsas policristalinas, como las figuras 5*a* a 5*c*, láminas 9 y 10, y las figuras 12*a* a 12*e*, láminas 14 a 16. Con iluminación conveniente, la propia balsa flotante de burbujas se parece notablemente, cuando se la mira oblicuamente, a un metal pulido y atacado.

Sucede frecuentemente que se encuentran algunos "átomos de impureza", o sea burbujas notablemente mayores o menores que la media, en una balsa policristalina, y, cuando así ocurre, una gran proporción de ellos está situado en los límites de granos. Sería incorrecto decir que las burbujas irregulares se dirigen hacia los límites; es un defecto del modelo el que no pueda haber difusión de burbujas por la estructura, siendo posible únicamente ajustes mutuos. Parece que los límites tienden a reajustarse por crecimiento de un cristal a expensas del otro hasta que llegan a los átomos irregulares.

4. Dislocaciones

Cuando se comprime, se estira o se deforma de alguna otra manera, una balsa mono o policristalina presenta un comportamiento muy similar al que se ha imaginado para cristales sujetos a esfuerzo. Hasta cierto límite, el modelo está dentro del intervalo elástico. Más allá de ese punto cede por deslizamiento según una de las tres direcciones igualmente inclinadas de filas en apilamiento compacto. El apilamiento tiene lugar cuando las burbujas de una fila avanzan sobre las de la siguiente en una cantidad igual a la distancia entre vecinas. Es muy interesante observar este proceso cuando se lleva a cabo. El movimiento no es simultáneo en cada fila sino que empieza por un extremo con la aparición de una "dislocación", donde hay localmente una burbuja más en las filas que están de un lado de la línea de deslizamiento que las que están en el otro. Esta dislocación corre a lo largo de la línea de deslizamiento de un extremo al otro del cristal, siendo el resultado final un deslizamiento de una distancia "interatómica". Orowan, Polanyi y Taylor han recurrido a este proceso para explicar lo pequeñas que son las fuerzas necesarias para producir deslizamientos plásticos en estructuras metálicas. La teoría propuesta por Taylor (1934) para explicar el mecanismo de la deformación plástica de los cristales considera la acción mutua y el equilibrio de tales dislocaciones. Las burbujas suministran una representación sorprendente de lo que se ha supuesto tiene lugar en el metal. A veces, las dislocaciones corren muy lentamente, tardando unos segundos en atravesar el cristal; también se ven dislocaciones estáticas en cristales que no están homogéneamente sometidos a esfuerzo. Aparecen como líneas negras cortas y se las puede ver en la serie de fotografías de las figuras 12*a* a 12*e*, láminas 14 a 16. Cuando se comprime una balsa policristalina, se ve estas líneas oscuras correr en todas direcciones por los cristales.

Las figuras 6*a*, 6*b* y 6*c*, láminas 10 y 11, muestran ejemplos de dislocaciones. En la figura 6*a* donde el diámetro de las burbujas es 1.9 mm, la dislocación es muy local, extendiéndose por unas seis burbujas. En la figura 6*b* (0.76 mm de diámetro) se extiende por 12 burbujas, y en la figura 6*c* (0.30 mm de diámetro) se puede seguir su influencia por una longitud de unas 50 burbujas. La mayor rigidez de las burbujas pequeñas conduce a dislocaciones mayores. Sin embargo, el estudio de cualquier masa de burbujas muestra que no hay una longitud típica de dislocación para cada tamaño. La longitud depende de la naturaleza de los esfuerzos presentes en el cristal. Un límite entre dos cristales con ejes correspondientes formando un ángulo de aproximadamente 30° (el ángulo máximo que puede presentarse) se puede considerar como una serie de dislocaciones en filas alternadas y en este caso las dislocaciones son muy cortas. A medida que disminuye el ángulo entre los cristales vecinos, las dislocaciones se presentan a intervalos mayores, haciéndose más largas al mismo tiempo, hasta que finalmente se tiene una sola dislocación en una extensión de estructura perfecta como muestran las figuras 6*a*, 6*b* y 6*c*. La figura 7, lámina 11, muestra tres dislocaciones paralelas. Si las llamamos positivas y negativas (según Taylor), esas dislocaciones son positiva, negativa, positiva, yendo de izquierda a derecha. La banda entre las dos últimas tiene tres burbujas de más, como se puede ver mirando horizontalmente en la dirección de las filas. La figura 8, lámina 12, muestra una dislocación, proyectándose desde el límite de un grano, lo cual es un efecto observado frecuentemente.

La figura 9, lámina 12, muestra un lugar donde dos burbujas ocupan el lugar de una. Se puede considerar esto como el caso límite de dislocaciones positivas y negativas en filas adyacentes, con los lados compresivos de las dislocaciones enfrentados. El caso contrario llevaría a un hueco a la estructura, faltando una burbuja en el punto donde se encuentran las dislocaciones.

5. Otros tipos de falla

La figura 10, lámina 12, muestra una banda angosta entre dos cristales de orientación paralela, banda que está cruzada por una cantidad de líneas de falla donde las burbujas no están apiladas. Es en lugares como éstos donde es de esperar recristalización. Los límites se aproximan y la banda se absorbe en una región más amplia de cristal perfecto.

Las figuras 11*a* a 11*g*, láminas 13 y 14, son ejemplos de ordenamientos que aparecen frecuentemente en lugares donde hay escasez de burbujas. Mientras que una dislocación se ve como una franja oscura en una visión general, estas estructuras se manifiestan en forma de V o como triángulos. En la figura 11*a* se aprecia una típica estructura en V. Cuando se está deformando el modelo, se forma una estructura en V con dos dislocaciones que se interceptan a una inclinación 60°; se destruyen al continuar las dislocaciones su camino. La figura 11*b* muestra un pequeño triángulo, que también incluye una dislocación, ya que se notará que las filas por debajo de la falla tienen una burbuja más que las anteriores. Si se impone una ligera cantidad de "movimiento térmico" agitando suavemente un lado del cristal, esos sitios de falla desaparecen y se forma una estructura perfecta.

En el cristal hay aquí y allá espacios en blanco donde falta una burbuja, lo cual se manifiesta como un punto negro en una vista general. En la figura 11*g* hay ejemplos de esto. Esta brecha no se puede cerrar por medio de un reajuste local, ya que al llenarse el hueco aparece otro. Esos huecos aparecen y desaparecen al "trabajar" el cristal "en frío". Estas estructuras del modelo sugieren que fallas locales similares puedan existir en un metal verdadero. Puede que tengan un papel en procesos como la difusión o el cambio orden-desorden reduciendo las barreras energéticas en sus cercanías y que actúen como núcleos de cristalización en un cambio alotrópico.

6. Recristalización y recocido

Las figuras 12*a* a 12*e*, láminas 14 a 16, muestran la misma balsa de burbujas en instantes sucesivos. Con un rastrillo de vidrio se revolvió fuertemente una balsa que cubría la superficie de la solución y luego se la dejó que se reordenara. La figura 12*a* muestra su aspecto alrededor de 1 s después de haber dejado de revolver. La balsa está rota en pequeñas "cristalitas"; están en un alto grado de deformación inhomogénea, como lo demuestran las numerosas dislocaciones y otras fallas. La fotografía siguiente (figura 12*b*) muestra la misma balsa 32 s después. Los pequeños granos se han unido para formar granos mayores y en el proceso ha desaparecido gran parte de las deformaciones. La recristalización tiene lugar a lo largo de toda la serie, cuyas tres últimas fotografías muestran el aspecto de la balsa 2, 14 y 25 min después de haber revuelto. No es posible seguir el reordenamiento durante periodos mucho más largos, porque las burbujas se encogen después de estar mucho tiempo, debido aparentemente a la difusión de aire a través de sus paredes, y también a que se tornan muy delgadas y tienden a reventarse. Durante el proceso no se agitó el modelo. Tiene lugar un proceso de reordenamiento cada vez más lento, en el que las burbujas de una parte de la balsa establecen deformaciones que activan un reordenamiento en una parte vecina y ésta a su vez en otra.

Hay que ver una cantidad de cuestiones interesantes en esta serie. Observen los tres granos pequeños en las posiciones indicadas con las coordenadas AA, BB, CC. A persiste, aunque cambie de forma, en toda la serie. B sigue estando después de 14 min pero ha desaparecido en 25 min, dejando atrás cuatro dislocaciones que marcan una deformación interna en el grano. El grano C se encoge y finalmente desaparece en la figura 12*d*, dejando un hueco y una V que ha desaparecido en la figura 12*e*. Al mismo tiempo, el límite poco definido en DD de la figura 12*d* se ha hecho bien definido en la figura 12*e*. Nótese también el enderezamiento del límite entre granos en la cercanía de EE en las figuras 12*b* a 12*e*. Se pueden ver dislocaciones de diversas longitudes, marcando todas las etapas entre un ligero alabeo de las estructuras y un límite definido. Los huecos donde faltan burbujas se manifiestan como puntos negros. Algunos de estos agujeros se forman o se llenan por el movimiento de las dislocaciones, pero otros representan lugares donde ha reventado una burbuja. Se pueden notar muchos ejemplos

de V y algunos de triángulo. Aparecerán otras cuestiones interesantes estudiando esta serie de fotografías.

Las figuras 13*a*, 13*b* y 13*c*, lámina 17, muestran una parte de una balsa 1 s, 4 s y 4 min después de revolver y es interesante por cuanto muestran dos etapas sucesivas de la relajación hacia un ordenamiento más perfecto. Los cambios se manifiestan claramente cuando se mira oblicuamente a través. El ordenamiento está muy quebrado en la figura 13*a*. En la figura 13*b* las burbujas se han agrupado en filas, pero la curvatura de las mismas indica un alto grado de deformaciones internas. En la figura 13*c* estas deformaciones han sido parcialmente eliminadas por la formación de un nuevo límite en *A*-*A*, a cuyos lados las filas son rectas ahora. Parecería que la energía de este cristal con deformaciones es mayor que la del límite intercristalino. Agredecemos a la casa Kodak por las fotografías de la figura 13, que fueron tomadas al producir la película cinematográfica a que hacemos referencia más adelante.

7. Efectos de un átomo de impureza

La figura 14, lámina 18, muestra el efecto extendido de una burbuja de tamaño diferente. Si se compara esta figura con las balsas perfectas mostradas en las figuras 2 y 4, lámina 8, se verá que tres burbujas, una mayor y dos menores de lo normal, perturban la regularidad de las filas en toda la figura. Como se ha mencionado más arriba, las burbujas de tamaño inconveniente se encuentran generalmente en los límites de granos, donde hay huecos de tamaño irregular que pueden acomodarlas.

8. Propiedades mecánicas del modelo bidimensional

Las propiedades mecánicas de una balsa bidimensional perfecta han sido descritas en el artículo citado anteriormente (Bragg, 1942b). La balsa está entre dos resortes paralelos que se sumergen horizontalmente en la superficie de la solución jabonosa. Se ajusta el paso de los resortes de modo que encajen en el espaciamiento entre las filas de burbujas, las cuales se adhieren entonces firmemente a ellos. Se puede trasladar uno de los resortes paralelamente a sí mismo por medio de un tornillo micrométrico y el otro está suspendido de dos delgadas fibras de vidrio verticales. Se puede medir el esfuerzo de corte observando la deflexion de las fibras de vidrio. Cuando se la somete a un esfuerzo de corte, la balsa obedece la ley de elasticidad de Hooke hasta cierto punto en que se alcanza el límite elástico. Entonces se desliza a lo largo de una fila intermedia a una distancia igual al ancho de una burbuja. Se puede repetir varias veces la deformación elástica de corte y el deslizamiento. El límite elástico se alcanza aproximadamente cuando uno de los lados de la balsa se ha desplazado en la deformación de corte el ancho de una burbuja respecto al otro lado. Esta característica apoya una de nuestras hipótesis básicas en el cálculo del límite elástico de un metal (Bragg, 1942a), en la cual se supone que cada cristalita de un metal trabajado en frío cede únicamente cuando los esfuerzos que contiene alcanzan un valor tal que se libera energía por el deslizamiento.

M. M. Nicolson ha hecho un cálculo de las fuerzas entre burbujas que será publicado dentro de poco. Muestra dos cuestiones interesantes. La curva de variación de la energía potencial con distancia entre centros es muy similar a las que se han obtenido para átomos. Tiene un mínimo para una distancia entre centros ligeramente menores que el diámetro de una burbuja libre y para distancias menores sube fuertemente. Además, el ascenso es extremadamente empinado para burbujas de 0.1 mm de diámetro pero lo es mucho menos para burbujas de 1 mm de diámetro, lo cual confirma la impresión que da el modelo de que las pequeñas burbujas se comportan como si fueran mucho más rígidas que las grandes.

9. Ordenamientos tridimensionales

Si se permite que las burbujas se acumulen en capas múltiples sobre la superficie, forman una masa de "cristal" tridimensional con uno de los ordenamientos en pila más compacta. La figura 15, lámina 18, muestra una vista oblicua de esa masa; es notable su parecido con una superficie metálica pulida y atacada. La figura 16, lámina 20, muestra una vista normal de masa similar. Partes de la estructura están definidamente en el apilamiento cúbico más compacto, siendo la superficie externa la cara (111) o la cara (100). La figura 17*a*, lámina 19, muestra una cara (111). Se pueden ver claramente los contornos de las tres burbujas sobre las que descansa cada burbuja de arriba y la siguiente capa de estas burbujas es apenas visible en una posición no directamente por debajo de las de la capa superior, lo cual demuestra que el apilamiento de los planos (111) sigue la sucesión cúbica bien conocida. La figura 17*b*, lámina 19, muestra una cara (100) con cada burbuja descansando sobre otras cuatro. Por supuesto, los ejes cúbicos están inclinados a 45° respecto a las filas en apilamiento compacto de la capa superficial. La figura 17*c*, lámina 19, muestra una marca en la estructura cúbica transversal a la cara (111). Las caras que están más arriba son (111) y (100), y forman un ángulo pequeño entre sí, aunque esto no es evidente en la figura; se manifiesta mirando oblicuamente. La figura 17*d*, lámina 19, parece mostrar tanto la sucesión cúbica como la hexagonal de planos en apilamiento compacto, pero es difícil verificar si el lado izquierdo sigue la verdadera estructura hexagonal en apilamiento compacto porque no es seguro que el ordenamiento tuviera más de dos capas en este punto. En la figura 16, lámina 20, se puede ver muchos ejemplares de maclas y de límites intercristalinos.

La figura 18, placa 21, muestra varias dislocaciones en una estructura tridimensional sometida a un fuerzo flectante.

10. Demostración del modelo

Con la cooperación de la casa Kodak se ha hecho una película cinematográfica de 16 mm del movimiento de las por deslizamientos y de los límites de granos cuando se somete a las balsas mono y policristalinas a esfuerzos de corte, de compresión o de tensión. Además, si se coloca la solución jabonosa en un recipiente de vidrio con fondo plano, se puede proyectar el modelo en gran escala con luz transmitida. Como se necesita cierta profundidad para producir las burbujas y la solución es bastante opaca, es conveniente hacer la proyección a través de un bloque de vidrio descansando en el fondo del recipiente y apenas sumergido por debajo de la superficie.

Para concluir, deseamos expresar nuestro agradecimiento al señor C. E. Harold, del King's College, Cambridge, que nos hizo algunas de las pipetas usadas para producir las burbujas.

Referencias

Bragg, W. L. 1942*a* *Nature*, **149**, 511.
Bragg, W. L. 1942*b* *J. Sci. Instrum.*, **19**, 148.
Taylor, G. I. 1934 *Proc. Roy. Soc.* A, **145**, 362.

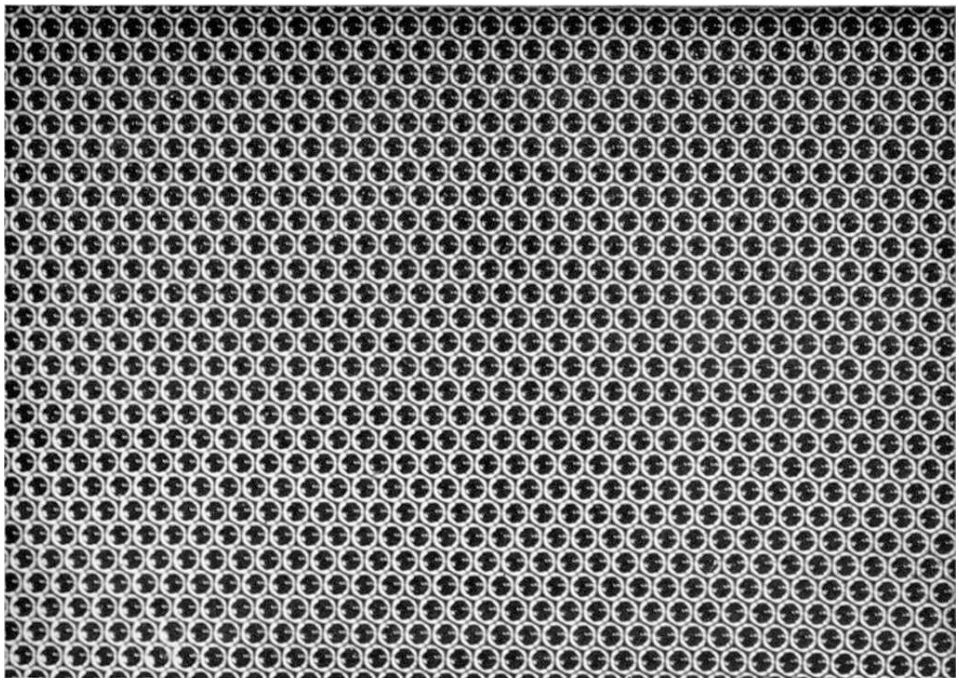


FIGURA 2. Balsa cristalina de burbujas perfecta. Diámetro 1.41 mm.

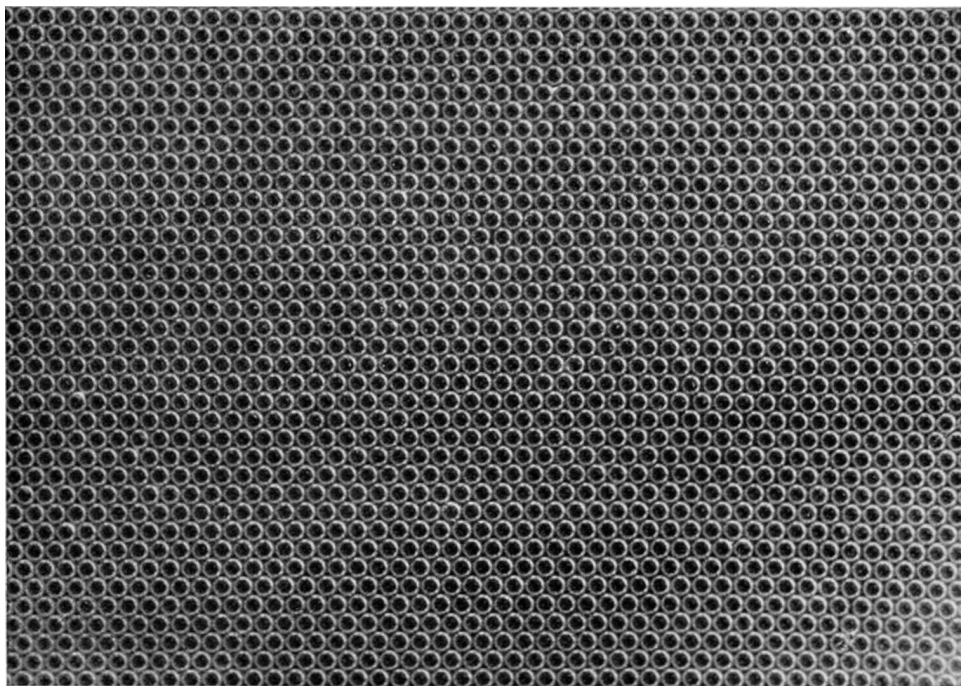


FIGURA 4. Balsa cristalina de burbujas perfecta. Diámetro 0.30 mm.

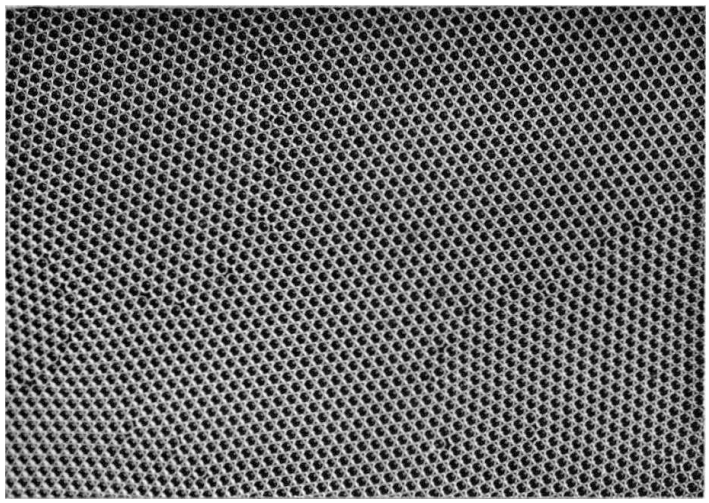


FIGURA 5*a*. Diámetro 1.87 mm.

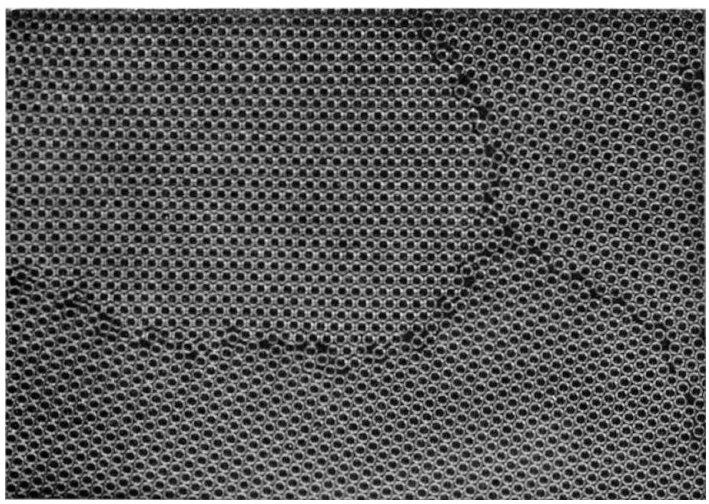


FIGURA 5*b*. Diámetro 0.76 mm.

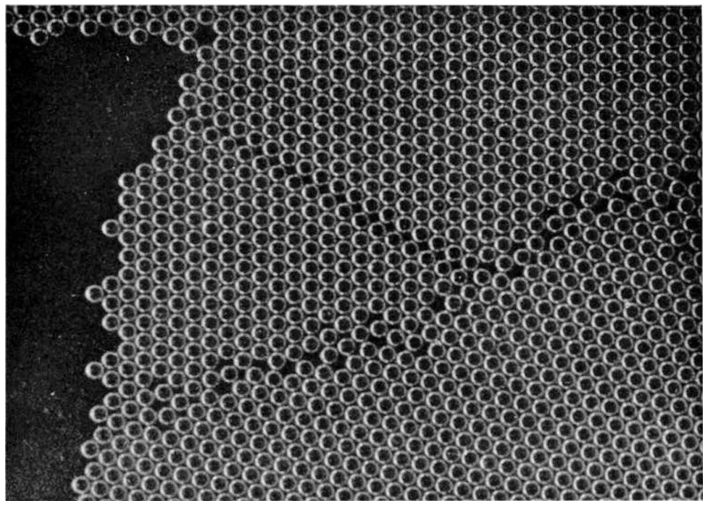


FIGURA 5*c*. Frontera de un grano. Diámetro 0.30 mm.

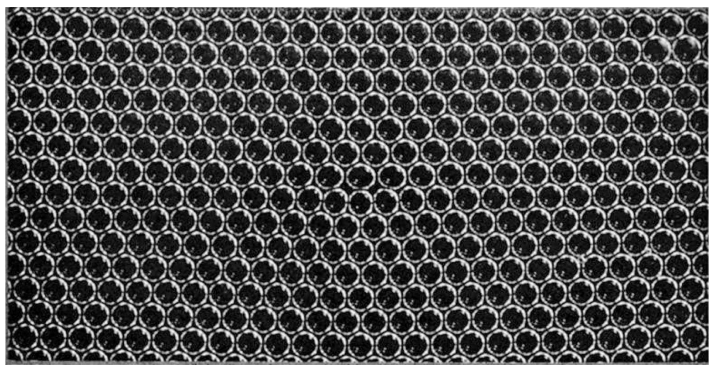


FIGURA 6*a*. Una dislocación. Diámetro 1.9 mm.

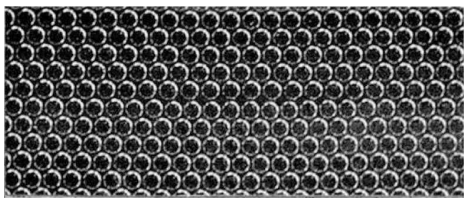


FIGURA 6*b*. Diámetro 0.76 mm.

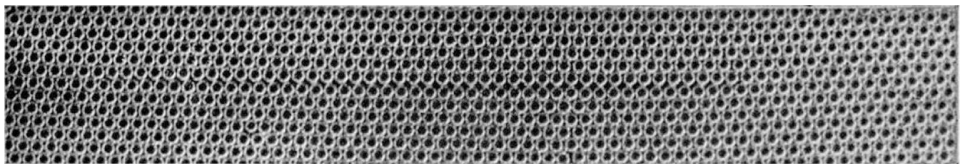


FIGURA 6*c*. Diámetro 0.30 mm.

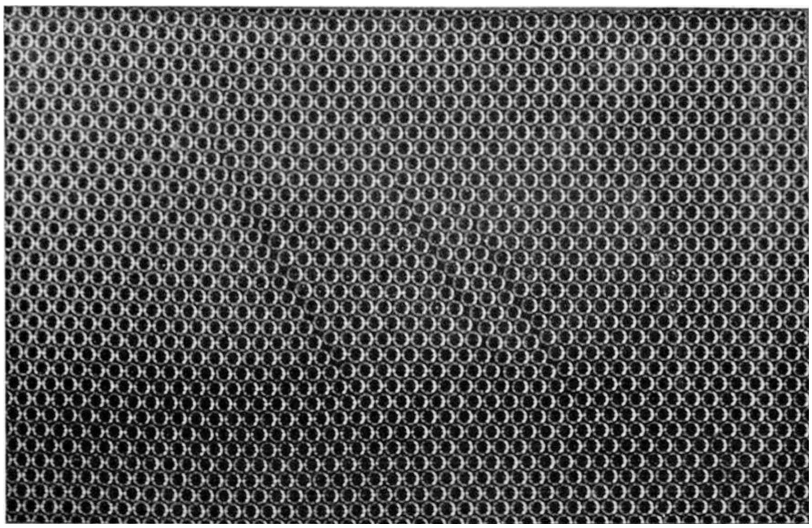


FIGURA 7. Dislocaciones paralelas. Diámetro 0.76 mm.

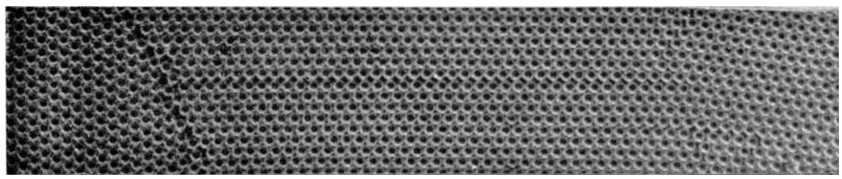


FIGURA 8. Proyectando una dislocación de la frontera de un grano. Diámetro 0.30 mm.

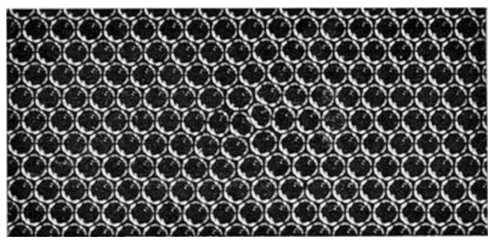


FIGURA 9. Dislocaciones en renglones adyacentes. Diámetro 1.9 mm.

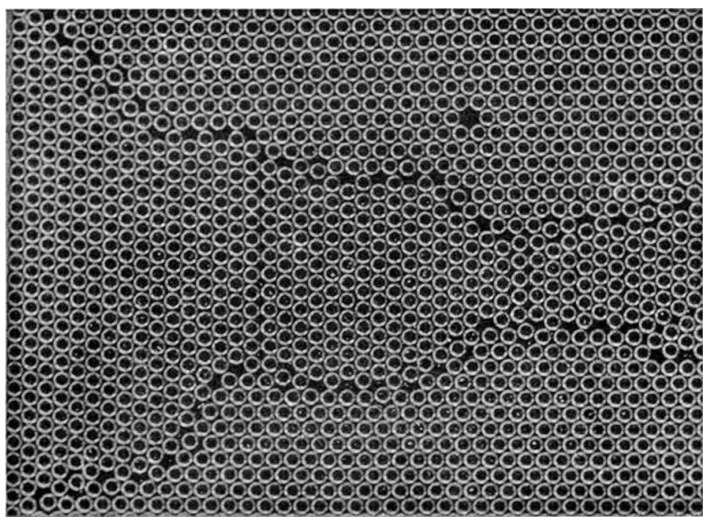
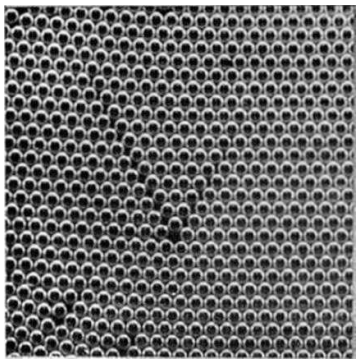


FIGURA 10. Serie de fallas entre dos áreas con orientación paralela. Diámetro 0.30 mm.



Diámetro 0.68 mm.

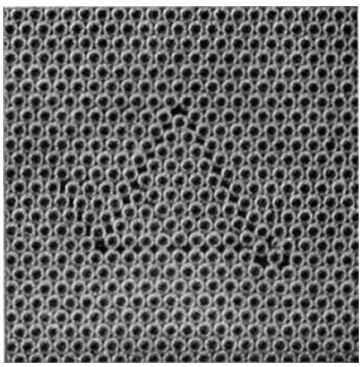
a

Diámetro 0.68 mm.

b

Diámetro 0.6 mm.

c

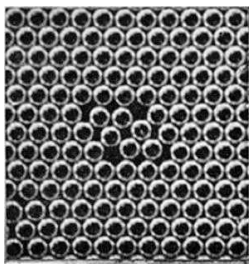


Diámetro 0.30 mm.

d

Diámetro 0.6 mm.

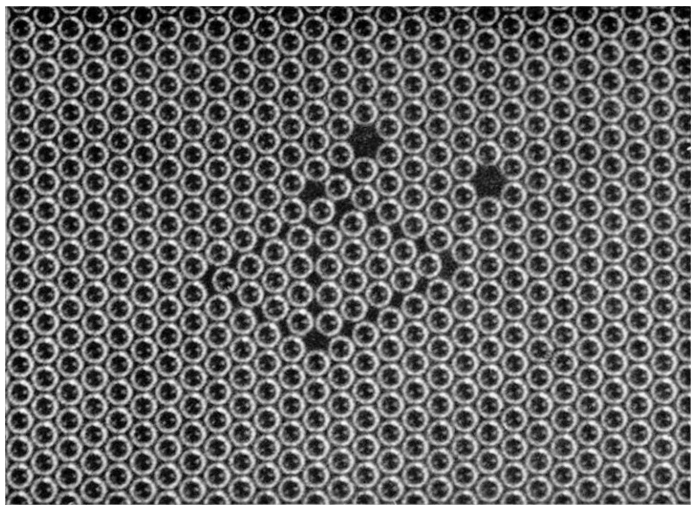
e



Diámetro 0.6 mm.

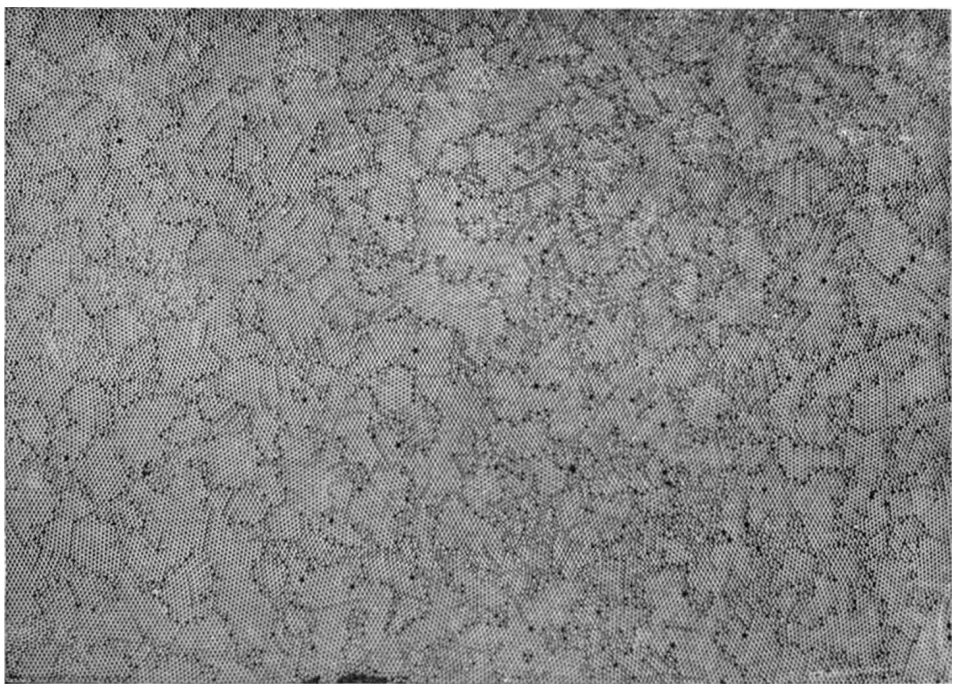
f

FIGURA 11. Tipos de falla.



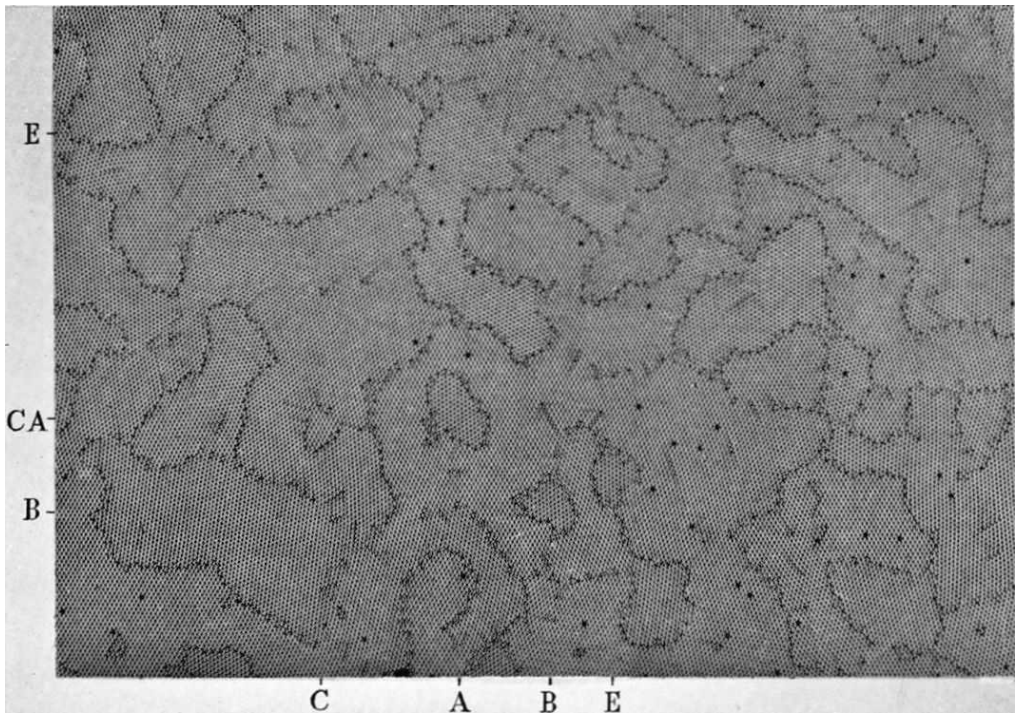
g

FIGURA 11. Tipos de falla. Diámetro 0.68 mm.

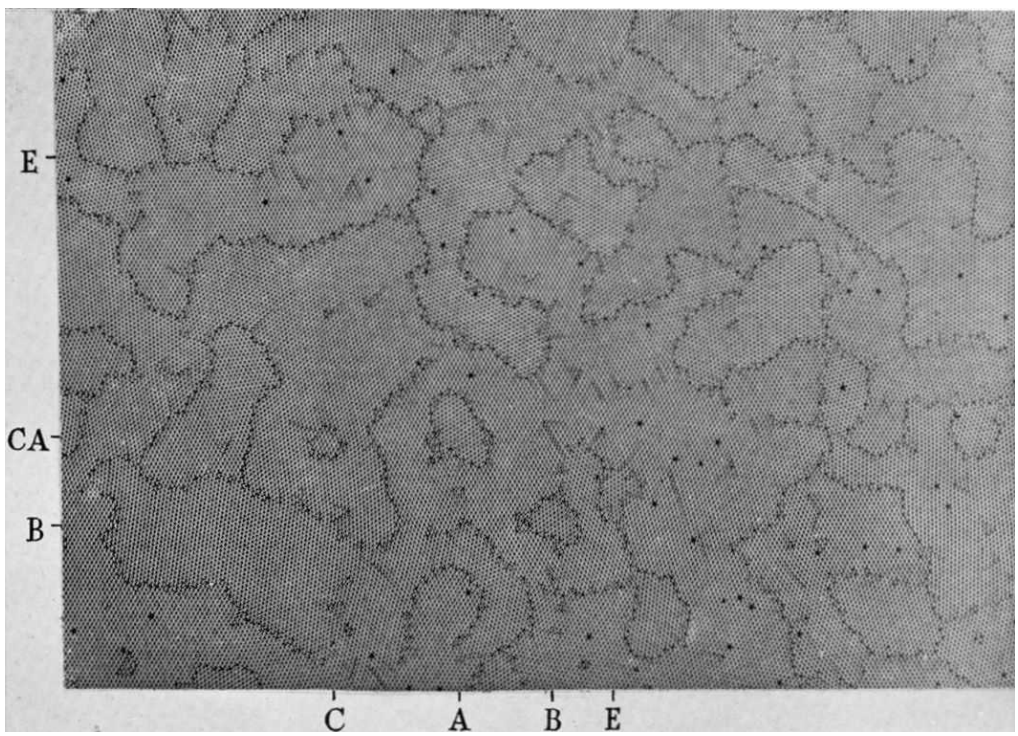


a. Inmediatamente después de revolver.

FIGURA 12. Recristalización. Diámetro 0.60 mm.

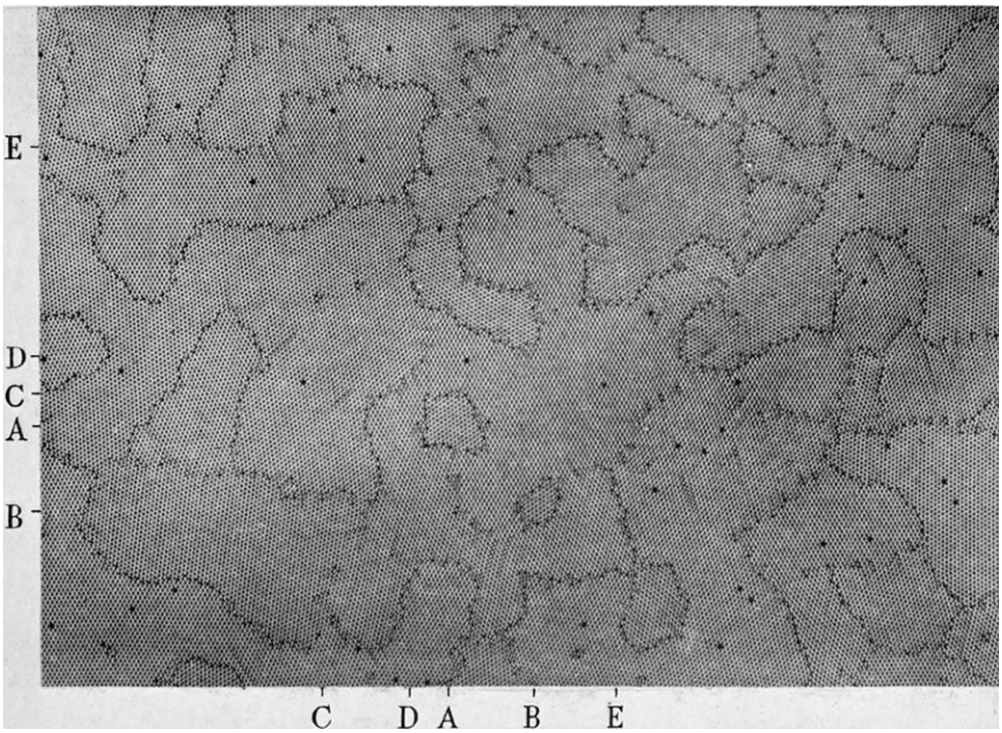


b. Después de 33 s.

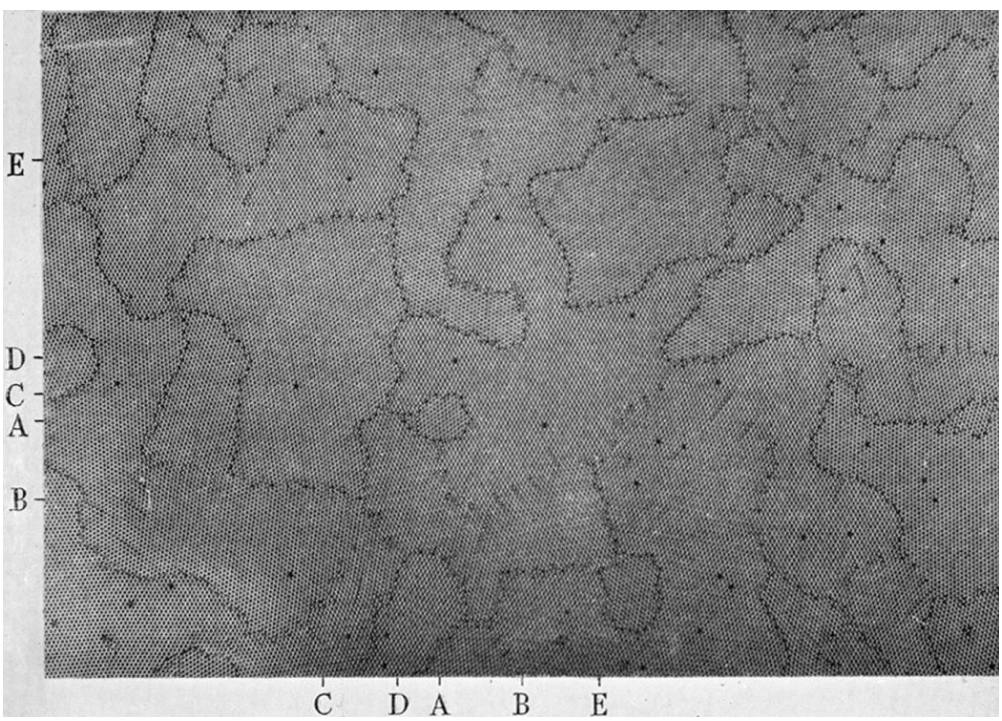


c. Después de 2 min.

FIGURA 12

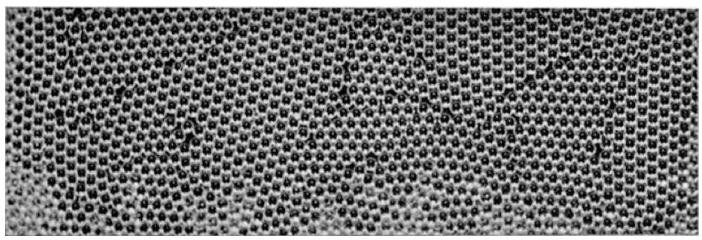


d. Después de 14 min.

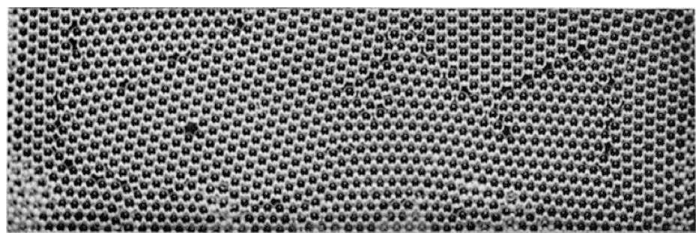


e. Después de 25 min.

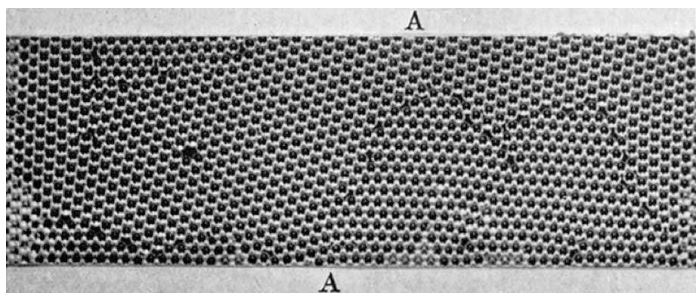
FIGURA 12



a. Después de 1 s.



b. Después de 4 s.



c. Después de 4 min.

FIGURA 13. Dos etapas de recristalización. Diámetro 1.64 mm.

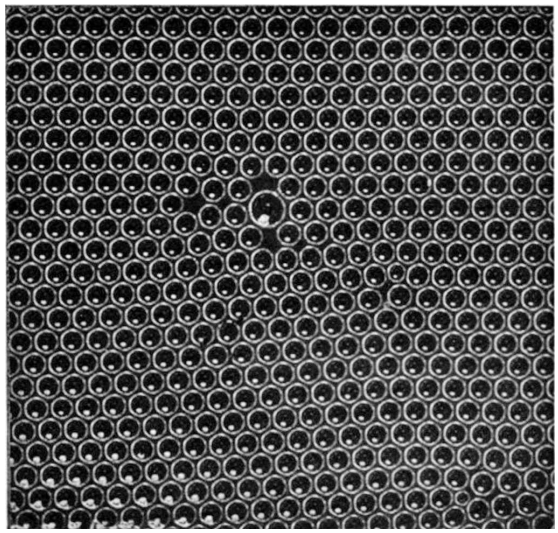


FIGURA 14. Efecto de átomos impuros. Diámetro de las burbujas uniformes, cerca de 1.3 mm.

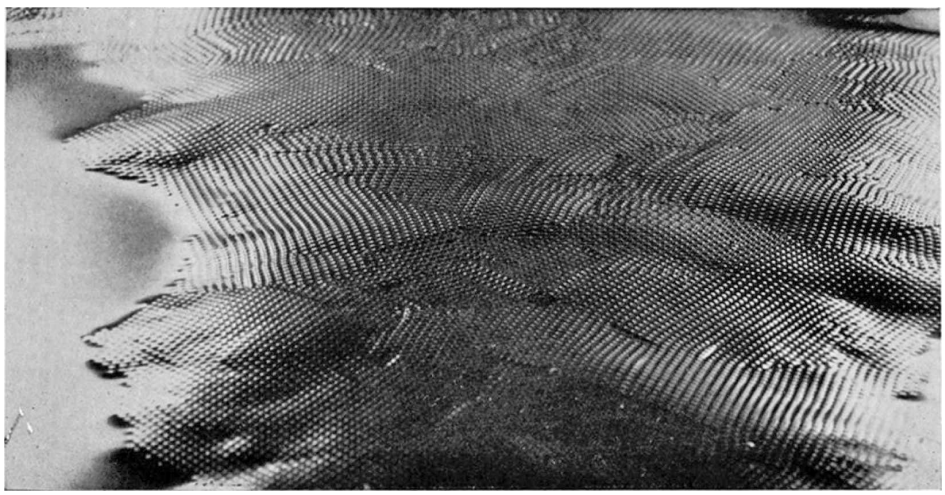


FIGURA 15. Vista oblicua de una balsa tridimensional.

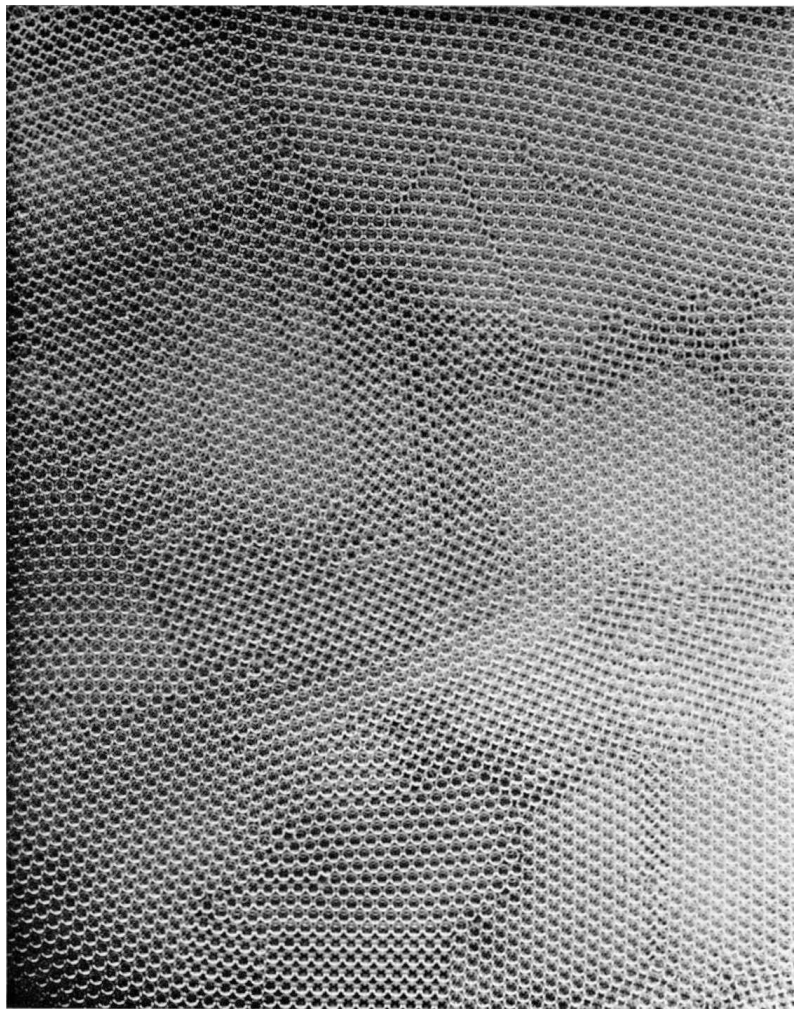
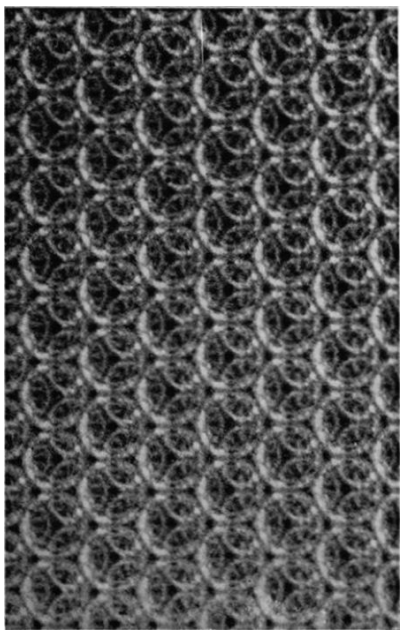
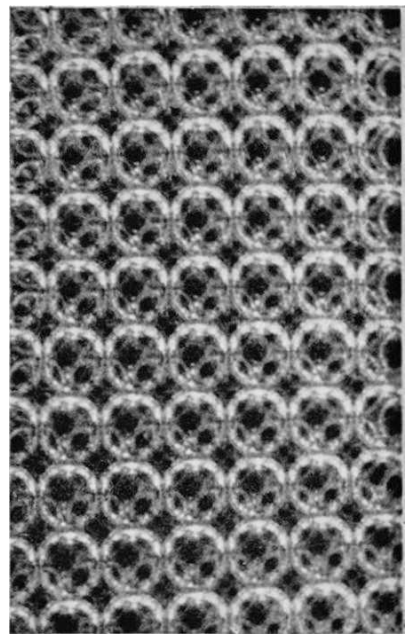


FIGURA 16. Una balsa tridimensional vista normalmente. Diámetro 0.70 mm.

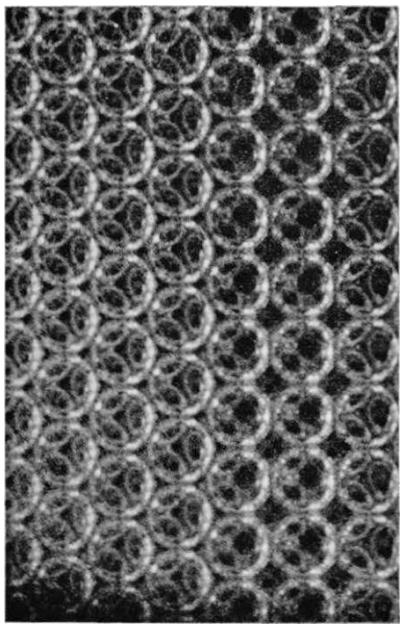


a. (111) caras.

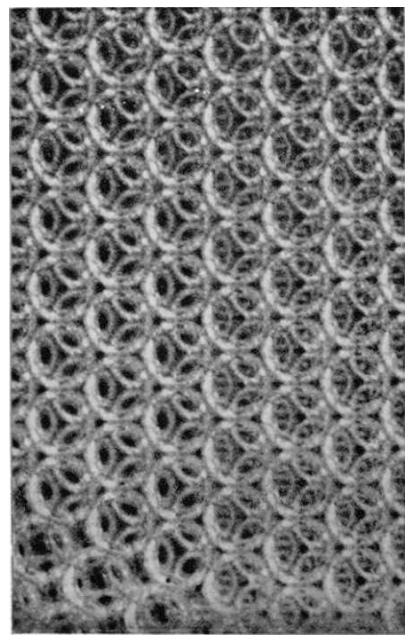


b. (100) caras.

Estructura cúbica de caras centradas.



c. Twin across (111), estructura cúbica. Diámetro 0.70 mm.



d. Posible ejemplo de un empacado compacto hexagonal

FIGURA 17

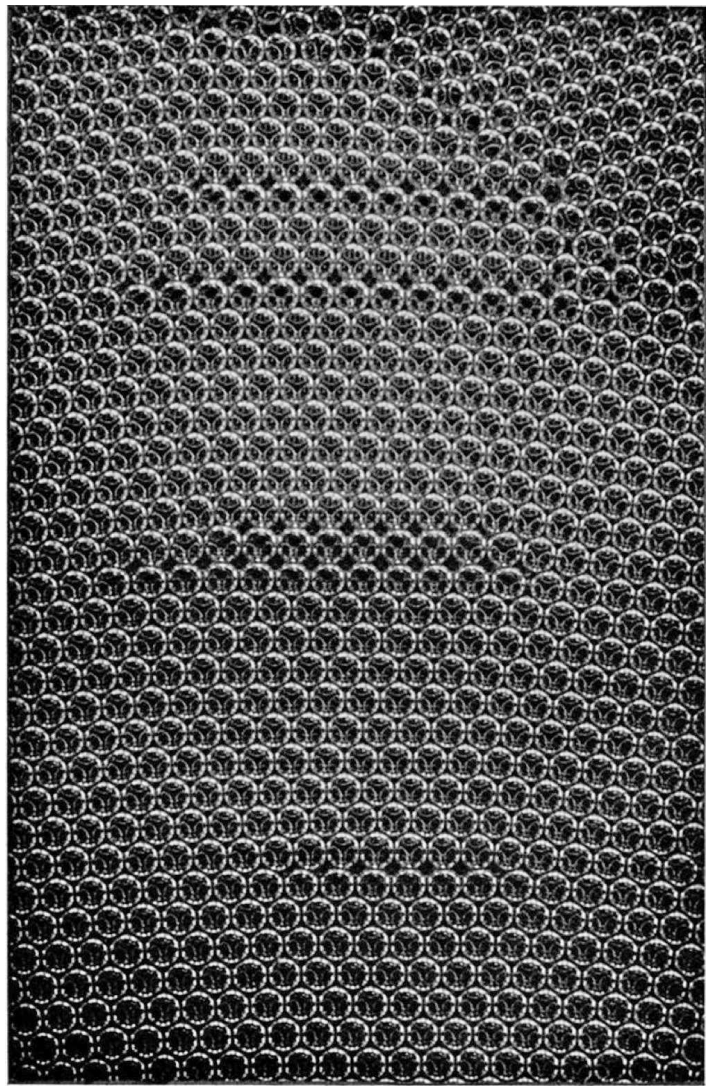


FIGURA 18. Dislocaciones en una estructura tridimensional. Diámetro 0.70 mm.

31

Tensores

31-1 El tensor de polarizabilidad
31-2 Cómo transformar las componentes de un tensor
31-3 El elipsoide de energía
31-4 Otros tensores; el tensor de inercia
31-5 El producto vectorial
31-6 El tensor de esfuerzos
31-7 Tensores de orden superior
31-8 El tensor de dimensión cuatro de momentum electromagnético

Revisar
Volumen I, capítulo 11, *Vectores*
Volumen I, capítulo 20, *Rotación en el espacio*

31-1 El tensor de polarizabilidad

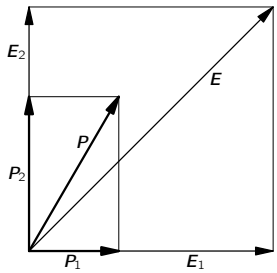
Los físicos siempre tienen el hábito de tomar el ejemplo más simple de cualquier fenómeno y llamarlo "física", dejando que los ejemplos más complicados se conviertan en tema de otros campos —de la matemática aplicada, la ingeniería eléctrica, la química o la cristalografía—. Hasta la física del estado sólido es casi únicamente mitad física porque se preocupa demasiado de sustancias específicas. Así, en estas lecciones omitiremos muchas cosas interesantes. Por ejemplo, una de las propiedades importantes de los cristales —o de la mayoría de las sustancias— es que su polarizabilidad eléctrica es diferente en direcciones distintas. Si aplican un campo en cualquier dirección, las cargas atómicas se corren un poco y producen un momento dipolar, pero la magnitud del momento depende en gran medida de la dirección del campo. Naturalmente, es una gran complicación. Pero en física empezamos, por lo común, hablando del caso especial en el que la polarizabilidad es la misma en todas direcciones, para que la vida sea más fácil. Dejamos los otros casos para algún otro campo. En consecuencia, para nuestro trabajo posterior no necesitaremos todo lo que vamos a decir en este capítulo.

La matemática de los tensores es particularmente útil para describir propiedades de sustancias que varían con la dirección —aunque ése es sólo un ejemplo de su empleo—. Como la mayoría de ustedes no van a ser físicos sino que van a ir al mundo *real*, donde las cosas dependen rigurosamente de la dirección, tarde o temprano necesitarán usar tensores. Para no dejar nada de lado vamos a describir los tensores, aunque no tan detalladamente. Queremos que se tenga la impresión de que nuestro tratamiento de la física es completo. Por ejemplo, nuestra electrodinámica está completa —tan completa como cualquier curso de electricidad y magnetismo, hasta un curso avanzado—. Nuestra mecánica no está completa porque estudiamos la mecánica cuando todavía no tenían un alto nivel de refinamiento matemático y no estaban en condiciones de discutir temas como el principio de mínima acción, o lagrangianos, o hamiltonianos, etc., que son *maneras más elegantes* de describir la mecánica. Sin embargo, excepto por la relatividad general, tenemos las *leyes* completas de la mecánica. Nuestra electricidad y magnetismo es completo, y muchas otras cosas son bastante completas. Naturalmente, la mecánica cuántica no lo será —tenemos que dejar algo para el futuro—. Pero, por lo menos, deben saber lo que es un tensor.

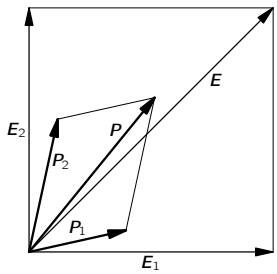
Recalcamos en el capítulo 30 que las propiedades de sustancias cristalinas son diferentes en direcciones distintas —decimos que son *anisótropas*—. La variación del momento dipolar inducido con la dirección del campo eléctrico aplicado es sólo un ejemplo, el que usaremos como nuestro ejemplo de tensor. Digamos que para una dirección determinada del campo eléctrico, el momento dipolar inducido $\boldsymbol{P}$ por unidad de volumen es proporcional a la intensidad del campo $\boldsymbol{E}$ aplicado. (Es una buena aproximación para muchas sustancias si $\boldsymbol{E}$ no es muy grande.) Llamaremos α a la constante de proporcionalidad.* Queremos ahora considerar sustancias en las que α depende de la dirección del campo aplicado, como por ejemplo en cristales como calcita, que forman imágenes dobles cuando miramos a través de ellos.

Supongan que en un cristal particular encontramos que un campo eléctrico $\boldsymbol{E}_1$ en la dirección x produce la polarización $\boldsymbol{P}_1$ en la misma dirección. Luego

* En el capitulo 10 seguimos la convención habitual y escribimos $P = \epsilon_0 \chi E$ y llamamos "susceptibilidad" a χ ("ji"). Aquí será más conveniente usar una sola letra, de modo que escribimos α en vez de $\epsilon_0 \chi$. Para dieléctricos isotrópicos, $\alpha = (\kappa - 1)\epsilon_0$, donde κ es la constante dieléctrica (véase sección 10-4).



(a)



(b)

Figura 31-1. La suma vectorial de polarizaciones en un cristal anisotrópico.

encontramos que un campo eléctrico $\boldsymbol{E}_2$ en la dirección y, de la misma *intensidad* que $\boldsymbol{E}_1$, produce una polarización diferente $\boldsymbol{P}_2$ en la dirección y. ¿Qué ocurriría si pusiéramos un campo eléctrico a 45°? Bueno, es una superposición de dos campos, a lo largo de x y y, así que la polarización $\boldsymbol{P}$ será la suma vectorial de $\boldsymbol{P}_1$ y $\boldsymbol{P}_2$, como muestra la figura 31-1(a). La polarización ya no está en la misma dirección que el campo eléctrico. Se darán cuenta cómo puede ocurrir esto. Puede que haya cargas que se pueden mover fácilmente hacia arriba y hacia abajo, pero son demasiado rígidas para movimientos laterales. Cuando se aplica una fuerza a 45°, las cargas se mueven más hacia arriba que hacia el costado. Los desplazamientos no están en la dirección de la fuerza externa porque hay fuerzas elásticas internas asimétricas.

Por supuesto, 45° no tienen nada de especial. Es válido *en general* que la polarización inducida de un cristal *no* esté en la dirección del campo eléctrico. En nuestro ejemplo anterior tuvimos la "suerte" de elegir nuestros ejes x y y de modo que $\boldsymbol{P}$ estuviera a lo largo de $\boldsymbol{E}$ tanto para la dirección x como para la y. Si se rotara el cristal respecto a los ejes de coordenadas, el campo eléctrico $\boldsymbol{E}_2$ en la dirección y produciría una polarización $\boldsymbol{P}$ con componentes x y y. Análogamente, la polarización debida a un campo eléctrico en la dirección x tendría una componente x y una componente y. Entonces la polarización sería como muestra la figura 31-1(b), en vez de como en la parte (a). La cuestión se pone más complicada —pero para cualquier campo $\boldsymbol{E}$, el *módulo* de $\boldsymbol{P}$ sigue siendo proporcional al módulo de $\boldsymbol{E}$—.

Tratemos ahora el caso general de una orientación arbitraria de un cristal respecto a los ejes de coordenadas. Un campo eléctrico en la dirección x producirá una polarización $\boldsymbol{P}$ con componentes x, y y z; podemos escribir

$$P_x = \alpha_{xx}E_x, \qquad P_y = \alpha_{yx}E_x, \qquad P_z = \alpha_{zx}E_x. \tag{31.1}$$

Todo lo que estamos diciendo aquí es que si el campo eléctrico está en la dirección x, la polarización no tiene por qué estar en la misma dirección, sino que puede tener componentes x, y y z —cada una proporcional a E_x—. Así, llamaremos α_{xx}, α_{yx} y α_{zx}, respectivamente, a estas constantes de proporcionalidad. (La primera letra nos dice a qué componente de $\boldsymbol{P}$ se refiere y la última indica la dirección del campo eléctrico.)

Análogamente, podemos escribir para un campo en la dirección y:

$$P_x = \alpha_{xy}E_y, \qquad P_y = \alpha_{yy}E_y, \qquad P_z = \alpha_{zy}E_y; \tag{31.2}$$

y para un campo en la dirección z,

$$P_x = \alpha_{xz}E_z, \qquad P_y = \alpha_{yz}E_z, \qquad P_z = \alpha_{zz}E_z. \tag{31.3}$$

Ahora bien, hemos dicho que la polarización depende linealmente de los campos, así que hay un campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ que tiene componentes x y y, la componente x de $\boldsymbol{P}$ que resulta será la suma de las dos P_x de las ecuaciones (31.1) y (31.2). Si $\boldsymbol{E}$ tiene componentes según x, y y z, las componentes de $\boldsymbol{P}$ que resultan serán la suma de las tres contribuciones que aparecen en las ecuaciones (31.1), (31.2) y (31.3). En otras palabras, $\boldsymbol{P}$ estará dado por

$$\begin{aligned} P_x &= \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z,\\ P_y &= \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z,\\ P_z &= \alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z. \end{aligned} \tag{31.4}$$

El comportamiento dieléctrico del cristal está descrito entonces completamente por las nueve cantidades (α_{xx}, α_{xy}, α_{xz}, α_{yz}, ...), a las que podemos representar con el símbolo α_{ij}. (Los subíndices i y j indican cualquiera de las tres letras posibles x, y y z.) Cualquier campo eléctrico arbitrario $\boldsymbol{E}$ se puede descomponer en tres componentes E_x, E_y y E_z; a partir de ellas podemos usar las α_{ij} para hallar P_x, P_y y P_z, que dan conjuntamente la polarización total $\boldsymbol{P}$. El conjunto de nueve coeficientes α_{ij} se llama *tensor* —en este caso *tensor de polarizabilidad*—. Como decimos que los tres números (E_x, E_y, E_z) "forman el vector $\boldsymbol{E}$", decimos que los nueve números (α_{xx}, α_{xy}, ...) "forman el tensor α_{ij}".

31-2 Cómo transformar las componentes de un tensor

Saben que cuando pasamos a un sistema diferente de coordenadas x', y' y z', las componentes $E_{x'}$, $E_{y'}$ y $E_{z'}$ del vector serán diferentes, como lo serán también *las componentes* de $\boldsymbol{P}$. Por tanto, todos los coeficientes α_{ij} serán diferentes en un sistema de coordenadas distinto. De hecho, pueden ver cómo tienen que cambiar las α al cambiar las componentes de $\boldsymbol{E}$ y de $\boldsymbol{P}$ de la manera apropiada, porque si describimos el *mismo* campo eléctrico *físico* en el nuevo sistema de coordenadas debemos obtener la misma polarización. Por ello, en cualquier sistema nuevo de coordenadas, $P_{x'}$ es una combinación lineal de P_x, P_y y P_z

$$P_{x'} = aP_x + bP_y + cP_z,$$

y análogamente para las otras componentes. Si sustituyen P_x, P_y y P_z por sus expresiones en términos de las E, utilizando la ecuación (31.4), obtienen

$$\begin{aligned} P_{x'} = {} & a(\alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z) \\ & + b(\alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z) \\ & + c(\alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z). \end{aligned}$$

Luego escriben E_x, E_y y E_z en términos de $E_{x'}$ $E_{y'}$, y $E_{z'}$; por ejemplo,

$$E_x = a'E_{x'} + b'E_{y'} + c'E_{z'},$$

donde a', b' y c' están relacionadas con a, b y c pero no son iguales a ellas. Así, tienen $P_{x'}$, expresada en términos de las componentes $E_{x'}$, $E_{y'}$ y $E_{z'}$; en otras palabras, tienen los nuevos α_{ij}. Es un enredo, pero totalmente directo.

Cuando hablamos de cambiar los ejes estamos suponiendo que el cristal se queda quieto *en el espacio*. Si se rotara el cristal *con* los ejes, los α no cambiarían. Inversamente, si se cambiara la orientación del cristal respecto a los ejes, tendríamos un nuevo conjunto de α. Pero si se las conoce para una orientación *cualquiera* del cristal, se las puede hallar para cualquier otra orientación mediante la transformación que acabamos de describir. En otras palabras, la propiedad dieléctrica de un cristal queda descrita *completamente* dando las componentes α_{ij} del tensor de polarización respecto a cualquier sistema de ejes elegido arbitrariamente. Como podemos asociar un vector velocidad $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$ con una partícula, sabiendo que las tres componentes cambiarán de cierta manera determinada si cambiamos nuestros ejes de coordenadas, así también podemos asociar con un cristal su tensor de polarización α_{ij} cuyas nueve componentes se transformarán de cierta manera determinada si se cambia el sistema de coordenadas.

La relación entre $\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{E}$ escrita en la ecuación (31.4) se puede poner en la notación más compacta:

$$P_i = \sum_j \alpha_{ij}E_j, \tag{31.5}$$

donde se sobrentiende que i representa x, y o z y la suma se toma sobre $j = x$, y y z. Se han inventado muchas notaciones especiales para tratar los tensores, pero cada una de ellas es conveniente sólo para una clase limitada de problemas. Una convención común es omitir el signo de suma ($\sum$) en la ecuación (31.5), dejando *sobrentendido* que siempre que aparezca dos veces el mismo subíndice (j aquí), se debe sumar sobre ese índice. Como usaremos tensores muy poco, no nos molestaremos en adoptar ninguna de esas notaciones o convenciones especiales.

31-3 El elipsoide de energía

Ahora queremos adquirir cierta experiencia con tensores. Supongan que hacemos esta pregunta interesante: ¿cuánta energía se necesita para polarizar el cristal (además de la energía del campo eléctrico que sabemos es $\epsilon_0 E^2/2$ por unidad de volumen)? Consideren por un momento las cargas atómicas que se

están desplazando. El trabajo realizado al desplazar la carga una distancia dx es $qE_x\,dx$ y si hay N cargas por unidad de volumen, el trabajo realizado es $qE_xN\,dx$. Pero $qN\,dx$ es la variación dP_x del momento dipolar por unidad de volumen. Por lo tanto, la energía necesaria *por unidad de volumen* es

$$E_x\,dP_x.$$

Combinando el trabajo correspondiente a las tres componentes del campo, se encuentra que el trabajo por unidad de volumen es

$$\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{P}.$$

Como el módulo de $\boldsymbol{P}$ es proporcional a $\boldsymbol{E}$, el trabajo realizado por unidad de volumen para llevar la polarización desde 0 hasta $\boldsymbol{P}$ es la integral de $\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{P}$. Llamando u_P a este trabajo,* escribimos

$$u_P=\tfrac{1}{2}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{P}=\tfrac{1}{2}\sum_i E_iP_i. \tag{31.6}$$

Ahora bien, podemos expresar $\boldsymbol{P}$ en términos de $\boldsymbol{E}$ mediante la ecuación (31.5) y tenemos que

$$u_P=\tfrac{1}{2}\sum_i\sum_j \alpha_{ij}E_iE_j. \tag{31.7}$$

La densidad de energía u_P es un número independiente de los ejes escogidos, así que es un escalar. Además, un tensor tiene entonces la propiedad de que cuando se suma sobre un índice (con un vector), da un nuevo vector; y cuando se suma sobre *ambos* índices (con dos vectores), da un escalar.

En realidad, α_{ij} se debería llamar "tensor de orden dos", porque tiene dos índices. Un vector —con *un* índice— es un tensor de orden uno y un escalar —sin índices— es un tensor de orden cero. Así, decimos que el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ es un tensor de orden uno y que la densidad de energía u_P es un tensor de orden cero. Es posible extender el concepto de tensor a tres o más índices, haciendo tensores de orden superior al dos.

Los subíndices del tensor de polarización toman tres valores posibles —son tensores en tres dimensiones—. Los matemáticos consideran tensores en cuatro, cinco o más dimensiones. Ya hemos usado un tensor de dimensión cuatro $F_{\mu\nu}$ en nuestra descripción relativista del campo electromagnético (capítulo 26).

El tensor de polarización α_{ij}, tiene la interesante propiedad de que es *simétrico*, es decir, $\alpha_{xy}=\alpha_{yx}$ y lo mismo para cualquier par de índices. (Se trata de una propiedad *física* de un cristal real y no vale necesariamente para todos los tensores.) Pueden demostrar que esto es cierto calculando el cambio de energía de un cristal por medio del siguiente ciclo: (1) apliquen un campo en la dirección x; (2) apliquen un campo en la dirección y; (3) *supriman* el campo según x; (4) supriman el campo según y. El cristal se encuentra donde empezó y el trabajo resultante realizado sobre la polarización debe ser cero. Sin embargo, pueden demostrar que para que esto sea cierto, α_{xy} debe ser igual a α_{yx}. Por supuesto que se puede hacer el mismo razonamiento para α_{xz}, etc. Por lo tanto, el tensor de polarización es simétrico.

Esto significa también que se puede medir el tensor de polarización midiendo simplemente la energía necesaria para polarizar el cristal en diversas direcciones. Supongan que aplicamos un campo $\boldsymbol{E}$ con componentes x y y únicamente; luego, conforme a la ecuación (31.7),

$$u_P=\tfrac{1}{2}[\alpha_{xx}E_x^2+(\alpha_{xy}+\alpha_{yx})E_xE_y+\alpha_{yy}E_y^2]. \tag{31.8}$$

Con E_x sólo podemos determinar α_{xx}; con E_y sólo podemos determinar α_{yy}; con E_x y E_y obtenemos una energía adicional debida al término con $(\alpha_{xy}+\alpha_{yx})$.

* Este trabajo realizado por un campo eléctrico para *producir* la polarización no se debe confundir con la energía potencial $-\boldsymbol{p}_0\cdot\boldsymbol{E}$ de un momento dipolar $\boldsymbol{p}_0$ permanente.

Además, como α_{xy} y α_{yx} son iguales, este término es $2\alpha_{xy}$ y se puede relacionar con la energía.

La expresión de la energía (31.8) tiene una buena interpretación geométrica. Supongan que preguntamos qué campos E_x y E_y corresponden a una densidad de energía determinada —u_0, digamos—. Es sencillamente el problema matemático de resolver la ecuación

$$\alpha_{xx}E_x^2 + 2\alpha_{xy}E_xE_y + \alpha_{yy}E_y^2 = 2u_0.$$

Se trata de una ecuación cuadrática, así que si representamos E_x y E_y, las soluciones de esta ecuación son puntos que están sobre una elipse (figura 31-2). (Tiene que ser una elipse y no una parábola o una hipérbola, porque para cualquier campo la energía siempre es positiva y finita.) El vector $\boldsymbol{E}$ de componente E_x y E_y se puede dibujar desde el origen hasta la elipse. Así, esa "elipse de energía" es una buena manera de "visualizar" el tensor de polarización.

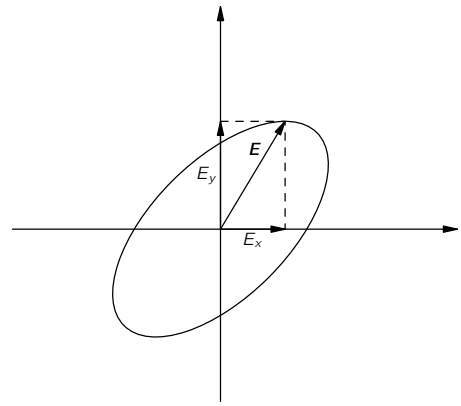


Figura 31-2. Foco del vector $\boldsymbol{E} = (E_x, E_y)$ que da energía constante de polarización.

Si ahora generalizamos para incluir las tres componentes, el vector eléctrico $\boldsymbol{E}$ en *cualquier* dirección necesaria para dar una unidad de densidad de energía, da un punto que estará sobre la superficie de un elipsoide, como muestra la figura 31-3. La forma de este elipsoide de energía constante caracteriza de manera única el tensor de polarizabilidad.

Ahora bien, un elipsoide tiene la propiedad interesante de que siempre se lo puede describir dando las direcciones de tres "ejes principales" y los diámetros de la elipse según estos ejes. Los "ejes principales" son las direcciones de los diámetros más largo y más corto y la dirección perpendicular a ambos. Están indicados con los ejes a, b y c en la figura 31-3. Respecto a estos ejes, el elipsoide tiene la ecuación particularmente simple

$$\alpha_{aa}E_a^2 + \alpha_{bb}E_b^2 + \alpha_{cc}E_c^2 = 2u_0.$$

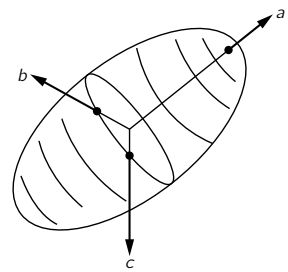


Figura 31-3. Elipsoide de energía del tensor de polarización.

Así pues, respecto a estos ejes, el tensor dieléctrico tiene únicamente tres componentes no nulas: α_{aa}, α_{bb} y α_{cc}. Es decir, cualquiera que sea la complicación del cristal, siempre es posible elegir un sistema de ejes (no necesariamente los ejes cristalinos) para los cuales el tensor de polarización tiene únicamente tres componentes. En este sistema de ejes, la ecuación (31.4) se convierte simplemente en lo siguiente:

$$P_a = \alpha_{aa}E_a, \qquad P_b = \alpha_{bb}E_b, \qquad P_c = \alpha_{cc}E_c. \tag{31.9}$$

Un campo eléctrico según cualquiera de los ejes principales produce una polarización según el mismo eje, pero naturalmente, los coeficientes correspondientes a los tres ejes pueden ser diferentes.

A menudo se describe un tensor dando una lista de los nueve coeficientes en una tabla dentro de un par de corchetes:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{bmatrix}. \tag{31.10}$$

Para los ejes principales a, b y c sólo los términos diagonales son distintos de cero; decimos entonces que "el tensor es diagonal". El tensor completo es

$$\begin{bmatrix} \alpha_{aa} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{cc} \end{bmatrix}. \tag{31.11}$$

Lo importante es que cualquier tensor de polarización (en realidad *cualquier* tensor *simétrico* de orden dos en cualquier número de dimensiones) se puede poner en esta forma eligiendo convenientemente un conjunto de ejes de coordenadas.

Si los tres elementos del tensor de polarización en forma diagonal son iguales, es decir, si

$$\alpha_{aa} = \alpha_{bb} = \alpha_{cc} = \alpha, \tag{31.12}$$

el elipsoide de energía se convierte en una esfera y la polarización es la misma en todas direcciones. El material es un isótropo. En notación tensorial:

$$\alpha_{ij} = \alpha\delta_{ij} \tag{31.13}$$

donde δ_{ij} es el *tensor unidad*

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{31.14}$$

Esto significa, naturalmente,

$$\begin{aligned} &\delta_{ij} = 1, \qquad \text{si} \qquad i = j; \\ &\delta_{ij} = 0, \qquad \text{si} \qquad i \neq j. \end{aligned} \tag{31.15}$$

A menudo se llama "delta de Kronecker" al tensor δ_{ij}. Pueden divertirse demostrando que el tensor (31.14) tiene exactamente la misma forma si pasan a otro sistema de coordenadas cartesiano. El tensor de polarización (31.13) da

$$P_i = \alpha \sum_j \delta_{ij} E_j = \alpha E_i,$$

lo cual significa lo mismo que nuestro viejo resultado para dieléctricos isotrópicos:

$$\boldsymbol{P} = \alpha \boldsymbol{E}.$$

La forma y la orientación del elipsoide de polarización se puede relacionar a veces con las propiedades de simetría del cristal. Hemos dicho en el capítulo 30 que hay 230 posibles simetrías internas diferentes de una red tridimensional y que para muchos fines se las puede agrupar convenientemente en siete clases, según la forma de la celda unitaria. Ahora bien, el elipsoide de polarizabilidad debe compartir las simetrías geométricas internas del cristal. Por ejemplo, un cristal triclínico tiene baja simetría —el elipsoide de polarizabilidad tendrá ejes desiguales y su orientación no estará en general alineada con los ejes cristalinos—. Por otra parte, un cristal monoclínico tiene la propiedad de que sus propiedades no cambian si el cristal se rota 180° alrededor de un eje. Así que el tensor de polarización debe transformarse en sí mismo después de tal rotación. Una consecuencia es que el elipsoide de polarizabilidad debe regresar a sí mismo después de una rotación de 180°. Esto puede ocurrir únicamente si uno de los ejes del elipsoide está en la misma dirección que el eje de simetría del cristal. Por lo demás, la orientación y las dimensiones del elipsoide no están restringidas.

Además, en un cristal ortorrómbico los ejes del elipsoide deben corresponder a los ejes cristalinos, porque una rotación de 180° alrededor de cualquiera de los tres ejes repite la misma red. Si vamos a un cristal tetragonal, el elipsoide debe tener la misma simetría, así que debe tener dos diámetros iguales. Para terminar, tenemos que en un cristal cúbico los tres diámetros del elipsoide deben ser iguales; se convierte en una esfera y la polarizabilidad del cristal es la misma en todas direcciones.

Hay un gran juego que consiste en determinar los tipos posibles de tensores para todas las simetrías posibles de un cristal. Se llama análisis por "teoría de grupos". Pero para el caso simple del tensor de polarizabilidad, es relativamente fácil ver cuáles deben ser las relaciones.

31-4 Otros tensores; el tensor de inercia

Hay muchos otros ejemplos de tensores que aparecen en física. Por ejemplo, en un metal o en cualquier conductor se encuentra a menudo que la densidad de corriente $\boldsymbol{j}$ es aproximadamente proporcional al campo eléctrico $\boldsymbol{E}$; la constante de proporcionalidad se llama conductividad σ:

$$\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}.$$

Sin embargo, en cristales, la relación entre $\boldsymbol{j}$ y $\boldsymbol{E}$ es más complicada; la conductividad no es la misma en todas direcciones. La conductividad es un tensor y escribimos lo siguiente:

$$j_i = \sum \sigma_{ij} E_j.$$

Otro ejemplo de tensor físico es el momento de inercia. En el capítulo 18 del volumen I vimos que un objeto sólido que rota alrededor de un eje fijo tiene un momentum angular L proporcional a la velocidad angular ω, y llamamos momento de inercia al factor de proporcionalidad I:

$$L = I\omega.$$

Para un objeto de forma arbitraria, el momento de inercia depende de su orientación respecto al eje de rotación. Por ejemplo, un bloque rectangular tendrá momentos diferentes según cada uno de sus tres ejes ortogonales. Ahora bien, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y el momentum angular $\boldsymbol{L}$ son vectores. Son paralelos para rotaciones alrededor de uno de los ejes de simetría. Pero si el momento de inercia es diferente para los tres ejes principales $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{L}$ están, en general, en la misma dirección (véase figura 31-4). Están relacionados de una manera análoga a la relación entre $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{P}$. En general, debemos escribir

$$\begin{aligned} L_x &= I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z, \\ L_y &= I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z, \\ L_z &= I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z. \end{aligned} \tag{31.16}$$

Los nueve coeficientes I_{ij} se llaman tensor de inercia. Siguiendo la analogía con la polarización, la energía cinética para cualquier momentum angular tiene que ser en cierta forma cuadrática en las componentes ω_x, ω_y y ω_z:

$$\text{EC} = \tfrac{1}{2}\sum_{ij} I_{ij}\omega_i\omega_j. \tag{31.17}$$

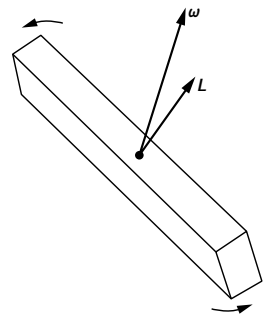


Figura 31-4. El momentum angular $\boldsymbol{L}$ de un objeto sólido no es, en general, paralelo a su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$.

Podemos usar la energía para definir el elipsoide de inercia. También podemos usar argumentos energéticos para demostrar que el tensor es simétrico —que $I_{ij} = I_{ji}$—.

Se puede calcular el tensor de inercia de un cuerpo rígido si se conoce su forma. Sólo necesitamos escribir la energía cinética total de todas las partículas del cuerpo. La partícula de masa m y velocidad $\boldsymbol{v}$ tiene la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ y la energía cinética total es simplemente la suma

$$\sum \tfrac{1}{2}mv^2$$

sobre todas las partículas del cuerpo. La velocidad $\boldsymbol{v}$ de cada partícula está relacionada con la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo sólido. Supongamos que el cuerpo está rotando alrededor de su centro de masa, que suponemos en reposo. Entonces, si $\boldsymbol{r}$ es el desplazamiento de una partícula respecto al centro de masa, su velocidad $\boldsymbol{v}$ está dada por $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$. Así pues, la energía cinética total es

$$\text{EC} = \sum \tfrac{1}{2}m(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})^2. \tag{31.18}$$

Lo que tenemos que hacer ahora es escribir explícitamente $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$ en términos de las componentes $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ y x, y, z, y comparar el resultado con la ecuación (31.17); encontramos I_{ij} identificando términos. Haciendo las operaciones algebraicas, escribimos

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})^2 &= (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})_x^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})_y^2 + (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r})_z^2 \\ &= (\omega_y z - \omega_z y)^2 + (\omega_z x - \omega_x z)^2 + (\omega_x y - \omega_y x)^2 \\ &= +\omega_y^2 z^2 - 2\omega_y\omega_z zy + \omega_z^2 y^2 \\ &\quad + \omega_z^2 x^2 - 2\omega_z\omega_x xz + \omega_x^2 z^2 \\ &\quad + \omega_x^2 y^2 - 2\omega_x\omega_y yx + \omega_y^2 x^2. \end{aligned}$$

Multiplicando esta ecuación por $m/2$, sumando sobre todas las partículas y comparando con la ecuación (31.17), vemos que I_{xx}, por ejemplo, está dado por

$$I_{xx} = \sum m(y^2 + z^2).$$

Ésta es la fórmula que obtuvimos antes (capítulo 19, volumen I) para el momento de inercia de un cuerpo respecto al eje x. Como $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, también podemos escribir este término en la forma

$$I_{xx} = \sum m(r^2 - x^2).$$

Calculando todos los otros términos, se puede escribir el tensor de inercia en la forma

$$I_{ij} = \begin{bmatrix} \sum m(r^2 - x^2) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum myx & \sum m(r^2 - y^2) & -\sum myz \\ -\sum mzx & -\sum mzy & \sum m(r^2 - z^2) \end{bmatrix}. \tag{31.19}$$

Si quieren, pueden escribirlo en "notación tensorial":

$$I_{ij} = \sum m(r^2\delta_{ij} - r_i r_j), \tag{31.20}$$

donde las r_i son las componentes (x, y, z) del vector posición de una partícula y $\sum$ significa suma sobre todas las partículas. El momento de inercia es entonces un tensor de orden dos cuyos términos son una propiedad del cuerpo y que relaciona $\boldsymbol{L}$ con $\boldsymbol{\omega}$ por medio de

$$L_i = \sum_j I_{ij}\omega_j. \tag{31.21}$$

Para un cuerpo de forma cualquiera podemos hallar el elipsoide de inercia y, por lo tanto, los tres ejes principales. Referido a estos ejes, el tensor será diagonal, así que para cualquier objeto siempre hay tres ejes ortogonales para los cuales la velocidad angular y el momentum angular son paralelos. Se llaman ejes principales de inercia.

31-5 El producto vectorial

Debemos señalar que hemos estado usando tensores de orden dos desde el capítulo 20 del volumen I. Definimos allí un "torque en un plano", como τ_{xy}, por medio de

$$\tau_{xy} = xF_y - yF_x.$$

Generalizando a tres dimensiones, escribimos

$$\tau_{ij} = r_i F_j - r_j F_i. \tag{31.22}$$

La cantidad τ_{ij} es un tensor de orden dos. Una manera de verlo es combinando con algún vector, digamos con el vector unitario $\boldsymbol{e}$, de acuerdo con

$$\sum_j \tau_{ij} e_j.$$

Si esta cantidad es un *vector*, τ_{ij} se transforma como un tensor —es nuestra definición de tensor—. Remplazando τ_{ij} tenemos

$$\begin{aligned} \sum_j \tau_{ij} e_j &= \sum_j r_i F_j e_j - \sum_j r_j e_j F_i \\ &= r_i(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{e}) - (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{e})F_i. \end{aligned}$$

Como los productos escalares son escalares, los dos términos del segundo miembro son vectores y, por lo tanto, su diferencia. Así, τ_{ij} es un tensor.

Pero τ_{ij} es una clase especial de tensor; es *antisimétrico*, es decir,

$$\tau_{ij} = -\tau_{ji},$$

así que sólo tiene tres términos distintos de cero —τ_{xy}, τ_{yz}, y τ_{zx}—. Pudimos demostrar en el capítulo 20 del volumen I que estos tres términos se transforman, casi "por casualidad", como las tres componentes de un vector, así que pudimos *definir*

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y, \tau_z) = (\tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy})$$

Decimos "por casualidad" porque sucede únicamente en tres dimensiones. En cuatro dimensiones, por ejemplo, un tensor antisimétrico de orden dos tiene *seis* términos no nulos y, por lo tanto, no se puede remplazar por un vector con *cuatro* componentes.

Como el vector axial $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ es un tensor, también lo es todo producto vectorial de dos vectores polares —se aplican los mismos razonamientos—. Sin embargo, por suerte se los puede representar también por vectores (en realidad pseudovectores), así que nuestra matemática nos ha resultado más fácil.

Matemáticamente, si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son dos vectores cualesquiera, las nueve cantidades $a_i b_j$ forman un tensor (aunque puede que no tengan ninguna utilidad física). Por lo tanto, para el vector de posición $\boldsymbol{r}$, $r_i r_j$ es un tensor, y como δ_{ij} también lo es, vemos que el segundo miembro de la ecuación (31.20) es realmente un tensor. Análogamente, la ecuación (31.22) es un tensor, ya que los dos términos del segundo miembro son tensores.

31-6 El tensor de esfuerzos

Los tensores simétricos que hemos descrito hasta ahora surgieron como coeficientes que relacionaban un vector con otro. Ahora bien, examinemos un tensor que tiene gran significado físico diferente; el tensor de *esfuerzos*. Supongamos que tenemos un objeto sólido con diversas fuerzas actuando sobre él. Decimos que hay diversos "esfuerzos" dentro de él, con lo cual queremos dar a entender que existen fuerzas internas entre partes vecinas del material. Hemos hablado un poco de esos esfuerzos en un caso bidimensional al considerar la tensión superficial en un diafragma tenso en la sección 12-3. Veremos ahora que las fuerzas internas en el material de un cuerpo tridimensional se pueden describir en términos de un tensor.

Consideren un cuerpo de cierto material elástico —un bloque de gelatina, digamos—. Si hacemos un corte en el bloque, el material que está a cada lado del corte se desplazará, en general, debido a las fuerzas internas. Antes de que se hiciera el corte, tiene que haber habido fuerzas entre las dos partes del bloque que mantenían el material en su lugar; podemos definir los esfuerzos en términos de estas fuerzas. Supongan que consideramos un plano imaginario perpendicular al eje x —como el plano σ en la figura 31-5— y buscamos la fuerza sobre un área pequeña $\Delta y\,\Delta z$ en este plano. El material que está a la izquierda del área ejerce una fuerza $\Delta\boldsymbol{F}_1$ sobre el material que está a la derecha, como muestra la parte (b) de la figura. Está, naturalmente, la fuerza opuesta $-\Delta\boldsymbol{F}_1$ de reacción ejercida sobre el material que se encuentra a la izquierda de la superficie. Si el área es suficientemente pequeña, es de esperar que la fuerza $\Delta\boldsymbol{F}_1$ sea proporcional al área $\Delta y\,\Delta z$.

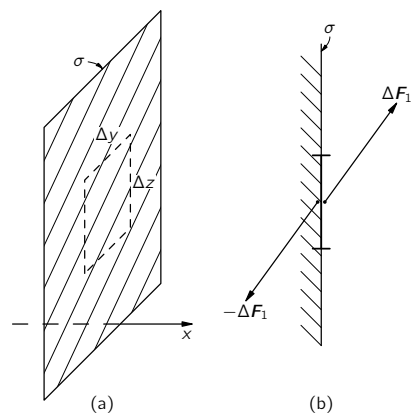


Figura 31-5. El material a la izquierda del plano σ ejerce la fuerza $\Delta\boldsymbol{F}_1$ que pasa a través del área $\Delta y\,\Delta z$ sobre el material de la derecha del plano.

Ya están familiarizados con un tipo de esfuerzo —la presión en un líquido estático—. Allí la fuerza es igual a la presión por el área y es perpendicular al elemento de superficie. En los sólidos —y también en los líquidos viscosos en movimiento— la fuerza no es necesariamente perpendicular a la superficie; hay fuerzas de *corte* además de las presiones (positivas o negativas). (Por fuerzas "de corte" entendemos las componentes *tangenciales* de la fuerza sobre la superficie.) Hay que tomar en cuenta las tres componentes de la fuerza. Noten que si hacemos el corte en un plano con otra orientación, las fuerzas serán diferentes. Una descripción completa del esfuerzo interno requiere un tensor.

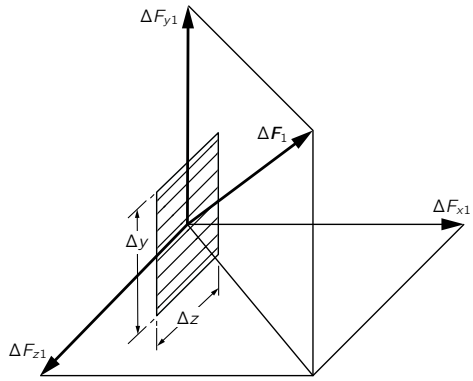


Figura 31-6. La fuerza $\Delta \boldsymbol{F}_1$ a través de un elemento de área $\Delta y\,\Delta z$ perpendicular al eje x se descompone en tres componentes ΔF_{x1}, ΔF_{y1} y ΔF_{z1}.

Definimos el tensor de esfuerzos de la siguiente manera: imaginamos primero un corte perpendicular al eje x y descomponemos la fuerza $\Delta \boldsymbol{F}_1$ sobre el corte en sus tres componentes ΔF_{x1}, ΔF_{y1} y ΔF_{z1}, como en la figura 31-6. Llamamos S_{xx}, S_{yx} y S_{zx} al cociente de sus fuerzas con el área $\Delta y\,\Delta z$. Por ejemplo,

$$S_{yx} = \frac{\Delta F_{x1}}{\Delta y\,\Delta z}.$$

El primer índice y se refiere a la dirección de la componente de la fuerza; el segundo índice x es normal al área. Si lo desean, pueden denotar el área $\Delta y\,\Delta z$ con Δa_x, lo cual significa un elemento de área perpendicular a x. Luego,

$$S_{yx} = \frac{\Delta F_{x1}}{\Delta a_x}.$$

Ahora imaginamos un corte perpendicular al eje y. En una pequeña área $\Delta x\,\Delta z$ habrá una fuerza $\Delta \boldsymbol{F}_2$. Nuevamente descomponemos esta fuerza en tres componentes, como muestra la figura 31-7, y definimos las tres componentes del esfuerzo, S_{xy}, S_{yy} y S_{zy}, como la fuerza por unidad de área en las tres direcciones. Finalmente, hacemos un corte imaginario perpendicular a z y definimos las tres componentes S_{xz}, S_{yz} y S_{zz}. Tenemos así los nueve números

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} & S_{xz} \\ S_{yx} & S_{yy} & S_{yz} \\ S_{zx} & S_{zy} & S_{zz} \end{bmatrix}. \tag{31.23}$$

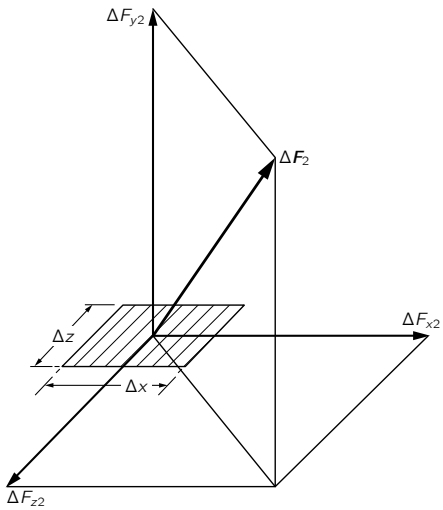


Figura 31-7. La fuerza a través de un elemento de área perpendicular al eje y se descompone en tres componentes rectangulares.

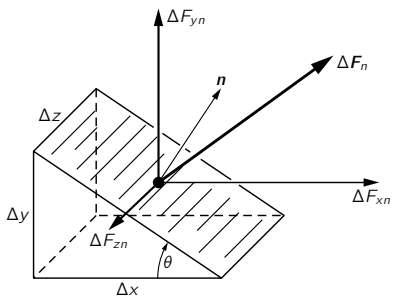


Figura 31-8. La fuerza $\boldsymbol{F}_n$ a través de la cara N (cuyo vector normal unitario es $\boldsymbol{n}$) se descompone en componentes.

Demostremos ahora que estos nueve números son suficientes para describir completamente el estado interno de esfuerzo, y que S_{ij} es realmente un tensor. Supongan que queremos saber cuál es la fuerza sobre una superficie orientada con un ángulo arbitrario. ¿Podemos hallarla a partir de S_{ij}? Sí, de la siguiente manera: imaginamos una pequeña figura sólida que tiene una cara N sobre la nueva superficie y las otras caras paralelas a los ejes de coordenadas. Si ocurriese que la cara N fuera perpendicular al eje z, tendríamos la pieza triangular mostrada en la figura 31-8. (Es un caso algo especial, pero ilustrará suficientemente bien el método general.) Ahora bien, las fuerzas de esfuerzo sobre el pequeño triángulo sólido de la figura 31-8 están en equilibrio (por lo menos en el límite de dimensiones infinitesimales), así que la fuerza total sobre ella debe ser cero. Sabemos cuáles son las fuerzas sobre las caras paralelas a los ejes de coordenadas directamente a partir de S_{ij}. Su suma vectorial debe igualar la fuerza sobre la cara N, así que podemos expresar esta fuerza en términos de S_{ij}.

Nuestra hipótesis de que las fuerzas *superficiales* sobre el pequeño volumen triangular están en equilibrio, deja de lado cualesquiera otras fuerzas de *cuerpo* que pueda haber, como la gravedad o las pseudofuerzas si nuestro sistema de coordenadas no es inercial. Observen, sin embargo, que esas fuerzas de cuerpo serán proporcionales al *volumen* del pequeño triángulo y, por lo tanto, a $\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$

mientras que todas las fuerzas superficiales son proporcionales a las áreas como $\Delta x\,\Delta y$, $\Delta y\,\Delta z$, etc. Así, si hacemos la escala de la cuña suficientemente pequeña, siempre se puede despreciar las fuerzas de cuerpo frente a las fuerzas superficiales.

Sumemos ahora las fuerzas que actúan sobre la pequeña cuña. Tomemos primero la componente x, que es la suma de cinco partes —una por cada cara—. No obstante, si Δz es suficientemente pequeña, las fuerzas sobre las caras triangulares (perpendiculares al eje z) serán iguales y opuestas, así que podemos olvidarlas. La componente x de la fuerza sobre la base rectangular es

$$\Delta F_{x2} = S_{xy}\,\Delta x\,\Delta z.$$

La componente x de la fuerza sobre el rectángulo vertical es

$$\Delta F_{x1} = S_{xx}\,\Delta y\,\Delta z.$$

Estas dos deben ser iguales a la componente x de la fuerza *hacia afuera* sobre la cara N. Llamamos $\boldsymbol{n}$ al vector unitario normal a la cara N y $\boldsymbol{F}_n$ a la fuerza sobre la misma; tenemos entonces

$$\Delta F_{xn} = S_{xx}\,\Delta y\,\Delta z + S_{xy}\,\Delta x\,\Delta z.$$

La componente x, S_{xn}, del esfuerzo a través de este plano es igual a ΔF_{xn} dividida entre el área, que es $\Delta z\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, o sea

$$S_{xn} = S_{xx}\,\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} + S_{xy}\,\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}.$$

Ahora bien, $\Delta x/\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ es el coseno del ángulo θ entre $\boldsymbol{n}$ y el eje y, como muestra la figura 31-8, así que se puede escribir como n_y, la componente y de $\boldsymbol{n}$. Analógamente, $\Delta y/\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$ es $\operatorname{sen}\theta = n_x$. Podemos escribir

$$S_{xn} = S_{xx}n_x + S_{xy}n_y.$$

Si generalizamos a un elemento de superficie arbitrario, obtendremos

$$S_{xn} = S_{xx}n_x + S_{xy}n_y + S_{xz}n_z$$

o, en general,

$$S_{in} = \sum_j S_{ij}n_j. \tag{31.24}$$

Podemos hallar la fuerza sobre cualquier elemento de superficie en términos de S_{ij}, así que el mismo describe completamente el estado de esfuerzo interno del material.

La ecuación (31.24) dice que el tensor S_{ij} relaciona el esfuerzo $\boldsymbol{S}_n$ con el vector $\boldsymbol{n}$ como α_{ij} relaciona $\boldsymbol{P}$ con $\boldsymbol{E}$. Como $\boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{S}_n$ son vectores, las componentes de S_{ij} se deben transformar como un tensor al cambiar los ejes de coordenadas. Por lo tanto, S_{ij} es realmente un tensor.

También podemos demostrar que S_{ij} es un tensor *simétrico* considerando las fuerzas sobre un pequeño cubo de material. Supongan que tomamos un cubo pequeño con sus caras paralelas a nuestros ejes de coordenadas, y lo miramos transversalmente como muestra la figura 31-9. Si hacemos que la arista del cubo sea la unidad, las componentes x y y de las fuerzas sobre las caras perpendiculares a los ejes x y y podrían ser como muestra la figura. Si el cubo es pequeño, los esfuerzos no cambian mucho de un lado del cubo al opuesto, así que las componentes de las fuerzas son iguales y opuestas, como se muestra. Ahora bien, no debe haber ningún torque sobre el cubo, o de lo contrario empezaría a girar. El torque total respecto al centro es $(S_{yx} - S_{xy})$ (por la arista unitaria del cubo), y como el total es cero, S_{yx} es igual S_{xy} y el tensor de esfuerzos es simétrico.

Como S_{ij} es un tensor simétrico se lo puede describir con un elipsoide que tendrá tres ejes principales. Para superficies normales a estos ejes los esfuerzos son

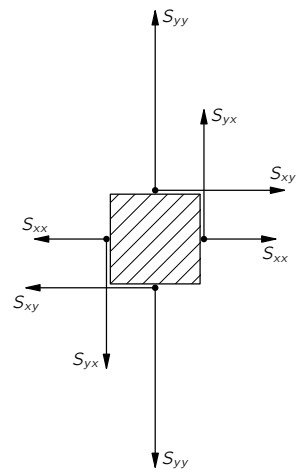


Figura 31-9. La fuerza en las direcciones x y y sobre cuatro caras de un pequeño cubo unitario.

particularmente simples —corresponden a tirar o presionar perpendicularmente a las superficies—. No hay fuerzas de corte según estas caras. Para *cualquier* esfuerzo, siempre podemos elegir nuestros ejes de modo que las componentes de corte sean cero. Si el elipsoide es una esfera, hay únicamente fuerzas normales en *cualquier* dirección. Esto corresponde a la presión hidrostática (positiva o negativa). Así, para presión hidrostática, el tensor es diagonal y las tres componentes son iguales; de hecho, son iguales a la presión p. Podemos escribir

$$S_{ij} = p\delta_{ij}. \tag{31.25}$$

El tensor de esfuerzos, y también su elipsoide, variará en general de punto a punto en un bloque de material; para describir todo el bloque es necesario dar el valor de cada componente de S_{ij} en función de la posición. Por tanto, el tensor de esfuerzos es un *campo*. Hemos tenido *campos escalares*, como la temperatura $T(x, y, z)$, que dan un número para cada punto del espacio, y *campos vectoriales* como $\boldsymbol{E}(x, y, z)$ que dan tres números para cada punto. Ahora tenemos un *campo tensorial* que da nueve números para cada punto del espacio; o bien, seis para el tensor simétrico S_{ij}. Una descripción completa de las fuerzas internas que hay en un sólido arbitrariamente deformado requiere seis funciones de x, y y z.

31-7 Tensores de orden superior

El tensor de esfuerzos S_{ij} describe las *fuerzas* internas de la materia. Siempre que el material sea elástico, es conveniente describir las *deformaciones* internas en términos de otro tensor T_{ij} —llamado tensor *de deformaciones*—. Así, para un objeto simple como una barra de metal, sabemos que la variación ΔL de longitud es aproximadamente proporcional a la fuerza y decimos que obedece la ley de Hooke:

$$\Delta L = \gamma F.$$

Así, para un cuerpo sólido elástico con deformaciones arbitrarias, la deformación específica T_{ij} está relacionada con el esfuerzo S_{ij} a través del conjunto de ecuaciones lineales:

$$T_{ij} = \sum_{k,l} \gamma_{ijkl} S_{kl}. \tag{31.26}$$

Saben además que la energía potencial de un resorte (o de una barra) es

$$\tfrac{1}{2} F\,\Delta L = \tfrac{1}{2}\gamma F^2.$$

La generalización correspondiente a la *densidad* de energía elástica de un cuerpo sólido es

$$U_{\text{elástica}} = \sum_{ijkl} \tfrac{1}{2}\gamma_{ijkl} S_{ij} S_{kl}. \tag{31.27}$$

La descripción completa de las propiedades elásticas de un cristal debe estar dada en términos de los coeficientes γ_{ijkl}. Esto introduce una nueva bestia. Es un tensor de orden *cuatro*. Como cada índice puede asumir cualquiera de los tres valores x, y o z, hay $3^4 = 81$ coeficientes. Pero en realidad sólo hay 21 números *diferentes*. En primer lugar, como S_{ij} es simétrico, sólo tiene seis valores diferentes y sólo se necesitan 36 coeficientes *diferentes* en la ecuación (31.27). Pero además se puede intercambiar S_{ij} con S_{kl} sin cambiar la energía, así que γ_{ijkl} debe ser simétrico al intercambiar ij y kl. Esto reduce el número de coeficientes diferentes a 21. Así, para describir las propiedades elásticas de un cristal de la simetría más baja posible ¡se necesitan 21 constantes elásticas! Por supuesto que este número se reduce para cristales de mayor simetría. Por ejemplo, un cristal cúbico tiene sólo tres constantes elásticas y una sustancia isotrópica tiene dos únicamente.

Se puede ver que lo anterior es cierto de la siguiente manera. ¿Cómo pueden las componentes de γ_{ijkl} ser independientes de la dirección de los ejes, como debe ser si el material es isotrópico? *Respuesta*: pueden ser independientes *únicamente* si se las puede expresar en términos del tensor δ_{ij}. Hay dos expresiones posibles,

$\delta_{ij}\delta_{kl}$ y $\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}$, que tienen la simetría requerida, así que γ_{ijkl} debe ser una combinación lineal de ellas. En consecuencia, para materiales isotrópicos,

$$\gamma_{ijkl} = a(\delta_{ij}\delta_{kl}) + b(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}),$$

y se requieren dos constantes, a y b, para describir las propiedades elásticas. Les dejamos la demostración de que un cristal cúbico sólo necesita tres.

Como ejemplo final, esta vez de un tensor de orden tres, tenemos el efecto piezoeléctrico. Un cristal sometido a esfuerzos genera un campo eléctrico proporcional al esfuerzo; por lo tanto, la regla general es

$$E_i = \sum_{j,k} P_{ijk} S_{jk},$$

donde E_i es el campo eléctrico y los P_{ijk} son los coeficientes piezoeléctricos —o tensor piezoeléctrico—. ¿Son capaces de demostrar que si el cristal tiene un centro de inversión (invariante bajo $x, y, z \to -x, -y, -z$) los coeficientes piezoeléctricos son todos cero?

31-8 El tensor de dimensión cuatro de momentum electromagnético

Todos los tensores que hemos considerado hasta ahora en este capítulo están referidos a las tres dimensiones del espacio; están definidos por ciertas propiedades de transformación frente a rotaciones espaciales. En el capítulo 26 tuvimos oportunidad de usar un tensor en cuatro dimensiones del espacio tiempo relativista —el tensor de campo electromagnético $F_{\mu\nu}$—. Por ello, las componentes de un tensor de cuatro dimensiones como éste se alteran ante una transformación de Lorentz de las coordenadas en una forma especial que calculamos. (Aunque no lo hicimos así, podríamos haber considerado la transformación de Lorentz como una "rotación" en un "espacio" de cuatro dimensiones llamado espacio de Minkowski; entonces la analogía con lo que estamos haciendo aquí habría sido más clara.)

Como último ejemplo queremos considerar otro tensor de cuatro dimensiones (t, x, y, z) de la teoría de la relatividad. Al escribir el tensor de esfuerzos, definimos S_{ij} como la componente de una fuerza sobre una unidad de área. Pero una fuerza es igual a la derivada del momentum respecto al tiempo. En consecuencia, en vez de decir que "S_{xy} es la componente x de la fuerza sobre una unidad de área perpendicular a y", podríamos decir igualmente "S_{xy} es la rapidez con que fluye la componente x del momentum a través de una unidad de área perpendicular a y". En otras palabras, cada término de S_{ij} representa también el flujo de la componente i del momentum a través de una unidad de área perpendicular a la dirección j. Éstas son componentes puramente espaciales, pero son parte de un tensor "más amplio" $S_{\mu\nu}$ en cuatro dimensiones (μ y $\nu = t, x, y, z$) que contiene componentes adicionales como S_{tx}, S_{yt}, S_{tt}, etc. Trataremos ahora de encontrar el significado físico de estas componentes adicionales.

Sabemos que las componentes espaciales representan flujo de momentum. Podemos tener una indicación de cómo extender esto a la dimensión temporal estudiando otro tipo de "flujo" —el flujo de carga eléctrica—. Para la cantidad *escalar* carga, la rapidez de flujo (por unidad de área perpendicular al flujo) es un *vector* espacial —el vector densidad de corriente $\boldsymbol{j}$—. Hemos visto que la componente temporal de este vector de flujo es la densidad de lo que está fluyendo. Por ejemplo, se puede combinar $\boldsymbol{j}$ con una componente temporal $j_t = \rho$, la densidad de carga, para formar el vector de dimensión cuatro $j_\mu = (\rho, \boldsymbol{j})$; es decir, la μ en j_μ asume los valores t, x, y y z para indicar "densidad, rapidez de flujo en la dirección x, rapidez de flujo según y, rapidez de flujo en z" de la carga escalar.

Ahora bien, por analogía con lo que acabamos de decir sobre la componente temporal del flujo de una cantidad escalar, sería de esperar que si S_{xx}, S_{xy} y S_{xz} describen el flujo de la componente x del momentum, tendría que haber una componente temporal S_{xt} que sería la densidad de todo lo que está fluyendo;

es decir, S_{xt} sería la densidad de momentum según x. Así, podemos extender nuestro tensor horizontalmente para incluir una componente t. Tenemos

$$\begin{aligned} S_{xt} &= \text{densidad de momentum en dirección } x,\\ S_{xx} &= \text{flujo en } x \text{ de momentum en dirección } x,\\ S_{xy} &= \text{flujo en } y \text{ de momentum en dirección } x,\\ S_{xz} &= \text{flujo en } z \text{ de momentum en dirección } x. \end{aligned}$$

Análogamente, para la componente y del momentum tenemos las tres componentes del flujo —S_{yx}, S_{yy} y S_{yz}— a las cuales debemos agregar un cuarto término:

$$S_{yt} = \text{densidad de momentum en dirección } y.$$

Y por supuesto, a S_{zx}, S_{zy} y S_{zz} agregaríamos

$$S_{zt} = \text{densidad de momentum en dirección } z.$$

En cuatro dimensiones también hay una componente t del momentum que es, como sabemos, la energía. Así, el tensor S_{ij} se debe extender verticalmente con S_{tx}, S_{ty} y S_{tz}, donde

$$\begin{aligned} S_{tx} &= \text{flujo de energía en la dirección } x,\\ S_{ty} &= \text{flujo de energía en la dirección } y,\\ S_{tz} &= \text{flujo de energía en la dirección } z; \end{aligned} \tag{31.28}$$

es decir, S_{tx} es el flujo de energía por unidad de área y por unidad de tiempo a través de una superficie perpendicular al eje x, etc. Finalmente, para completar nuestro tensor necesitamos S_{tt}, que sería la *densidad* de *energía*. Por lo que hemos extendido nuestro tensor de esfuerzos S_{ij}, en tres dimensiones, al *tensor esfuerzo energía* $S_{\mu\nu}$, en cuatro dimensiones. El índice μ puede tomar los cuatro valores t, x, y y z, para indicar, respectivamente, "densidad", "flujo por unidad de área en la dirección x", "flujo por unidad de área en la dirección y" y "flujo por unidad de área en la dirección z". De la misma manera, ν toma los cuatro valores t, x, y y z para decirnos *qué* es lo que fluye, a saber, "energía", "momentum en la dirección x", "momentum en la dirección y" y "momentum en la dirección z".

Como ejemplo, estudiemos este tensor no en la materia, sino en una región del espacio libre en el que hay un campo electromagnético. Sabemos que el flujo de energía es el vector de Poynting $\boldsymbol{S} = \epsilon_0 c^2 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$. Luego, las componentes x, y y z de $\boldsymbol{S}$ son, desde el punto de vista relativista, las componentes S_{tx}, S_{ty} y S_{tz} de nuestro tensor de cuatro dimensiones esfuerzo energía. La simetría del tensor S_{ij} se traslada a las componentes temporales así que el tensor de dimensión cuatro $S_{\mu\nu}$ es simétrico:

$$S_{\mu\nu} = S_{\nu\mu}. \tag{31.29}$$

En otras palabras, las componentes S_{xt}, S_{yt} y S_{zt}, que son las *densidades* de *momentum* según x, y y z, son iguales a las componentes x, y y z del vector de Poynting $\boldsymbol{S}$, el *flujo de energía* —como ya lo hemos demostrado en un capítulo anterior por un razonamiento diferente—.

Las componentes restantes del tensor de esfuerzos electromagnéticos $S_{\mu\nu}$ se pueden expresar en términos de los campos eléctricos $\boldsymbol{E}$ y magnéticos $\boldsymbol{B}$. En otras palabras, debemos admitir esfuerzo o, para decirlo menos misteriosamente, flujo de momentum en el campo electromagnético. Estudiamos esto en el capítulo 27 en relación con la ecuación (27.21) pero no lo hicimos en detalle.

A los que quieran ejercitar su extraordinaria habilidad en tensores de cuatro dimensiones les gustaría ver la fórmula de $S_{\mu\nu}$ en términos de los campos:

$$S_{\mu\nu} = -\epsilon_0 \left(\sum_{\alpha} F_{\mu\alpha} F_{\nu\alpha} - \tfrac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha,\beta} F_{\beta\alpha} F_{\beta\alpha} \right),$$

donde las sumas sobre α y β son sobre t, x y y z pero (como de costumbre en relatividad) adoptamos un significado especial para el símbolo de suma $\sum$ y para el símbolo δ. En las sumas los términos en x, y y z se deben *restar* y $\delta_{tt} = +1$, mientras que $\delta_{xx} = \delta_{yy} = \delta_{zz} = -1$ y $\delta_{\mu\nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$ ($c = 1$). ¿Pueden verificar que la densidad de energía da $S_{tt} = (\epsilon_0/2)(E^2 + B^2)$ y el vector de Poynting $\epsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$? ¿Pueden demostrar que en un campo electrostático con $\boldsymbol{B} = 0$ los ejes principales del esfuerzo están en la dirección del campo eléctrico y que hay una *tensión* $(\epsilon_0/2)E^2$ en la dirección del campo, y que hay una *presión* igual en la dirección perpendicular a la del campo?

32

Índice de refracción de materiales densos

32-1 Polarización de la materia
32-2 Las ecuaciones de Maxwell en un dieléctrico
32-3 Ondas en un dieléctrico
32-4 El índice de refracción complejo
32-5 El índice de una mezcla
32-6 Ondas en metales
32-7 Aproximaciones a bajas y altas frecuencias; la profundidad de penetración y la frecuencia de plasma

32-1 Polarización de la materia

Discutamos ahora el fenómeno de la refracción de la luz —y también la absorción de la luz— por materiales densos. En el capítulo 31 del volumen I discutimos la teoría del índice de refracción, pero debido a nuestras habilidades matemáticas limitadas en ese tiempo, estuvimos restringidos a encontrar el índice solamente para materiales de densidad baja, como los gases. Sin embargo, los principios físicos que produjeron el índice fueron aclarados. El campo eléctrico de la onda de la luz polariza las moléculas del gas, produciendo momentos dipolares oscilantes. La aceleración de las cargas oscilantes radia ondas nuevas del campo. Este nuevo campo, interfiriendo con el viejo, produce un campo distinto que es equivalente a un cambio de fase de la onda original. Debido a que este cambio de fase es proporcional al espesor del material, el efecto es equivalente a tener una velocidad de fase diferente en el material. Cuando examinamos el tema anteriormente, despreciamos las complicaciones que se producen debido a efectos como el que las ondas nuevas cambian los campos donde están los dipolos oscilantes. Supusimos que las fuerzas sobre las cargas de los átomos provenían de las ondas *entrantes*, cuando en realidad, sus oscilaciones no sólo son producidas por las ondas entrantes sino también por las ondas radiadas de todos los demás átomos. Hubiera sido difícil para nosotros en ese momento incluir este efecto, así que estudiamos solamente los gases enrarecidos, donde tales efectos no son importantes.

Revisar
Tabla 32-1.

Ahora, sin embargo, encontraremos que es muy fácil tratar el problema si se usan ecuaciones diferenciales. Este método oscurece el origen físico del índice (como producido por las ondas reirradiadas interfiriendo con las ondas originales), pero hace que la teoría para materiales densos sea mucho más sencilla. Este capítulo juntará un gran número de piezas de nuestro trabajo anterior. Hemos tratado prácticamente todas las cuestiones necesarias, así que hay realmente pocas ideas nuevas a introducir. Probablemente necesiten refrescar la memoria sobre lo que van a necesitar y por ello damos en la tabla 32-1 una lista de las ecuaciones que usaremos, junto con una referencia del lugar donde se hallan. En

Tabla 32-1

Nuestro trabajo en este capítulo está basado en el material siguiente, ya se estudió en capítulos anteriores

Tema	Referencia	Ecuación
Oscilación amortiguada	Volumen I, cap. 23	$m(\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x)=F$
Índice de gases	Volumen I, cap. 31	$n=1+\frac{1}{2}\frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2-\omega^2)}$
		$n=n'-in''$
Mobilidad	Volumen I, cap. 41	$m\ddot{x}+\mu\dot{x}=F$
Conductividad eléctrica	Volumen I, cap. 43	$\mu=\frac{\tau}{m};\ \sigma=\frac{Nq_e^2\tau}{m}$
Polarizabilidad	Volumen II, cap. 10	$\rho_{\text{pol}}=-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P}$
Dentro de un dieléctrico	Volumen II, cap. 11	$\boldsymbol{E}_{\text{local}}=\boldsymbol{E}+\frac{1}{3\epsilon_0}\boldsymbol{P}$

muchos casos, no tendremos tiempo para insistir de nuevo sobre el razonamiento de lo físico, sino que simplemente usaremos las ecuaciones.

Empecemos recordando el mecanismo del índice de refracción para un gas. Supongan que hay N partículas por unidad de volumen y que cada partícula se comporta como un oscilador armónico. Usamos un modelo de átomo o molécula en el que el electrón está ligado con una fuerza proporcional a su desplazamiento (como si el electrón estuviera sujeto en su lugar por un resorte). Hacemos énfasis que éste no era un modelo *clásico* legítimo de un átomo, pero demostraremos más adelante que la teoría cuántica correcta da resultados equivalentes a este modelo (en casos sencillos). En nuestro tratamiento anterior, no incluimos la posibilidad de una fuerza de amortiguamiento en los osciladores atómicos, pero ahora lo haremos. Tal fuerza corresponde a una resistencia al movimiento, esto es, a una fuerza proporcional a la velocidad del electrón. Entonces la ecuación de movimiento es

$$F = q_e E = m(\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x), \tag{32.1}$$

donde x es el desplazamiento paralelo a la dirección de $\boldsymbol{E}$. (Estamos suponiendo un oscilador *isotrópico* cuya fuerza restauradora es la misma en todas direcciones. También estamos tomando, por el momento, una onda linealmente polarizada, así que $\boldsymbol{E}$ no cambia de dirección.) Si el campo eléctrico que actúa sobre el átomo varía sinusoidalmente con el tiempo escribimos

$$E = E_0 e^{i\omega t}. \tag{32.2}$$

Entonces el desplazamiento oscilará con la misma frecuencia y podemos suponer

$$x = x_0 e^{i\omega t}.$$

Sustituyendo $\dot{x} = i\omega x$ y $\ddot{x} = -\omega^2 x$, podemos despejar x en función de E:

$$x = \frac{q_e/m}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2}\, E. \tag{32.3}$$

Conociendo el desplazamiento, podemos calcular la aceleración $\ddot{x}$ y hallar la onda radiada responsable del índice. Ésta fue la manera como calculamos el índice en el capítulo 31 del volumen I.

Ahora, sin embargo, queremos tomar una aproximación diferente. El momento dipolar inducido p de un átomo es $q_e x$ o, usando la ecuación (32.3),

$$\boldsymbol{p} = \frac{q_e^2/m}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2}\, \boldsymbol{E}. \tag{32.4}$$

Como $\boldsymbol{p}$ es proporcional a $\boldsymbol{E}$, escribimos

$$\boldsymbol{p} = \epsilon_0 \alpha(\omega) \boldsymbol{E}, \tag{32.5}$$

donde α se llama *polarizabilidad atómica*.* Con esta definición, tenemos

$$\alpha = \frac{q_e^2/m\epsilon_0}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2}. \tag{32.6}$$

La solución cuántica para los movimientos de electrones en átomos da una respuesta similar excepto por las modificaciones siguientes. Los átomos tienen varias frecuencias naturales, cada frecuencia con su propia constante de disipación γ. También la "intensidad" efectiva de cada modo es diferente, lo cual podemos representar multiplicando la polarizabilidad para cada frecuencia por un factor de intensidad f, que es un número que sería de esperar fuese del orden de 1. Representando los tres parámetros ω_0, γ y f por ω_{0k}, γ_k y f_k para cada modo de

* En todo este capítulo seguiremos la notación del capítulo 31 del volumen I y representaremos con α la polarizabilidad *atómica* definida aquí. En el último capítulo, usamos α para representar la polarizabilidad de *volumen* —el cociente entre P y E—. En la notación de *este* capítulo $P = N\alpha\epsilon_0 E$ [véase ecuación (32.8)].

oscilación y sumando sobre los diversos modos, modificamos la ecuación (32.6) en la forma siguiente:

$$\alpha(\omega) = \frac{q_e^2}{\epsilon_0 m} \sum_k \frac{f_k}{-\omega^2 + i\gamma_k\omega + \omega_{0k}^2}. \tag{32.7}$$

Si N es el número de átomos por unidad de volumen en el material, la polarización P es simplemente $Np = \epsilon_0 N\alpha E$ y es proporcional a E:

$$\boldsymbol{P} = \epsilon_0 N\alpha(\omega)\boldsymbol{E}. \tag{32.8}$$

En otras palabras, cuando hay un campo eléctrico sinusoidal que actúa sobre un material, hay un momento dipolar inducido por unidad de volumen que es proporcional al campo eléctrico —con una constante de proporcionalidad α que, recalcamos, depende de la frecuencia—. A frecuencias muy altas, α es pequeña; no hay mucha respuesta. Sin embargo, a frecuencias bajas puede haber una respuesta fuerte. Además, la constante de proporcionalidad es un número complejo, lo que significa que la polarización no sigue exactamente al campo eléctrico, sino que puede estar algo desfasada. De todos modos, hay una polarización por unidad de volumen cuyo módulo es proporcional a la intensidad del campo eléctrico.

32-2 Las ecuaciones de Maxwell en un dieléctrico

La existencia de polarización en la materia significa que hay cargas y corrientes de polarización dentro del material, y se debe hacer uso de las ecuaciones de Maxwell completas para hallar los campos. Trataremos de resolver las ecuaciones de Maxwell esta vez en una situación donde las cargas y las corrientes no son nulas, como en el vacío, sino que están dadas implícitamente por el vector polarización. Nuestro primer paso es hallar explícitamente la densidad de carga ρ y la densidad de corriente $\boldsymbol{j}$, promediadas sobre un volumen pequeño del mismo tamaño que tuvimos en mente al definir $\boldsymbol{P}$. Entonces las ρ y $\boldsymbol{j}$ que necesitamos se pueden obtener de la polarización.

Hemos visto en el capítulo 10 que cuando la polarización $\boldsymbol{P}$ varía de un lugar a otro, hay una densidad de carga dada por

$$\rho_{\text{pol}} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P}. \tag{32.9}$$

Para ese entonces estábamos trabajando con campos estáticos, pero la misma fórmula también es válida para campos que varían con el tiempo. Pero cuando $\boldsymbol{P}$ varía con el tiempo, hay cargas en movimiento, así que también hay una *corriente* de polarización. Cada una de las cargas oscilantes contribuye a una corriente que es igual al producto de q_e por su velocidad v. Con N de tales cargas por unidad de volumen, la densidad de corriente $\boldsymbol{j}$ es

$$\boldsymbol{j} = Nq_e\boldsymbol{v}.$$

Como sabemos que $v = dx/dt$, entonces $j = Nq_e(dx/dt)$, que es precisamente dP/dt. Por lo tanto, la densidad de corriente proveniente de la polarización variable es

$$\boldsymbol{j}_{\text{pol}} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}. \tag{32.10}$$

Nuestro problema es ahora directo y sencillo. Escribimos las ecuaciones de Maxwell con la densidad de carga y la densidad de corriente expresadas en función de $\boldsymbol{P}$, usando las ecuaciones (32.9) y (32.10). (Suponemos que no hay ninguna otra corriente ni carga en el material.) Luego relacionamos $\boldsymbol{P}$ con $\boldsymbol{E}$ mediante la ecuación (32.8) y resolvemos la ecuación para obtener $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ —buscando las soluciones de onda—.

Antes de llegar a esto, queremos hacer una nota histórica. Maxwell escribió originalmente su ecuación en una forma diferente de la que hemos estado usando. Debido a que las ecuaciones fueron escritas en esta forma diferente durante muchos años —y todavía son escritas en esa forma por mucha gente— explicaremos la

diferencia. En los primeros tiempos no se tenía conciencia clara y completa del mecanismo de la constante dieléctrica. No se comprendía la naturaleza del átomo ni que había una polarización del material. Así que la gente no estaba consciente de que había una contribución a la densidad de carga ρ proveniente de $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P}$. Pensaron solamente en función de cargas que no estaban ligadas a los átomos (como las cargas que fluyen en los alambres o se desprenden de las superficies por frotamiento).

Hoy día, preferimos suponer que ρ representa la densidad de carga *total*, incluyendo la parte de las cargas atómicas ligadas. Si llamamos ρ_{pol} a esa parte, podemos escribir

$$\rho = \rho_{\text{pol}} + \rho_{\text{otras}},$$

donde ρ_{otras} es la densidad de carga considerada por Maxwell y se refiere a las cargas que no están ligadas a átomos individuales. Entonces debemos escribir

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho_{\text{pol}} + \rho_{\text{otras}}}{\epsilon_0}.$$

Sustituyendo ρ_{pol} de la ecuación (32.9),

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho_{\text{otras}}}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P}$$

o

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\epsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = \rho_{\text{otras}}. \tag{32.11}$$

La densidad de corriente en las ecuaciones de Maxwell para $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}$ también tiene, en general, una contribución de las corrientes atómicas ligadas. En consecuencia podemos escribir

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_{\text{pol}} + \boldsymbol{j}_{\text{otras}},$$

y las ecuaciones de Maxwell se transforman en

$$c^2\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}_{\text{otras}}}{\epsilon_0} + \frac{\boldsymbol{j}_{\text{pol}}}{\epsilon_0} + \frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{32.12}$$

Usando la ecuación (32.10), obtenemos

$$\epsilon_0 c^2\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{j}_{\text{otras}} + \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}). \tag{32.13}$$

Ahora pueden ver que si *definiéramos* un nuevo vector $\boldsymbol{D}$ como

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}, \tag{32.14}$$

las dos ecuaciones de campo se transformarán en

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D} = \rho_{\text{otras}} \tag{32.15}$$

y

$$\epsilon_0 c^2\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \boldsymbol{j}_{\text{otras}} + \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}. \tag{32.16}$$

Éstas son las fórmulas que Maxwell usó para los dieléctricos. Sus dos ecuaciones restantes eran

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},$$

y

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0,$$

que son las mismas que hemos estado usando.

Maxwell y también otros investigadores tuvieron un problema con los materiales magnéticos (los cuales estudiaremos pronto). Debido a que no sabían de la existencia de las corrientes circulantes responsables del magnetismo atómico,

usaron una densidad de corriente a la que todavía le faltaba otra parte. En lugar de la ecuación (32.16), escribieron

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}'+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t},\tag{32.17}$$

donde $\boldsymbol{H}$ difiere de $\epsilon_0c^2\boldsymbol{B}$ debido a que incluye los efectos de corrientes atómicas. (Entonces $\boldsymbol{j}'$ representa lo que falta de las corrientes.) Así que Maxwell tuvo *cuatro* vectores de campos —$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{H}$—; los campos $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{H}$ fueron las formas disimuladas de no prestar atención a lo que pasaba dentro del material. Las ecuaciones las hallarán escritas de esta manera en muchos lugares.

Para resolver las ecuaciones es necesario relacionar $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{H}$ con otros campos y la gente solía escribir

$$\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E}\qquad\text{y}\qquad\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}.\tag{32.18}$$

Sin embargo, estas relaciones sólo son aproximadamente ciertas para algunos materiales y aún entonces si los campos no están variando rápidamente con el tiempo. (Para campos que varían sinusoidalmente a menudo se *puede* escribir las ecuaciones de esta forma haciendo ϵ y μ funciones complejas de la frecuencia, pero no para una variación temporal arbitraria de los campos.) Así, solía haber toda clase de engaños para resolver estas ecuaciones. Pensamos que la forma correcta es mantener las ecuaciones en función de las cantidades fundamentales tal como ahora lo entendemos —y así es como hemos estado haciendo—.

32-3 Ondas en un dieléctrico

Ahora queremos encontrar qué clase de ondas electromagnéticas pueden existir en un material dieléctrico en donde no hay otras cargas adicionales que las ligadas a los átomos. Tomamos $\rho=-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P}$ y $\boldsymbol{j}=\partial\boldsymbol{P}/\partial t$. Las ecuaciones de Maxwell se transforman entonces en

$$\begin{aligned}&\text{(a)}\quad\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=-\frac{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P}}{\epsilon_0}\qquad&&\text{(b)}\quad c^2\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\boldsymbol{P}}{\epsilon_0}+\boldsymbol{E}\right)\\&\text{(c)}\quad\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\qquad&&\text{(d)}\quad\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0\end{aligned}\tag{32.19}$$

Podemos resolver estas ecuaciones como lo hemos hecho antes. Empezamos tomando el rotacional de la ecuación (32.19c):

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})=-\frac{\partial}{\partial t}\,\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}.$$

Luego usamos la identidad vectorial

$$\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})=\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E},$$

también sustituimos $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}$, usando la ecuación (32.19b); obtenemos

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}=-\frac{1}{\epsilon_0c^2}\,\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial t^2}-\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}.$$

Usando la ecuación (32.19a) para $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}$, obtenemos

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=-\frac{1}{\epsilon_0}\,\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P})+\frac{1}{\epsilon_0c^2}\,\frac{\partial^2\boldsymbol{P}}{\partial t^2}.\tag{32.20}$$

Así en lugar de la ecuación de onda, ahora obtenemos que el d'Alembertiano de $\boldsymbol{E}$ es igual a dos términos donde interviene la polarización $\boldsymbol{P}$.

Sin embargo, como $\boldsymbol{P}$ depende de $\boldsymbol{E}$, la ecuación (32.20) aún puede tener soluciones ondulatorias. Ahora nos limitaremos a dieléctricos *isotrópicos*, de modo que $\boldsymbol{P}$ siempre esté en la misma dirección que $\boldsymbol{E}$. Tratemos de encontrar

una solución en forma de onda que va en la dirección z. Luego, el campo eléctrico debe variar como $e^{i(\omega t-kz)}$. También supondremos que la onda está polarizada en la dirección x —que el campo eléctrico sólo tiene la componente x—. Escribimos

$$E_x = E_0 e^{i(\omega t-kz)}. \tag{32.21}$$

Saben que cualquier función de $(z - vt)$ representa una onda que viaja con velocidad v. El exponente de la ecuación (32.21) se puede escribir en la forma

$$-ik\left(z - \frac{\omega}{k}\,t\right),$$

así que la ecuación (32.21) representa una onda con la velocidad de fase

$$v_{\text{fase}} = \omega/k.$$

El índice de refracción n se define (véase volumen I, capítulo 31) por

$$v_{\text{fase}} = \frac{c}{n}.$$

Entonces la ecuación (32.21) se transforma en

$$E_x = E_0 e^{i\omega(t-nz/c)}.$$

Así, podemos hallar n buscando qué valores de k se requieren para que la ecuación (32.21) satisfaga las ecuaciones de campo apropiadas y usando luego

$$n = \frac{kc}{\omega}. \tag{32.22}$$

En un material isotrópico, solamente habrá la componente x de la polarización; entonces $\boldsymbol{P}$ no tiene variación con la coordenada x, así que $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P} = 0$ y nos quitamos de encima el primer término del segundo miembro de la ecuación (32.20). Además, como estamos suponiendo un dieléctrico lineal, P_x variará como $e^{i\omega t}$ y $\partial^2 P_x/\partial t^2 = -\omega^2 P_x$. El laplaciano en la ecuación (32.20) se transformará simplemente en $\partial^2 E_x/\partial z^2 = -k^2 E_x$, así que obtenemos

$$-k^2 E_x + \frac{\omega^2}{c^2}\,E_x = -\frac{\omega^2}{\epsilon_0 c^2}\,P_x. \tag{32.23}$$

Ahora supongamos por el momento que como $\boldsymbol{E}$ está variando sinusoidalmente, podemos haer $\boldsymbol{P}$ proporcional a $\boldsymbol{E}$, como en la ecuación (32.8). (Volveremos a discutir esta suposición más adelante.) Escribimos

$$P_x = \epsilon_0 N\alpha E_x.$$

Entonces E_x desaparece de la ecuación (32.23) y tenemos

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,(1 + N\alpha). \tag{32.24}$$

Hemos encontrado que una onda como la ecuación (32.21) con el número de onda k dado por la ecuación (32.24) satisfará las ecuaciones de campo. Usando la ecuación (32.22), el índice n está dado por

$$n^2 = 1 + N\alpha. \tag{32.25}$$

Comparemos esta fórmula con la que obtuvimos en nuestra teoría del índice de un gas (capítulo 31, volumen I). Allí obtuvimos la ecuación (31.19), que es

$$n = 1 + \frac{1}{2}\,\frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0}\,\frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2}. \tag{32.26}$$

Tomando α de la ecuación (32.6), la ecuación (32.25) nos daría

$$n^2 = 1 + \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0}\,\frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega + \omega_0^2}. \tag{32.27}$$

Primero, tenemos el nuevo término $i\gamma\omega$, porque estamos incluyendo la disipación de los osciladores. Segundo, el primer miembro es n en lugar de n^2 y hay un factor adicional de $1/2$. Pero noten que si N es suficientemente pequeño de modo que n es casi uno (como lo es para un gas), entonces la ecuación (32.27) dice que n^2 es uno más un número pequeño: $n^2 = 1 + \epsilon$. Entonces podemos escribir $n = \sqrt{1+\epsilon} \approx 1 + \epsilon/2$, y las dos expresiones son equivalentes. Así nuestro nuevo método da para un gas el mismo resultado que hemos encontrado anteriormente.

Ahora bien, podrían pensar que la ecuación (32.27) debería dar el índice de refracción para materiales densos también. Sin embargo, necesita ser modificada por diversas razones. Primero, la derivación de esta ecuación supone que el campo polarizante sobre cada átomo es el campo E_x. Esa hipótesis *no* es correcta, no obstante debido a que en los materiales densos también hay campos producidos por otros átomos que se encuentran en la vecindad, que pueden ser comparables con E_x. Consideramos un problema similar cuando estudiamos los campos estáticos en dieléctricos. (Véase capítulo 11.) Recordarán que estimamos el campo en un solo átomo imaginando que estaba dentro de un agujero esférico en el dieléctrico circundante. El campo en ese agujero —que llamamos campo *local*— está aumentado sobre el campo promedio E en la cantidad $P/3\epsilon_0$. (Sin embargo, recuerden que este resultado es estrictamente cierto sólo en materiales isotrópicos —incluyendo el caso especial de un cristal cúbico—.)

Los mismos razonamientos valdrán para el campo eléctrico en una onda, en tanto su longitud de onda sea mucho mayor que el espaciamiento entre los átomos. Limitándonos a tales casos, escribimos

$$E_{\text{local}} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}. \tag{32.28}$$

Este campo local es el que se debe usar para E en la ecuación (32.3); esto es, hay que escribir la ecuación (32.8) en la forma

$$P = \epsilon_0 N\alpha E_{\text{local}}. \tag{32.29}$$

Usando E_{local} de la ecuación (32.28), encontramos

$$P = \epsilon_0 N\alpha\left(E + \frac{P}{3\epsilon_0}\right)$$

o

$$P = \frac{N\alpha}{1 - (N\alpha/3)}\,\epsilon_0 E. \tag{32.30}$$

En otras palabras, aun para materiales densos P es proporcional con E (para campos sinusoidales). No obstante, la constante de proporcionalidad no es $\epsilon_0 N\alpha$, como escribimos después de la ecuación (32.23), sino que debe ser $\epsilon_0 N\alpha/[1 - (N\alpha/3)]$. Por lo tanto, debemos corregir la ecuación (32.25) así:

$$n^2 = 1 + \frac{N\alpha}{1 - (N\alpha/3)}. \tag{32.31}$$

Será más conveniente si escribimos esta ecuación en la forma

$$3\,\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = N\alpha, \tag{32.32}$$

que es algebraicamente equivalente. Se la conoce como ecuación de Clausius-Mossotti.

Hay otra complicación en los materiales densos. Debido a que los átomos vecinos están muy cercanos, hay una interacción fuerte entre ellos. Por eso

los modos internos de oscilación se modifican. Las frecuencias naturales de las oscilaciones atómicas son desplegadas por las interacciones y, por lo general, son fuertemente amortiguadas —el coeficiente de resistencia se vuelve muy grande—. Así que las ω_0 y γ de los sólidos serán muy diferentes a las de los átomos libres. Con estas reservas, podemos representar α, al menos aproximadamente, por la ecuación (32.7). Entonces tenemos que

$$3\,\frac{n^2-1}{n^2+2}=\frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0}\sum_k\frac{f_k}{-\omega^2+i\gamma_k\omega+\omega_{0k}^2}. \tag{32.33}$$

Una complicación final. Si el material denso es una mezcla de varios componentes, cada uno contribuirá a la polarización. La α total será la suma de las contribuciones de cada uno de los componentes de la mezcla [excepto por la inexactitud de la aproximación del campo local, ecuación (32.28), en cristales ordenados —efectos que discutimos al analizar los materiales ferroeléctricos—]. Llamando N_j al número de átomos de cada componente por unidad de volumen, debemos remplazar la ecuación (32.32) por

$$3\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)=\sum_j N_j\alpha_j, \tag{32.34}$$

donde cada α_j estará dada por una expresión como la ecuación (32.7). La ecuación (32.34) completa nuestra teoría del índice de refracción. La cantidad $3(n^2-l)/(n^2+2)$ está dada por alguna función compleja de la frecuencia, que es la polarizabilidad atómica media $\alpha(\omega)$. El cálculo preciso de $\alpha(\omega)$ (esto es, encontrar f_k, γ_k y ω_{0k}) en sustancias densas es un problema difícil de mecánica cuántica. Ha sido hecho a partir de primeros principios únicamente para unas pocas sustancias particularmente simples.

32-4 El índice de refracción complejo

Queremos examinar ahora las consecuencias de nuestro resultado, ecuación (32.33). Primero, notemos que α es compleja, así que el índice n será un número complejo. ¿Qué significa esto? Escribamos n como la suma de una parte real y una imaginaria:

$$n=n_R-in_I, \tag{32.35}$$

donde n_R y n_I son funciones reales de ω. Escribimos in_I con signo menos de modo que n_I sea una cantidad positiva en todos los materiales ópticos ordinarios. (En materiales no activos ordinarios —que no son, como los láseres o fuentes de luz—, γ es un número positivo, lo cual hace que la parte imaginaria de n sea negativa.) Nuestra onda plana de la ecuación (32.21) se escribe en función de n como

$$E_x=E_0e^{i\omega(t-nz/c)}.$$

Escribiendo n como en la ecuación (32.35), tendríamos

$$E_x=E_0e^{-\omega n_I z/c}e^{i\omega(t-n_R z/c)}. \tag{32.36}$$

El término $e^{i\omega(t-n_Rz/c)}$ representa una onda que viaja con la velocidad c/n_R, así que n_R representa lo que normalmente consideremos el índice de refracción. Pero la *amplitud* de esta onda es

$$E_0e^{-\omega n_I z/c},$$

que decrece exponencialmente con z. La figura 32-1 muestra una gráfica de la intensidad del campo eléctrico en un momento dado en función de z para $n_I\approx n_R/2\pi$. La parte imaginaria del índice representa la atenuación de la onda debido a la pérdida de energía en los osciladores atómicos. La *intensidad* de la onda es proporcional al cuadrado de la amplitud, así que

$$\text{Intensidad}\propto e^{-2\omega n_I z/c}.$$

A menudo se escribe en la forma

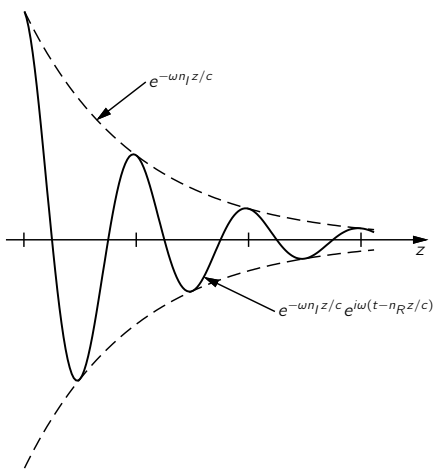


Figura 32-1. Gráfica de E_x para algún instante t, si $n_I\approx n_R/2\pi$.

$$\text{Intensidad} \propto e^{-\beta z}.$$

donde $\beta = 2\omega n_I/c$ se llama *coeficiente de absorción*. Entonces tenemos en la ecuación (32.33) no sólo la teoría del índice de refracción de materiales, sino también la teoría de su absorción de la luz.

En lo que generalmente consideramos como materiales transparentes la cantidad $c/\omega n_I$ —que tiene dimensiones de una longitud— es muy grande en comparación con el espesor del material.

32-5 El índice de una mezcla

Hay otra predicción de nuestra teoría del índice de refracción que podemos verificar experimentalmente. Supongan que consideramos una mezcla de dos materiales. El índice de la mezcla no es el promedio de los dos índices, sino que debe estar dado en función de la suma de las dos polarizabilidades, como en la ecuación (32.34). Si queremos el índice de una solución de azúcar, por ejemplo, la polarizabilidad total es la suma de la polarizabilidad del agua y la del azúcar. Por supuesto, cada una se debe calcular usando para N el número de moléculas de cada clase por unidad de volumen. En otras palabras, si una solución dada tiene N_1 moléculas de agua, cuya polarizabilidad es α_1 y N_2 moléculas de sacarosa ($C_{12}H_{22}O_{11}$), cuya polarizabilidad es α_2, debemos tener que

$$3\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right) = N_1\alpha_1 + N_2\alpha_2. \tag{32.37}$$

Podemos usar esta fórmula para poner a prueba nuestra teoría con experimentos midiendo el índice para varias concentraciones de sacarosa en agua. Sin embargo, aquí estamos haciendo varias suposiciones. Nuestra fórmula supone que no hay acción química cuando se disuelve la sacarosa y que las perturbaciones de los osciladores atómicos individuales no son demasiado diferentes para diversas concentraciones. Así que con certeza nuestro resultado es sólo aproximado. De cualquier manera veamos si es bueno.

Hemos elegido el ejemplo de una solución de azúcar debido a que hay una buena tabla de medidas del índice de refracción en el *Handbook of Chemistry and Physics* y también debido a que el azúcar es un cristal molecular que se disuelve sin ionizarse o cambiar su estado químico en alguna otra forma.

Damos en las tres primeras columnas de la tabla 32-2 los datos de ese manual. La columna A es el porcentaje de sacarosa por peso, la columna B es la densidad medida (g/cm^3) y la columna C es el índice de refracción medido para la luz cuya longitud de onda es de 589.3 milimicrones. De este modo, para el azúcar

Tabla 32-2

Índice de refracción de soluciones de sacarosa y comparación con las predicciones de la ecuación (32.37).

Datos del *Handbook of Chemistry and Physics*

A Fracción de sacarosa por peso	B densidad (g/cm^3)	C n a 20°C	D Moles de sacarosa[d] por litro, N_2/N_0	E Moles de agua[e] por litro, N_1/N_0	F $3\left(\frac{n^2-1}{n^2+2}\right)$	G $N_1\alpha_1$	H $N_2\alpha_2$	J $N_0\alpha_2$ (g/litro)
0[a]	0.9982	1.333	0	55.5	0.617	0.617	0	—
0.30	1.1270	1.3811	0.970	43.8	0.698	0.487	0.211	0.213
0.50	1.2296	1.4200	1.798	34.15	0.759	0.379	0.380	0.211
0.85	1.4454	1.5033	3.59	12.02	0.886	0.1335	0.752	0.210
1.00[b]	1.588	1.5577[c]	4.64	0	0.960	0	0.960	0.207

[a] agua pura [b] cristales de azúcar [c] media (véase texto) [d] peso molecular de la sacarosa = 342
[e] peso molecular del agua = 18

pura hemos tomado el índice medido de un cristal de azúcar. Los cristales no son isotrópicos, así que el índice medio tiene diferentes valores para diferentes direcciones. El manual da tres valores:

$$n_1 = 1.5376, \qquad n_2 = 1.5651, \qquad n_3 = 1.5705$$

Hemos tomado el promedio.

Ahora debemos tratar de calcular n para cada concentración, pero no sabemos cuáles valores tomar para α_1 o α_2. Pongamos a prueba la teoría de esta manera: supongamos que la polarizabilidad del agua (α_1) es la misma en todas las concentraciones y calculemos la polarizabilidad de la sacarosa usando los valores experimentales de n y despejando α_2 de la ecuación (32.37). Si la teoría es correcta, debemos obtener el mismo α_2 para todas las concentraciones.

Primero necesitamos conocer N_1 y N_2; expresémoslos en función del número de Avogadro N_0. Tomemos un litro (1 000 cm^3) como unidad de volumen. Luego N_i/N_0 es el peso por litro dividido entre el peso molecular en gramos. Y el peso por litro es la densidad (multiplicada por 1 000 para obtener gramos por litro) multiplicada por el peso fraccional de la sacarosa o del agua. En esta forma, obtenemos N_2/N_0 y N_1/N_0 como en las columnas D y E de la tabla.

En la columna F hemos calculado $3(n^2-1)(n^2+2)$ a partir de los valores experimentales de n dados en la columna C. Para el agua pura, $3(n^2-1)/(n^2+2)$ es 0.617 que es igual a $N_1\alpha_1$. Podemos luego completar el resto de la columna G, como en cada renglón G/E debe estar en la misma razón —es decir, 0.617 : 55.5—. Restando la columna G de la columna F, obtenemos la contribución $N_2\alpha_2$ de la sacarosa, mostrada en la columna H. Dividiendo estas entradas entre los valores de N_2/N_0 dados en la columna D, obtenemos los valores de $N_0\alpha_2$ mostrados en la columna J.

Según nuestra teoría sería de esperar que todos los valores de $N_0\alpha_2$ fueran iguales. No son exactamente iguales pero sí muy parecidos. Podemos concluir que nuestras ideas son bastante correctas. Aún más, encontramos que la polarizabilidad de molécula de azúcar, no parece depender mucho de lo que la rodea —su polarizabilidad en una solución diluida es casi igual que en el cristal—.

32-6 Ondas en metales

La teoría que hemos utilizado en este capítulo para materiales sólidos también se puede aplicar a buenos conductores, como los metales, con muy pocas modificaciones. En los metales, algunos de los electrones no tienen fuerza alguna que los sujete a cualquier átomo particular; son estos electrones "libres" los responsables de la conductividad. Hay otros electrones que están ligados, y la teoría anterior es aplicable directamente a ellos. No obstante, su influencia generalmente es superada por los efectos de los electrones de conducción. Ahora consideraremos solamente los efectos de los electrones libres.

Si no hay fuerza restauradora sobre un electrón —pero aún alguna resistencia a su movimiento— su ecuación de movimiento difiere de la ecuación (32.1) solamente porque falta el término en $\omega_0^2 x$. Así, todo lo que tenemos que hacer es establecer $\omega_0^2 = 0$ en el resto de nuestra derivación —excepto que hay una diferencia más—. La razón que tuvimos para distinguir entre el campo medio y el campo local en un dieléctrico es que en un aislante cada uno de los dipolos está fijo en una posición, así que tiene una relación definida con la posición de los otros. Pero debido a que los electrones de conducción en un metal se mueven por todas partes, el campo sobre ellos es *en promedio* el campo medio $\boldsymbol{E}$. Así que la corrección hecha a la ecuación (32.8) usando la ecuación (32.28) *no* se debe hacer para los electrones de conducción. Por tanto, la fórmula para el índice de refracción de metales debería ser como la ecuación (32.27), excepto que con ω_0 igual a cero, o sea,

$$n^2 = 1 + \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0}\,\frac{1}{-\omega^2 + i\gamma\omega}. \tag{32.38}$$

Esto es solamente la contribución de los electrones de conducción, que supondremos es el término de mayor importancia para metales.

Ahora bien, sabemos incluso cómo encontrar el valor a usar para γ, debido a que está relacionado con la conductividad del metal. En el capítulo 43 del volumen I discutimos cómo la conductividad de un metal proviene de la difusión de los electrones libres a través del cristal. Los electrones van de dispersión en dispersión en una trayectoria dentada y entre dispersiones se mueven libremente excepto por una aceleración debida a cierto campo eléctrico promedio (como muestra la figura 32-2). Encontramos en el capítulo 43 del volumen I que la velocidad promedio de arrastre es simplemente el producto de la aceleración por el tiempo promedio τ entre colisiones. La aceleración es q_eE/m, así que

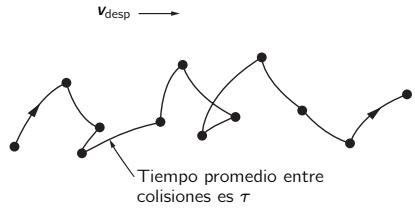


Figura 32-2. El movimiento de un electrón libre.

$$v_{\text{desp}} = \frac{q_eE}{m}\,\tau. \tag{32.39}$$

Esta fórmula suponía que E era constante, así que v_{desp} era una velocidad constante. Como no hay aceleración promedio alguna, la fuerza de arrastre es igual a la fuerza aplicada. Hemos definido γ diciendo que γmv es la fuerza de arrastre [véase la ecuación (32.1)], que es q_eE; por lo tanto, tenemos que

$$\gamma = \frac{1}{\tau}. \tag{32.40}$$

Aunque no es fácil medir τ directamente, podemos determinarlo midiendo la conductividad del metal. Experimentalmente se encuentra que un campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ en un metal produce una corriente con la densidad $\boldsymbol{j}$ proporcional a $\boldsymbol{E}$ (para materiales isotrópicos):

$$\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}.$$

La constante de proporcionalidad σ se llama *conductividad*. Esto es justo lo que es de esperar de la ecuación (32.29) si hacemos

$$j = Nq_ev_{\text{desp}}.$$

Entonces

$$\sigma = \frac{Nq_e^2}{m}\,\tau. \tag{32.41}$$

Así que τ —y por consiguiente γ— se puede relacionar con la conductividad eléctrica observada. Usando las ecuaciones (32.40) y (32.41), podemos escribir nuestra fórmula para el índice, ecuación (32.38), en la forma siguiente:

$$n^2 = 1 + \frac{\sigma/\epsilon_0}{i\omega(1 + i\omega\tau)}, \tag{32.42}$$

donde

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{m\sigma}{Nq_e^2}. \tag{32.43}$$

Ésta es una fórmula conveniente para el índice de refracción de los metales.

32-7 Aproximaciones a bajas y altas frecuencias; la profundidad de penetración y la frecuencia de plasma

Nuestro resultado, ecuación (32.42), para el índice de refracción de los metales predice características muy diferentes para propagación de ondas a frecuencias diferentes. Primero veamos qué sucede a frecuencias muy *bajas*. Si ω es suficientemente pequeño, podemos aproximar la ecuación (32.42) por

$$n^2 = -i\,\frac{\sigma}{\epsilon_0\omega}. \tag{32.44}$$

Ahora bien, como pueden verificar elevando al cuadrado,*

$$\sqrt{-i} = \frac{1 - i}{\sqrt{2}};$$

así que para frecuencias bajas,

* O escribiendo $-i = e^{-i\pi/2}$; $\sqrt{-i} = e^{-i\pi/4} = \cos\pi/4 - i\,\text{sen}\,\pi/4$, que da el mismo resultado.

$$n = \sqrt{\sigma/2\epsilon_0\omega}\,(1 - i). \tag{32.45}$$

Las partes real e imaginaria de n tienen el mismo módulo. Con una parte imaginaria de n tan grande, la onda en el metal se atenúa rápidamente. Refiriéndonos a la ecuación (32.36), la amplitud de una onda en la dirección z decrece como

$$\exp[-\sqrt{\sigma\omega/2\epsilon_0 c^2}\,z]. \tag{32.46}$$

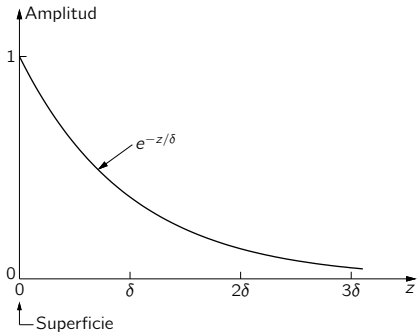


Figura 32-3. La amplitud de una onda electromagnética transversal en función de la distancia dentro de un metal.

Escribamos esto en la forma

$$e^{-z/\delta}, \tag{32.47}$$

donde δ es entonces la distancia en que la amplitud de la onda decrece en el factor $e^{-1} = 1/2.72$ —o aproximadamente un tercio—. La figura 32-3 muestra la amplitud de tal tipo de onda en función de z. Como las ondas electromagnéticas penetrarán dentro de un metal solamente esta distancia, δ se llama *profundidad de penetración*. Está dada por

$$\delta = \sqrt{2\epsilon_0 c^2/\sigma\omega}. \tag{32.48}$$

Ahora bien, ¿qué entendemos por frecuencias "bajas"? Examinando la ecuación (32.42), vemos que puede ser aproximada por la ecuación (32.44) solamente si $\omega\tau$ es mucho menor que uno y si $\omega\epsilon_0/\sigma$ también es mucho menor que uno; esto es, nuestra aproximación de baja frecuencia se aplica cuando

$$\omega \ll \frac{1}{\tau}$$

y

$$\omega \ll \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \tag{32.49}$$

Veamos a qué frecuencias corresponden para un metal típico como el cobre. Calculemos τ usando la ecuación (32.43), y σ/ϵ_0 usando la conductividad medida. Tomamos los datos siguientes de un manual:

$$\sigma = 5.76 \times 10^7 \text{ (ohm} \cdot \text{metro)}^{-1},$$
peso atómico = 63.5 gramos,
densidad = 8.9 gramos $\cdot$ cm^{-3},
número de Avogadro = 6.02×10^{23} (gramo de peso atómico)$^{-1}$.

Si suponemos que hay un electrón libre por átomo, el número de electrones por metro cúbico es

$$N = 8.5 \times 10^{28} \text{ metro}^{-3}.$$

Usando

$$q_e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ coulomb},$$
$$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ faradio} \cdot \text{metro}^{-1},$$
$$m = 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg},$$

obtenemos

$$\tau = 2.4 \times 10^{-12} \text{ s},$$
$$\frac{1}{\tau} = 4.1 \times 10^{13} \text{ s}^{-1},$$
$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = 6.5 \times 10^{18} \text{ s}^{-1}.$$

Así que para frecuencias menores que alrededor de 10^{12} ciclos por segundo, el cobre tendrá el comportamiento de "baja frecuencia" que describimos (lo cual significa para ondas cuya longitud de onda en el espacio libre es mayor que 0.3 milímetros —¡ondas de radio *muy* cortas!—).

Para estas ondas, la profundidad de penetración en el cobre es

$$\delta = \sqrt{\frac{0.028\ \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}}{\omega}}$$

Para microondas de 10 000 megaciclos por segundo (ondas de 3 cm)

$$\delta = 6.7 \times 10^{-5}\ \text{cm}.$$

La onda penetra una distancia muy pequeña.

Podemos ver a partir de esto por qué al estudiar las cavidades (o guías de ondas) solamente necesitamos preocuparnos de los campos dentro de la cavidad y no en el metal o fuera de la cavidad. También vemos por qué las pérdidas en la cavidad se reducen con una capa delgada de plata u oro. Las pérdidas provienen de la corriente y solamente son apreciables en una capa delgada igual a la profundidad de penetración.

Supongan que ahora consideramos el índice de un metal como el cobre a frecuencias altas. Para frecuencias muy altas $\omega\tau$ es mucho mayor que uno, y la ecuación (32.42) queda bien aproximada por

$$n^2 = 1 - \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega^2 \tau}. \tag{32.50}$$

Para ondas de frecuencias altas el índice de un metal se vuelve real —¡y menor que uno!—. También esto es evidente según la ecuación (32.38) si se desprecia el término de disipación con γ, como puede hacerse para valores muy grandes de ω. La ecuación (32.38) da

$$n^2 = 1 - \frac{Nq_e^2}{m\epsilon_0 \omega^2}, \tag{32.51}$$

que, por supuesto, es la misma ecuación (32.50). Hemos visto anteriormente la cantidad $Nq_e^2/m\epsilon_0$, que llamamos el cuadrado de la frecuencia de plasma (sección 7-3):

$$\omega_p^2 = \frac{Nq_e^2}{\epsilon_0 m},$$

así que podemos escribir la ecuación (32.50) o la (32.51) en la forma

$$n^2 = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2.$$

La frecuencia de plasma es una especie de frecuencia "crítica".

Para $\omega < \omega_p$ el índice de un metal tiene una parte imaginaria, y las ondas son atenuadas; pero para $\omega \gg \omega_p$ el índice es real y el metal se vuelve transparente. Por supuesto, saben que los metales son razonablemente transparentes a los rayos X. Pero algunos metales son transparentes hasta en el ultravioleta. En la tabla 32-3 damos las longitudes de onda para varios metales observadas experimentalmente a las cuales empiezan a volverse transparentes. En la segunda columna damos la longitud de onda crítica calculada $\lambda_p = 2\pi c/\omega_p$. Considerando que la longitud de onda experimental no está muy bien definida, concuerda con la teoría de forma muy aceptable.

Tabla 32-3
Longitudes de onda para las cuales el metal se vuelve transparente*

Metal	λ (experimental)	$\lambda_p = 2\pi c/\omega_p$
Li	1 550 Å	1 550 Å
Na	2 100	2 090
K	3 150	2 870
Rb	3 400	3 220

* De: C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 2ª ed., John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1956, p. 266.

Puede que se pregunten por qué la frecuencia de plasma ω_p debería tener algo que ver con la propagación de ondas electromagnéticas en los metales. La frecuencia de plasma surgió en el capítulo 7 como frecuencia natural de oscilaciones de *densidad* de los electrones libres. (Un grupo de electrones es repelido por fuerzas eléctricas y la inercia de los electrones conduce a una oscilación de densidad.) Así, las ondas *longitudinales* de plasma son resonantes a ω_p. Pero ahora estamos hablando de ondas electromagnéticas *transversales* y hemos hallado que las ondas transversales son absorbidas para frecuencias inferiores a ω_p. (Es una coincidencia interesante y *no* accidental.)

Aunque hemos estado hablando de la propagación de ondas en metales, se darán cuenta a esta altura de la universalidad de los fenómenos de la física —que es lo mismo que los electrones libres estén en un metal o en el plasma de la

ionosfera de la Tierra o en la atmósfera de una estrella—. Para comprender la propagación de ondas de radio en la ionosfera, podemos usar las mismas expresiones —utilizando, por supuesto, los valores apropiados de N y τ. Ahora podemos ver por qué las ondas largas de radio son absorbidas o reflejadas por la ionosfera, mientras que las ondas cortas la atraviesan. (Hay que usar ondas cortas para comunicación con satélites.)

Hemos hablado de los extremos de alta y baja frecuencia para la propagación de ondas en metales. Para frecuencias intermedias hay que utilizar la fórmula completa dada por la ecuación (32.42). En general, el índice tendrá partes real e imaginaria; la onda se atenúa a medida que se propaga dentro del metal. Para capas muy delgadas, los metales son algunas veces transparentes aun para frecuencias ópticas. Por ejemplo, los anteojos especiales para personas que trabajan cerca de hornos de alta temperatura se hacen evaporando una fina capa de oro sobre vidrio. La luz visible es transmitida bastante bien —con un intenso tinte verde— pero el infrarrojo es fuertemente absorbido.

Finalmente, no puede haber escapado al lector que muchas de estas fórmulas se parecen en cierto sentido a las discutidas en el capítulo 10 para la constante dieléctrica κ. Esta constante κ mide la respuesta del material a un campo constante, esto es, para $\omega = 0$. Si observan cuidadosamente en la definición de n y κ verán que κ es simplemente el límite de n^2 cuando $\omega \to 0$. En efecto, haciendo $\omega = 0$ y $n^2 = \kappa$ en las ecuaciones de este capítulo reproduciremos las ecuaciones de teoría de la constante dieléctrica del capítulo 11.

33

Reflexión de superficies

33-1 Reflexión y refracción de la luz
33-2 Ondas en materiales densos
33-3 Condiciones de frontera
33-4 Ondas reflejadas y transmitidas
33-5 Reflexión en metales
33-6 Reflexión interna total

33-1 Reflexión y refracción de la luz

El tema de este capítulo es la reflexión y la refracción de luz —o de ondas electromagnéticas en general— en superficies. Ya estudiamos las leyes de reflexión y de refracción en los capítulos 26 y 33 del volumen I. Allí encontramos todo lo referente a:

1. El ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia. Con todos los ángulos definidos como muestra la figura 33-1:

$$\theta_r = \theta_i. \tag{33.1}$$

2. El producto $n \operatorname{sen}\theta$ es el mismo para el haz incidente y el transmitido (ley de Snell):

$$n_1 \operatorname{sen}\theta_i = n_2 \operatorname{sen}\theta_t. \tag{33.2}$$

3. La intensidad de la luz reflejada depende del ángulo de incidencia y también de la dirección de polarización. Para $\boldsymbol{E}$ perpendicular al plano de incidencia, el coeficiente de reflexión $R_\perp$ es

$$R_\perp = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\operatorname{sen}^2(\theta_i - \theta_t)}{\operatorname{sen}^2(\theta_i + \theta_t)}. \tag{33.3}$$

   Para $\boldsymbol{E}$ paralelo al plano de incidencia, el coeficiente de reflexión $R_\parallel$ es

$$R_\parallel = \frac{I_r}{I_i} = \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_t)}{\tan^2(\theta_i + \theta_t)}. \tag{33.4}$$

4. Para incidencia normal (¡cualquier polarización, naturalmente!),

$$\frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2. \tag{33.5}$$

Revisar
Volumen I, capítulo 33, *Polarización*

(Anteriormente usamos i para el ángulo de incidencia y r para el ángulo de refracción. Ya que como no podemos usar r para los ángulos de "refracción" y de "reflexión", ahora estamos usando θ_i = ángulo de incidencia, θ_r = ángulo de reflexión y θ_t = ángulo de transmisión.)

En realidad lo estudiado contiene más o menos lo que el tema requiere normalmente, pero lo haremos todo nuevamente de una manera diferente. ¿Por qué? Una razón es que antes supusimos que los índices de refracción eran reales (no hay absorción en los materiales). Pero otra razón es que deben saber cómo tratar lo que le sucede a las ondas en superficies desde el punto de vista de las ecuaciones de Maxwell. Obtendremos las mismas respuestas que antes, pero ahora a partir de una solución directa del problema ondulatorio en vez de razonamientos ingeniosos.

Insistamos en que la amplitud de una reflexión superficial no es una propiedad del *material*, como lo es el índice de refracción. Es una "propiedad de la superficie", una propiedad que depende en forma precisa de cómo está hecha la superficie. Además, una capa delgada de basura extraña en la superficie entre dos materiales de índices n_1 y n_2 normalmente cambiará la reflexión. (Hay aquí cualquier clase de posibilidades de interferencia —como los colores de las películas de

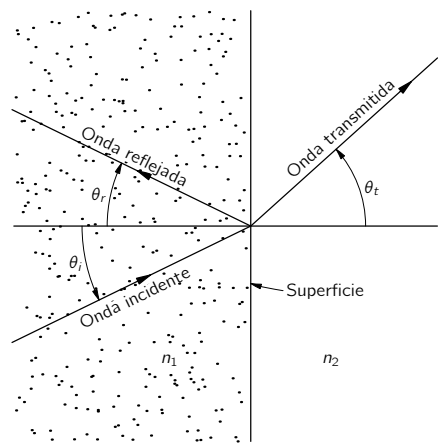


Figura 33-1. Reflexión y refracción de ondas de luz sobre una superficie. (La dirección de la onda es normal a las crestas de la onda.)

aceite—. Espesores apropiados pueden reducir la amplitud reflejada a cero para una frecuencia determinada; es así como se hacen las lentes tratadas.) Las fórmulas que deduciremos son correctas únicamente si la variación de índice es súbita —en una distancia muy pequeña respecto a una longitud de onda—. Para la luz, la longitud de onda es de unos 5 000 Å, así que por superficie "lisa" entendemos una en la cual las condiciones varían al recorrer una distancia de sólo unos pocos átomos (o unos pocos ángstroms). Nuestras ecuaciones servirán para la luz en el caso de superficies sumamente pulidas. En general, si el índice varía gradualmente sobre una distancia de varias longitudes de onda, hay muy poca reflexión.

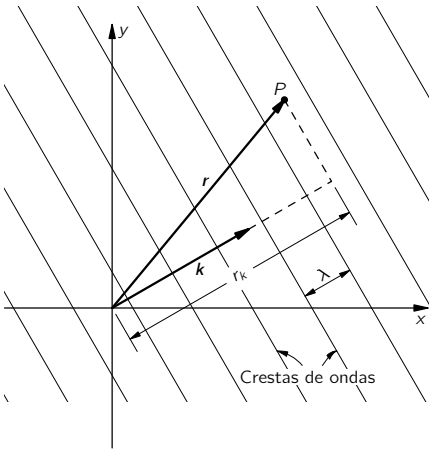


Figura 33-2. Para una onda que se mueve en la dirección $\boldsymbol{k}$, la fase en cada punto P es $(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$.

33-2 Ondas en materiales densos

Recuerden primero la manera conveniente de describir una onda plana sinusoidal que empleamos en el capítulo 34 del volumen I. Cualquier *componente* de campo en la onda (usamos E como ejemplo) se puede escribir en la forma

$$E = E_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}, \tag{33.6}$$

donde E representa la amplitud en el punto $\boldsymbol{r}$ (desde el origen) en el tiempo t. El vector $\boldsymbol{k}$ apunta en la dirección en que viaja la onda y su módulo $|\boldsymbol{k}| = k = 2\pi/\lambda$ es el número de onda. La velocidad de fase de la onda es $v_{\text{fase}} = \omega/k$; para una onda luminosa en un material de índice n, $v_{\text{fase}} = c/n$, así que

$$k = \frac{\omega n}{c}. \tag{33.7}$$

Supongan que $\boldsymbol{k}$ está en la dirección z; entonces $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$ es simplemente kz, como lo hemos usado a menudo. Para $\boldsymbol{k}$ en cualquier otra dirección, tenemos que remplazar z por r_k, la distancia al origen en la dirección $\boldsymbol{k}$; dicho de otro modo, debemos remplazar kz por kr_k, que es precisamente $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}$. (Véase figura 33-2.) Así, la ecuación (33.6) es una representación conveniente de una onda en cualquier dirección.

Por supuesto, debemos recordar que

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = k_x x + k_y y + k_z z,$$

donde k_x, k_y y k_z son las componentes de $\boldsymbol{k}$ según los tres ejes. Señalamos una vez que (ω, k_x, k_y, k_z) es un vector de dimensión cuatro y que su producto escalar con (t, x, y, z) es un invariante. Así, la fase de una onda es un invariante y se podría escribir la ecuación (33.6) así:

$$E = E_0 e^{ik_\mu x_\mu}.$$

Pero ahora no necesitamos tanta elegancia.

Para un E sinusoidal, como en la ecuación (33.6), $\partial E/\partial t$ es igual a $i\omega E$ y $\partial E/\partial x$ es $-ik_x E$ y análogamente para las otras componentes. Pueden ver por qué es muy conveniente usar la forma (33.6) cuando se trabaja con ecuaciones diferenciales —se remplazan las derivaciones por multiplicaciones—. Otro punto útil: la operación $\boldsymbol{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ se remplaza por las tres multiplicaciones $(-ik_x, -ik_y, -ik_z)$. Pero estos tres factores se transforman como las componentes del vector $\boldsymbol{k}$, así que se remplaza el operador $\boldsymbol{\nabla}$, por multiplicación por $-i\boldsymbol{k}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &\to i\omega, \\ \boldsymbol{\nabla} &\to -i\boldsymbol{k}. \end{aligned} \tag{33.8}$$

Esto es válido para cualquier operación $\boldsymbol{\nabla}$ —sea el gradiente, la divergencia o el rotacional—. Por ejemplo, la componente z de $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}$ es

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}.$$

Si tanto E_y como E_x varían como $e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$, obtenemos

$$-ik_xE_y + ik_yE_x,$$

que como ven, es la componente z de $-i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}$.

Así, tenemos el hecho general muy útil de que siempre que tengan que tomar el gradiente de un vector que varía como una onda en tres dimensiones (son una parte importante de la física), siempre pueden derivar rápidamente y casi sin pensarlo recordando que la operación $\boldsymbol{\nabla}$, es equivalente a multiplicar por $-i\boldsymbol{k}$.

Por ejemplo, la ecuación de Faraday

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

para una onda se convierte en

$$-i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E} = -i\omega\boldsymbol{B}.$$

Esto nos dice

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}}{\omega}, \tag{33.9}$$

que corresponde al resultado que encontramos anteriormente para ondas en el espacio libre —que una onda $\boldsymbol{B}$ es perpendicular a $\boldsymbol{E}$ y a la dirección de la onda—. (En el espacio libre, $\omega/k = c$.) Pueden recordar el signo en la ecuación (33.9) teniendo en cuenta que $\boldsymbol{k}$ está en la dirección del vector de Poynting $\boldsymbol{S} = \varepsilon_0 c^2\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$.

Si usan la misma regla con las otras ecuaciones de Maxwell obtienen de nuevo los resultados del último capítulo, y en particular que

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = k^2 = \frac{\omega^2 n^2}{c^2}. \tag{33.10}$$

Pero como ya lo sabemos, no lo haremos de nuevo.

Si quieren entretenerse pueden intentar el siguiente problema pavoroso que era la prueba máxima para estudiantes graduados allá por 1890: resuelvan las ecuaciones de Maxwell con ondas planas en un cristal *anisótropo*, es decir, cuando la polarización $\boldsymbol{P}$ está relacionada con el campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ por medio de un tensor de polarizabilidad. Por supuesto, deben elegir los ejes según los ejes principales del tensor, de modo que las relaciones sean lo más simples (entonces $P_x = \alpha_a E_x$, $Py = \alpha_b E_y$ y $P_z = \alpha_c E_z$), pero permitan que las ondas tengan dirección y polarización arbitrarias. Deben ser capaces de hallar las relaciones entre $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$, y cómo varía $\boldsymbol{k}$ con la dirección y la polarización de la onda. Entonces comprenderán la óptica de un cristal anisótropo. Sería mejor empezar con el caso más simple de un cristal birrefringente —como la calcita— para el cual dos de las polarizabilidades son iguales ($\alpha_b = \alpha_c$, digamos) y tratar de comprender por qué ven doble cuando miran a través de tal cristal. Si pueden hacerlo, prueben luego con el caso más difícil en el cual los tres α son diferentes. Entonces sabrán si han llegado al nivel de un estudiante graduado de 1890. En este capítulo consideraremos únicamente sustancias isotrópicas.

Sabemos por experiencia que cuando una onda plana llega a la separación entre dos materiales diferentes —aire y vidrio o agua y aceite, por ejemplo— hay una onda reflejada y una onda transmitida. Supongan que hacemos esa única hipótesis y veamos qué es lo que podemos calcular. Elegimos nuestros ejes con el plano yz en la superficie y en el plano xy perpendicular a las superficies de onda incidentes, como muestra la figura 33-3.

Entonces se puede escribir el vector eléctrico de la onda incidente en la forma

$$\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})}. \tag{33.11}$$

Como $\boldsymbol{k}$ es perpendicular al eje z,

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = k_x x + k_y y. \tag{33.12}$$

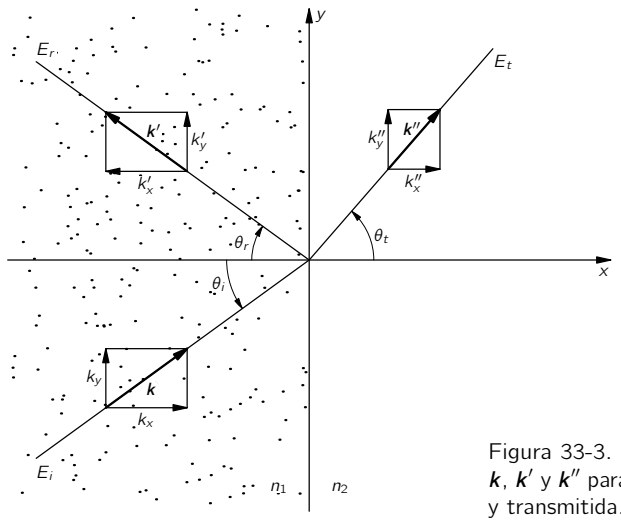


Figura 33-3. Los vectores de propagación $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}'$ y $\boldsymbol{k}''$ para las ondas incidente, reflejada y transmitida.

Escribimos la onda reflejada en la forma

$$\boldsymbol{E}_r = \boldsymbol{E}'_0 e^{i(\omega' t - \boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r})}, \tag{33.13}$$

de modo que su frecuencia es ω', su número de onda es $\boldsymbol{k}'$ y su amplitud es $\boldsymbol{E}'_0$. (Sabemos, por supuesto, que la frecuencia es la misma y que el módulo de $\boldsymbol{k}'$ es el mismo que en la onda incidente, pero ni eso vamos a suponer. Dejaremos que resulte de la maquinaria matemática.) Finalmente, escribimos para la onda transmitida,

$$\boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{E}''_0 e^{i(\omega'' t - \boldsymbol{k}''\cdot\boldsymbol{r})}. \tag{33.14}$$

Sabemos que una de las ecuaciones de Maxwell da la ecuación (33.9), así que para cada una de las ondas tenemos

$$\boldsymbol{B}_i = \frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_i}{\omega}, \qquad \boldsymbol{B}_r = \frac{\boldsymbol{k}'\times\boldsymbol{E}_r}{\omega'}, \qquad \boldsymbol{B}_t = \frac{\boldsymbol{k}''\times\boldsymbol{E}_t}{\omega''}. \tag{33.15}$$

Además, si llamamos n_1 y n_2 a los índices de los dos medios, tenemos según la ecuación (33.10),

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2 n_1^2}{c^2}. \tag{33.16}$$

Como la onda reflejada está en el mismo material, se tiene

$$k'^2 = \frac{\omega'^2 n_1^2}{c^2} \tag{33.17}$$

mientras que para la onda transmitida,

$$k''^2 = \frac{\omega''^2 n_2^2}{c^2}. \tag{33.18}$$

33-3 Condiciones de frontera

Todo lo que hemos hecho hasta ahora es describir las tres ondas; nuestro problema es ahora determinar los parámetros de las ondas reflejada y transmitida en función de los mismos de la onda incidente. ¿Cómo podemos hacerlo? Las tres ondas que hemos descrito satisfacen las ecuaciones de Maxwell en el material uniforme, pero también tienen que satisfacer las ecuaciones de Maxwell *en* la separación entre los dos materiales diferentes. Así, ahora tenemos que examinar lo que ocurre exactamente en la frontera. Encontramos que las ecuaciones de Maxwell exigen que las tres ondas se ajusten entre sí de cierta manera.

Como ejemplo de lo que queremos decir, la componente y del campo eléctrico $\boldsymbol{E}$ tiene que ser *igual* en ambos lados de la frontera. Esto lo exige la ley de Faraday,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{33.19}$$

como podemos ver de la siguiente manera. Consideren un pequeño lazo rectangular Γ sobre la frontera, como muestra la figura 33-4. La ecuación (33.19) dice que la integral de línea de $\boldsymbol{E}$ a lo largo de Γ es igual a la derivada respecto al tiempo del flujo de $\boldsymbol{B}$ a través del lazo:

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n}\, da.$$

Imaginen ahora que el rectángulo es muy angosto, de modo que el lazo encierra un área infinitesimal. Si $\boldsymbol{B}$ permanece finito (¡y no hay ninguna razón para que sea infinito en la frontera!) el flujo a través del área es cero. Por lo tanto, la integral de línea de $\boldsymbol{E}$ tiene que ser cero. Si E_{y1} y E_{y2} son las componentes del campo en los dos lados de la frontera y si la longitud del rectángulo es l, tenemos

$$E_{y1}l - E_{y2}l = 0$$

o sea

$$E_{y1} = E_{y2}, \tag{33.20}$$

como habíamos dicho. Nos da una relación entre los campos de las tres ondas.

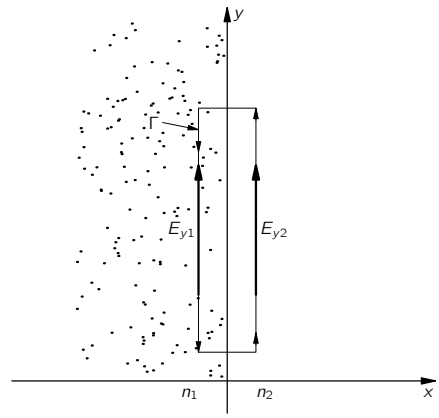


Figura 33-4. Una condición de frontera $E_{y2} = E_{y1}$ se obtiene a partir de la expresión $\oint_\Gamma \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = 0$.

El proceso de poner de manifiesto las consecuencias de las ecuaciones de Maxwell en la frontera se llama "determinación de las condiciones de frontera". Normalmente esto se realiza encontrando tantas ecuaciones del tipo (33.20) como se pueda, haciendo argumentos acerca de pequeños rectángulos como Γ en la figura 33-4, o usando pequeñas superficies gaussianas montadas sobre la frontera. Aunque éste es un camino perfectamente aceptable a seguir, da la impresión de que el problema de tratar una frontera es distinto para cada problema físico diferente.

Por ejemplo, en un problema de flujo de calor a través de una frontera, ¿cómo se relacionan las temperaturas en los dos lados? Bueno, podrían argumentar entre otras cosas que el flujo de calor *hacia* la frontera por un lado debe ser igual al flujo que *sale* por el otro. Usualmente es posible, y generalmente muy útil, encontrar las condiciones de frontera haciendo razonamientos físicos. Puede suceder, sin embargo, que trabajando en cierto problema, tengan solamente algunas ecuaciones y no puedan ver claramente qué razonamientos físicos usar. Así, aunque por el momento estamos interesados solamente en un problema electromagnético, donde *podemos* hacer razonamientos físicos, queremos mostrarles un método que puede ser utilizado para cualquier problema —un método *general* para encontrar qué sucede en una frontera directamente a partir de las ecuaciones diferenciales—.

Comenzamos por escribir todas las ecuaciones de Maxwell para un dieléctrico —y esta vez somos muy específicos y escribimos explícitamente todas las componentes—:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P}}{\epsilon_0}$$

$$\epsilon_0\left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right) \tag{33.21}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \tag{33.22a}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \tag{33.22b}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \tag{33.22c}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \tag{33.23}$$

$$c^2 \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

$$c^2\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial P_x}{\partial t} + \frac{\partial E_x}{\partial t} \tag{33.24a}$$

$$c^2\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial P_y}{\partial t} + \frac{\partial E_y}{\partial t} \tag{33.24b}$$

$$c^2\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial P_z}{\partial t} + \frac{\partial E_z}{\partial t} \tag{33.24c}$$

Ahora bien, estas ecuaciones deben cumplirse en la región 1 (a la izquierda de la frontera) y en la región 2 (a la derecha de la frontera). Ya escribimos las soluciones de las regiones 1 y 2. Finalmente, se deben satisfacer también *en* la frontera que podemos llamar región 3. Aunque usualmente se piensa que la frontera es discontinua, en realidad no lo es. Las propiedades físicas cambian muy rápidamente pero no infinitamente rápido. En todo caso podemos imaginar que hay una transición muy rápida del índice de refracción entre las regiones 1 y 2, pero *continua*, en una pequeña distancia que podemos llamar región 3. Además, cualquier magnitud del campo, por ejemplo P_x o E_y, etc., sufrirá una transición similar en la región 3. En esta región, las ecuaciones diferenciales deben continuar siendo satisfechas y es siguiendo las ecuaciones diferenciales en esta región que podemos llegar a las "condiciones de frontera" necesarias.

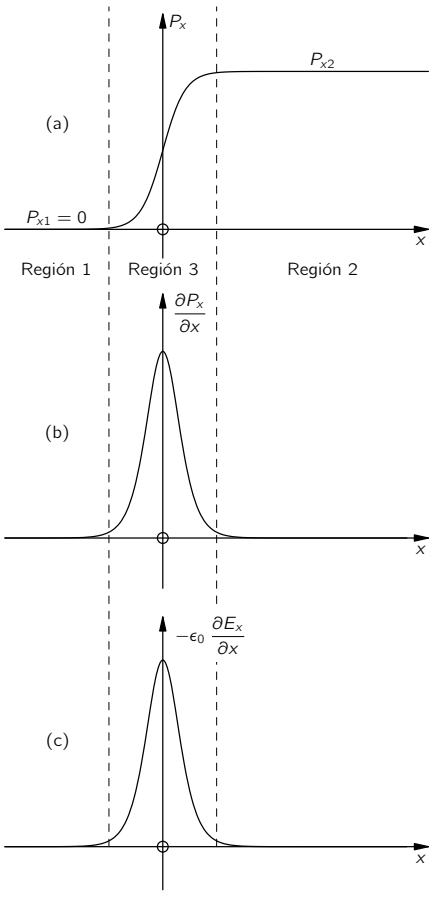


Figura 33-5. Campos en la región de transición 3 entre dos regiones de materiales diferentes 1 y 2.

Por ejemplo supongan que tenemos una frontera entre el vacío (región 1) y vidrio (región 2). En el vacío no hay nada que se polarice, así que $\boldsymbol{P}_1 = 0$. Digamos que en el vidrio hay una cierta polarización $\boldsymbol{P}_2$. Entre el vacío y el vidrio hay una transición continua pero rápida. Si consideramos cualquier componente de $\boldsymbol{P}$, digamos la P_x, podrá variar como se muestra en la figura 33-5(a). Supongan ahora que tomamos la primera de nuestras ecuaciones, la ecuación (33.21). Incluye derivadas de las componentes de $\boldsymbol{P}$ respecto a x, y y z. Las derivadas en y y z no son interesantes; nada espectacular sucede en esas direcciones. Pero la derivada respecto a x de P_x tendrá un valor muy grande en la región 3, debido a la tremenda pendiente de P_x. La derivada $\partial P_x/\partial x$ tendrá un pico agudo en la frontera, como se muestra en la figura 33-5(b). Si imaginamos prensar la frontera haciendo una capa aún más delgada, el pico será ahora mucho más alto. Si la frontera es realmente aguda para las ondas en que estamos interesados, la magnitud de $\partial P_x/\partial x$ en la región 3 deberá ser muchísimo más grande que cualquier contribución que pueda provenir de la variación de $\boldsymbol{P}$ en la onda de fuera de la frontera —de manera que ignoramos cualquier otra variación que no se deba a la frontera—.

Además, ¿cómo se puede satisfacer la ecuación (33.21) si hay un pico enormemente grande en el segundo miembro? Solamente si hay un pico igualmente colosal en el otro miembro. Algo debe ser grande en el primer miembro. El único candidato es $\partial E_x/\partial x$, porque las variaciones con y y z tienen en la onda solamente aquellos efectos pequeños que ya hemos mencionado. Así, $-\epsilon_0(\partial E/\partial x)$ debe ser como se la ha dibujado en la figura 33-5(c) —simplemente una copia de $\partial P_x/\partial x$—. Tenemos que

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} = -\frac{\partial P_x}{\partial x}.$$

Si integramos esta ecuación respecto a x en la región 3, concluimos que

$$\epsilon_0(E_{x2} - E_{x1}) = -(P_{x2} - P_{x1}). \tag{33.25}$$

En otras palabras, el salto de $\epsilon_0 E_x$ pasando de la región 1 a la 2 debe ser igual al salto de $-P_x$.

Podemos rescribir la ecuación (33.25) en la forma

$$\epsilon_0 E_{x2} + P_{x2} = \epsilon_0 E_{x1} + P_{x1}, \tag{33.26}$$

la cual indica que la cantidad $(\epsilon_0 E_x + P_x)$ tiene igual valor en la región 2 y en la 1. La gente dice: la cantidad $(\epsilon_0 E_x + P_x)$ es *continua* en la frontera. Tenemos, de esta forma, una de nuestras condiciones de frontera.

Aunque tomamos como ilustración el caso en que $\boldsymbol{P}_1$ es cero porque la región 1 es el vacío, es claro que el mismo razonamiento se aplica a dos materiales cualesquiera en las dos regiones, y entonces la ecuación (33.26) es válida en general.

Pasemos ahora a las ecuaciones restantes de Maxwell y veamos qué nos dice cada una de ellas. Tomemos la siguiente ecuación (33.22a). No hay derivadas respecto a x, de manera que no nos dice nada. (Recuerden que los campos *mismos* no son especialmente grandes sobre la frontera; solamente las derivadas respecto a x pueden ser enormes como para dominar la ecuación.) Luego examinamos la ecuación (33.22b). ¡Ah! ¡Hay una derivada respecto a x! Tenemos $\partial E_z/\partial x$ en el primer miembro. Supongan que se trata de una derivada enorme. Pero ¡un momento! No hay nada en el segundo miembro que pueda acompañarla; por lo tanto, E_z *no puede* tener ningún salto al ir de la región 1 a la 2. [Si así fuera, debería haber un pico en el primer miembro de la ecuación (33.22b) pero no en el primero, y la ecuación sería falsa.] Así, tenemos una nueva condición:

$$E_{z2} = E_{z1}. \tag{33.27}$$

Con el mismo razonamiento, la ecuación (33.22c) da

$$E_{y2} = E_{y1}. \tag{33.28}$$

Este último resultado es precisamente lo que teníamos en la ecuación (33.20) por un razonamiento basado en una integral de línea.

Vayamos a la ecuación (33.23). El único término que puede tener una punta es $\partial B_x/\partial x$. Pero no hay nada en el primer miembro que lo acompañe, por lo que concluimos que

$$B_{x2} = B_{x1}. \tag{33.29}$$

¡Adelante con la última ecuación de Maxwell! La ecuación (33.24a) no nos da nada porque no tiene derivadas respecto a x. La ecuación (33.24b) tiene solamente $-c^2\partial B_z/\partial x$, pero nuevamente, no hay nada que lo acompañe. Tenemos

$$B_{z2} = B_{z1}. \tag{33.30}$$

La última ecuación es similar y da

$$B_{y2} = B_{y1}. \tag{33.31}$$

Las últimas tres ecuaciones dicen que $\boldsymbol{B_2} = \boldsymbol{B_1}$. Debemos hacer notar, sin embargo, que obtenemos este resultado solamente cuando los materiales en ambos lados del contorno no son magnéticos —o más bien, cuando podemos despreciar cualquier efecto magnético de los materiales—. Esto sucede comúnmente para la mayoría de los materiales, excepto para los ferromagnéticos. (Trataremos las propiedades magnéticas de los materiales en capítulos posteriores.)

Nuestro programa nos ha puesto en posesión de las seis relaciones entre los campos en la región 1 y en la 2. Las hemos colocado todas juntas en la tabla 33-1. Las podemos usar ahora para obtener las ondas en las dos regiones. Debemos hacer notar, sin embargo, que la idea que hemos utilizado puede usarse para *cualquier* situación física en la que tengan ecuaciones diferenciales y quieran obtener una solución que atraviesa la frontera, en la cual hay una variación abrupta de cierta propiedad. Para lo que nos interesa, podríamos haber

Tabla 33-1

Condiciones de frontera en la superficie de un dieléctrico

$$(\epsilon_0 \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{P}_1)_x = (\epsilon_0 \boldsymbol{E}_2 + \boldsymbol{P}_2)_x$$
$$(\boldsymbol{E}_1)_y = (\boldsymbol{E}_2)_y$$
$$(\boldsymbol{E}_1)_z = (\boldsymbol{E}_2)_z$$
$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_2$$

(La superficie está en el plano yz)

deducido fácilmente las mismas ecuaciones utilizando razonamientos sobre flujos y circulaciones en la frontera. (Podrían ver si son capaces de obtener los mismos resultados por esta vía.) Pero han visto ahora un método que puede servir en caso de que se encuentren en dificultades y no vean ningún razonamiento físico fácil que les diga lo que sucede en la frontera —pueden simplemente trabajar con las ecuaciones—.

33-4 Ondas reflejadas y transmitidas

Estamos ya listos para aplicar nuestras condiciones de frontera a las ondas que escribimos en la sección 33-2. Teníamos

$$\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}, \tag{33.32}$$

$$\boldsymbol{E}_r = \boldsymbol{E}'_0 e^{i(\omega' t - k'_x x - k'_y y)}, \tag{33.33}$$

$$\boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{E}''_0 e^{i(\omega'' t - k''_x x - k''_y y)}, \tag{33.34}$$

$$\boldsymbol{B}_i = \frac{\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_i}{\omega}, \tag{33.35}$$

$$\boldsymbol{B}_r = \frac{\boldsymbol{k}' \times \boldsymbol{E}_r}{\omega'}, \tag{33.36}$$

$$\boldsymbol{B}_t = \frac{\boldsymbol{k}'' \times \boldsymbol{E}_t}{\omega''}. \tag{33.37}$$

Sabemos un poco más: $\boldsymbol{E}$ es perpendicular a su vector de propagación $\boldsymbol{k}$ para cada onda.

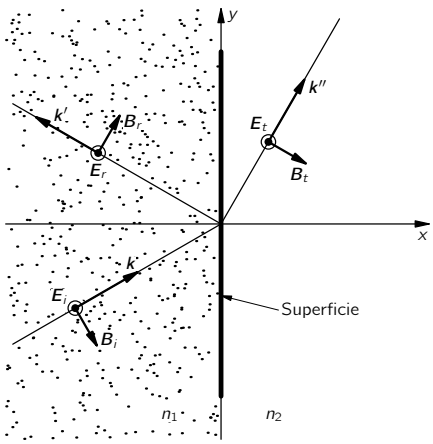


Figura 33-6. Polarización de las ondas reflejadas y transmitidas cuando el campo $\boldsymbol{E}$ de la onda incidente es perpendicular al plano de incidencia.

Los resultados dependerán de la dirección del vector $\boldsymbol{E}$ (la "polarización") de la onda que llega. El análisis es mucho más simple si tratamos separadamente el caso de una onda incidente con su vector $\boldsymbol{E}$ *paralelo* al "plano de incidencia" (que es el plano xy) y el caso de una onda incidente con el vector $\boldsymbol{E}$ *perpendicular* al plano de incidencia. Una onda con cualquier otra polarización es simplemente una combinación lineal de tales ondas. En otras palabras, las intensidades reflejada y transmitida son diferentes para distintas polarizaciones, y lo más fácil es elegir los dos casos más simples y tratarlos separadamente.

Haremos el análisis de una onda polarizada que llega perpendicular al plano de incidencia y luego simplemente se les dará el resultado para la otra. Estamos engañando un poco al tomar el caso más simple, pero el principio es el mismo para ambas. Así, tomamos $\boldsymbol{E}_i$ de modo que tenga solamente la componente z, y puesto que todos los vectores $\boldsymbol{E}$ tienen la misma dirección podemos dejar de lado el signo del vector.

Mientras ambos materiales sean isotrópicos, las oscilaciones inducidas sobre las cargas del material estarán también en la dirección z, y el campo $\boldsymbol{E}$ de las ondas transmitidas y radiadas tendrán solamente componentes z. Así, para todas las ondas, E_x y E_y y P_x y P_y son cero. Las ondas tendrán sus vectores $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{B}$ como se dibuja en la figura 33-6. (Estamos tomando aquí un atajo respecto a nuestro plan original de obtener todo de las ecuaciones. Este resultado se podría obtener también de las condiciones de frontera, pero podemos acortar un poco el trabajo algebraico utilizando razonamientos físicos. Cuando tengan un poco de tiempo traten de obtener el mismo resultado a partir de las ecuaciones. Es claro que lo que hemos dicho está de acuerdo con las ecuaciones; es simplemente que no hemos demostrado que no hay *otras* posibilidades.)

Ahora bien, nuestras condiciones de frontera, las ecuaciones (33.26) a (33.31), nos dan relaciones entre las componentes de $\boldsymbol{E}$ y de $\boldsymbol{B}$ en las regiones 1 y 2. Para la región 2 tenemos solamente la onda transmitida, pero en la región 1 tenemos *dos* ondas. ¿Cuál usaremos? Los campos en la región 1 son, por supuesto, la superposición de los campos de las ondas incidente y reflejada. (Y puesto que

cada una satisface las ecuaciones de Maxwell, deberá también hacerlo la suma.) Así, al usar las condiciones de frontera, debemos escribir

$$\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E}_i + \boldsymbol{E}_r, \qquad \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{E}_t,$$

y en forma similar para los $\boldsymbol{B}$.

Para la polarización que estamos considerando, las ecuaciones (33.26) y (33.28) no nos dan nueva información; solamente la ecuación (33.27) es útil. Dice que

$$E_i + E_r = E_t,$$

sobre la frontera, es decir, para $x = 0$. Así, tenemos que

$$E_0 e^{i(\omega t - k_y y)} + E_0' e^{i(\omega' t - k_y' y)} = E_0'' e^{i(\omega'' t - k_y'' y)}, \tag{33.38}$$

que debe ser cierta para *todo* t y para *todo* y. Supongan que consideramos primero $y = 0$. Tenemos entonces

$$E_0 e^{i\omega t} + E_0' e^{i\omega' t} = E_0'' e^{i\omega'' t}.$$

Así, esta ecuación dice que dos términos oscilantes son iguales a una tercera oscilación. Esto puede suceder solamente si todas las oscilaciones tienen la misma frecuencia. (Es imposible para tres —o cualquier otro número— términos de este tipo con frecuencias diferentes obtener una suma que sea nula para cualquier instante.) De esta manera,

$$\omega'' = \omega' = \omega. \tag{33.39}$$

Como ya lo sabíamos, las frecuencias de las ondas reflejada y transmitida son iguales a la de la onda incidente.

Se podría en realidad haber evitado algunos inconvenientes introduciendo esto al principio, pero queríamos demostrarles que se puede obtener también de las ecuaciones. Al resolver un problema real, generalmente lo mejor es introducir todo lo que conocen desde el principio a fin de evitarse muchos problemas.

Por definición, el *módulo* de $\boldsymbol{k}$ está dado por $k^2 = n^2\omega^2/c^2$, por lo que tenemos además que

$$\frac{k''^2}{n_2^2} = \frac{k'^2}{n_1^2} = \frac{k^2}{n_1^2}. \tag{33.40}$$

Consideremos ahora la ecuación (33.38) para $t = 0$. Utilizando nuevamente la misma clase de razonamientos que acabamos de aplicar, pero esta vez basados en el hecho de que la ecuación debe ser válida para todo valor de y, tenemos que

$$k_y'' = k_y' = k_y. \tag{33.41}$$

Según la ecuación (33.40), $k'^2 = k^2$, así que

$$k_x'^2 + k_y'^2 = k_x^2 + k_y^2.$$

Combinando esta ecuación con la ecuación (33.41) tenemos que

$$k_x'^2 = k_x^2,$$

o sea que $k_x' = \pm k_x$. El signo positivo no tiene sentido; no daría una onda *reflejada*, sino una onda *incidente*, y dijimos al principio que estábamos resolviendo el problema para una sola onda incidente. Así tenemos

$$k_x' = -k_x. \tag{33.42}$$

Las dos ecuaciones (33.41) y (33.42) nos dicen que el ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia, como era de esperar. (Véase figura 33-3.) La onda reflejada es

$$E_r = E_0' e^{i(\omega t + k_x x - k_y y)}. \tag{33.43}$$

Para la onda transmitida ya hemos encontrado que

$$k''_y = k_y,$$

y

$$\frac{k''^2}{n_2^2} = \frac{k^2}{n_1^2}; \tag{33.44}$$

y podemos resolver estas ecuaciones para encontrar k''_x . Obtenemos

$$k''^2_x = k''^2 - k''^2_y = \frac{n_2^2}{n_1^2}\,k^2 - k_y^2. \tag{33.45}$$

Supongamos por un momento que n_1 y n_2 sean números reales (que la parte imaginaria de los índices es muy pequeña). Entonces todos los k son números reales y a partir de la figura 33-3 encontramos que

$$\frac{k_y}{k} = \operatorname{sen}\theta_i, \qquad \frac{k''_y}{k''} = \operatorname{sen}\theta_t. \tag{33.46}$$

De la ecuación (33.44) obtenemos que

$$n_2 \operatorname{sen}\theta_t = n_1 \operatorname{sen}\theta_i, \tag{33.47}$$

que es la ley de Snell para la refracción —nuevamente algo que ya conocíamos—. Si los índices no son reales, los números de onda son complejos y debemos usar la ecuación (33.45). [Todavía podríamos *definir* los ángulos θ_i y θ_t por medio de la ecuación (33.46) y la ley de Snell, ecuación (33.47), sería válida en general. Pero entonces los "ángulos" también serán números complejos, perdiendo así su interpretación geométrica simple de ángulos. Es mejor entonces describir el comportamiento de las ondas por medio de los valores complejos de k_x o k''_x.]

Hasta ahora no hemos encontrado nada nuevo. Hemos tenido simplemente el ingenuo placer de obtener algunos resultados obvios a partir de un complicado mecanismo matemático. Ahora estamos listos para encontrar las amplitudes de las ondas que aún no conocemos. Usando nuestros resultados para las ω y los k, los factores exponenciales de la ecuación (33.38) se pueden cancelar, y obtenemos

$$E_0 + E'_0 = E''_0. \tag{33.48}$$

Como E'_0 y E''_0 son desconocidos necesitamos una relación más. Podemos utilizar otra de las condiciones de frontera. Las ecuaciones para E_x y E_y no nos ayudan, debido a que todas las $\boldsymbol{E}$ tienen solamente componentes z. Debemos, por lo tanto, utilizar la condición para $\boldsymbol{B}$. Probemos con la ecuación (33.29):

$$B_{x2} = B_{x1}.$$

De las ecuaciones (33.35) a (33.37) obtenemos

$$B_{xi} = \frac{k_y E_i}{\omega}, \qquad B_{xr} = \frac{k'_y E_r}{\omega'}, \qquad B_{xt} = \frac{k''_y E_t}{\omega''}.$$

Recordando que $\omega'' = \omega' = \omega$ y $k''_y = k'_y = k_y$ obtenemos que

$$E_0 + E'_0 = E''_0.$$

¡Pero ésta es precisamente la ecuación (33.48) de nuevo! Simplemente hemos perdido el tiempo para obtener algo que ya conocíamos.

Podemos probar con la ecuación (33.30), que $B_{z2} = B_{z1}$, pero ¡no hay componentes z de $\boldsymbol{B}$! Así, nos queda solamente una ecuación: la ecuación (33.31), o sea que $B_{y2} = B_{y1}$. Para las tres ondas tenemos:

$$B_{yi} = -\frac{k_x E_i}{\omega}, \qquad B_{yr} = -\frac{k'_x E_r}{\omega'}, \qquad B_{yt} = -\frac{k''_x E_t}{\omega''}. \tag{33.49}$$

Poniendo para E_i, E_r y E_t la expresión de la onda para $x = 0$ (por estar sobre la frontera), la condición de frontera es

$$\frac{k_x}{\omega}\,E_0 e^{i(\omega t - k_y y)} + \frac{k'_x}{\omega'}\,E'_0 e^{i(\omega' t - k'_y y)} = \frac{k''_x}{\omega''}\,E''_0 e^{i(\omega'' t - k''_y y)}.$$

Nuevamente todas las ω y k_y son iguales, por lo que esto se reduce a

$$k_x E_0 + k'_x E'_0 = k''_x E''_0. \tag{33.50}$$

Esto da una ecuación para los E que es diferente a la de la ecuación (33.48). Con las dos podemos despejar E'_0 y E''_0. Recordando que $k'_x = -k_x$, obtenemos

$$E'_0 = \frac{k_x - k''_x}{k_x + k''_x}\,E_0, \tag{33.51}$$

$$E''_0 = \frac{2k_x}{k_x + k''_x}\,E_0. \tag{33.52}$$

Estas ecuaciones, junto con la ecuación (33.45) o la ecuación (33.46) para k''_x dan lo que queríamos saber. Discutiremos las consecuencias de este resultado en la próxima sección.

Si partimos con una onda polarizada con su vector $\boldsymbol{E}$ *paralelo* al plano de incidencia, $\boldsymbol{E}$ tendrá tanto componente x como y, como se indica en la figura 33-7. El trabajo algebraico es directo pero más complicado. (El trabajo se puede reducir un poco expresando las cosas para este caso en términos de campos *magnéticos*, que están todos en la dirección z.) Se encuentra que

$$|E'_0| = \frac{n_2^2 k_x - n_1^2 k''_x}{n_2^2 k_x + n_1^2 k''_x}\,|E_0| \tag{33.53}$$

y

$$|E''_0| = \frac{2n_1 n_2 k_x}{n_2^2 k_x + n_1^2 k''_x}\,|E_0|. \tag{33.54}$$

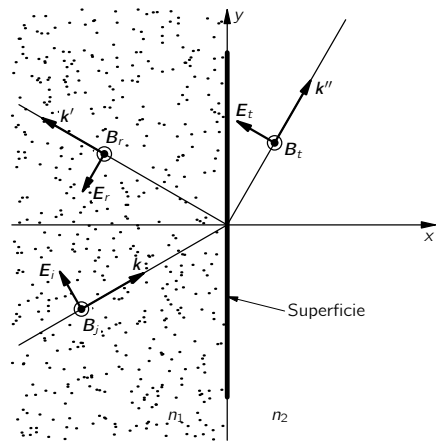


Figura 33-7. Polarización de las ondas cuando el campo $\boldsymbol{E}$ de la onda incidente es paralelo al plano de incidencia.

Veamos si nuestros resultados están de acuerdo con lo que obtuvimos anteriormente. La ecuación (33.3) es el resultado que hallamos en el capítulo 33 del volumen I para la relación entre la intensidad de la onda reflejada y la incidente. En ese momento, sin embargo, considerábamos solamente índices *reales*. Para índices reales (y k reales), podemos escribir

$$k_x = k\cos\theta_i = \frac{\omega n_1}{c}\cos\theta_i,$$

$$k''_x = k''\cos\theta_t = \frac{\omega n_2}{c}\cos\theta_t.$$

Sustituyendo en la ecuación (33.51) tenemos

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}, \tag{33.55}$$

que no parece ser lo mismo que la ecuación (33.3). Se ve que lo es, no obstante, si usamos la ley de Snell para deshacernos de los n. Tomando $n_2 = n_1\,\mathrm{sen}\,\theta_i/\,\mathrm{sen}\,\theta_t$ y multiplicando el numerador y el denominador por $\mathrm{sen}\,\theta_t$ obtenemos

$$\frac{E'_0}{E_0} = \frac{\cos\theta_i\,\mathrm{sen}\,\theta_t - \mathrm{sen}\,\theta_i\cos\theta_t}{\cos\theta_i\,\mathrm{sen}\,\theta_t + \mathrm{sen}\,\theta_i\cos\theta_t}.$$

El numerador y el denominador son precisamente los senos de $-(\theta_i - \theta_t)$ y $(\theta_i + \theta_t)$; obtenemos

$$\frac{E'_0}{E_0} = -\frac{\mathrm{sen}(\theta_i - \theta_t)}{\mathrm{sen}(\theta_i + \theta_t)}. \tag{33.56}$$

Puesto que E'_0 y E_0 están en el mismo material, las intensidades son proporcionales a los cuadrados de los campos eléctricos, y obtenemos el mismo resultado que antes. Análogamente, la ecuación (33.53) es la misma que la ecuación (33.4).

Para ondas que llegan con incidencia normal $\theta_i = 0$ y $\theta_t = 0$. Así, la ecuación (33.56) da $0/0$ lo cual no es muy útil. Pero podemos volver a la ecuación (33.55) que da

$$\frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{E_0'}{E_0}\right)^2 = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2. \tag{33.57}$$

Este resultado se aplica naturalmente a "cualquier" polarización ya que para incidencia normal no hay un "plano de incidencia" especial.

33-5 Reflexión en metales

Podemos ahora usar nuestros resultados para comprender el interesante fenómeno de la reflexión en los metales. ¿Por qué son brillantes los metales? Vimos en el último capítulo que los metales tienen un índice de refracción que, para ciertas frecuencias, tiene una parte imaginaria grande. Veamos qué podemos obtener para la intensidad reflejada cuando la luz proveniente del aire (con $n = 1$) cae sobre un material con $n = -in_I$. Entonces la ecuación (33.55) da (para incidencia normal)

$$\frac{E_0'}{E_0} = \frac{1 + in_I}{1 - in_I}.$$

Para la *intensidad* de la onda reflejada, necesitamos el cuadrado de los valores absolutos de E_0' y E_0:

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{|E_0'|^2}{|E_0|^2} = \frac{|1 + in_I|^2}{|1 - in_I|^2}, \tag{33.58}$$

o

$$\frac{I_r}{I_i} = \frac{1 + n_I^2}{1 + n_I^2} = 1. \tag{33.59}$$

¡Para un material con un índice que sea un número imaginario puro se tiene 100 % de reflexión!

Los metales no reflejan 100 %, pero muchos reflejan muy bien la luz visible. En otras palabras, la parte imaginaria de sus índices es muy grande. Pero habíamos visto que una parte imaginaria grande para el índice significa una gran absorción. Así, es una regla general que si un material *cualquiera* es un absorbente *muy* bueno a una cierta frecuencia, las ondas son reflejadas fuertemente por la superficie y muy pocos penetran en el absorbente. Pueden ver este efecto con colorantes intensos. Los cristales puros de los colorantes más intensos tienen un brillo "metálico". Probablemente han observado que en el borde de una botella de tinta violeta, el colorante seco da una reflexión metálica dorada, o que la tinta roja seca a veces da un reflejo metálico verdoso. La tinta roja absorbe el verde de la luz *transmitida*, así que si la tinta es muy concentrada, presentará una fuerte *reflexión* en la superficie para las frecuencias de la luz verde.

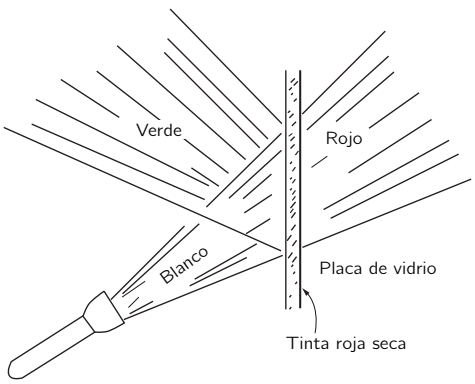


Figura 33-8. Un material que absorbe fuertemente la luz a la frecuencia ω refleja también la luz a esa frecuencia.

Pueden mostrar fácilmente este efecto cubriendo una placa de vidrio con tinta roja y dejándola secar. Si hacen incidir un haz de luz blanca sobre la parte de atrás de la placa, como se muestra en la figura 33-8 verán un haz de luz roja transmitido y un haz verde reflejado.

33-6 Reflexión interna total

Si la luz va desde un material como el vidrio, con un índice real n mayor que 1, hacia, digamos, el aire con un índice n_2 igual a 1, la ley de Snell dice que

$$\operatorname{sen}\theta_t = n \operatorname{sen}\theta_i.$$

El ángulo θ_t de la onda transmitida es de 90° cuando el ángulo de incidencia θ_i es igual al "ángulo crítico" θ_c dado por

$$n \operatorname{sen}\theta_c = 1. \tag{33.60}$$

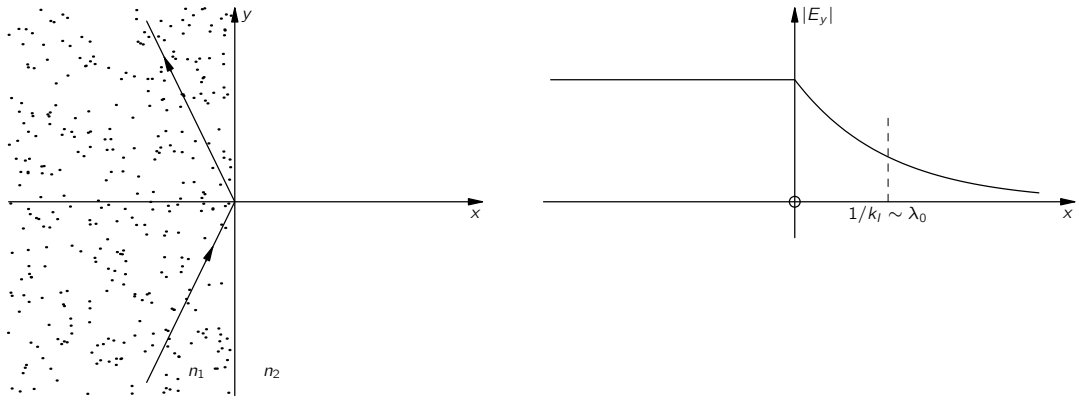


Figura 33-9. Reflexión interna total.

¿Qué sucede para θ_i mayores que el ángulo crítico? Saben que hay reflexión interna. Pero ¿cómo sucede?

Regresemos a la ecuación (33.45) que da el número de onda k_x'' para la onda transmitida. Tendremos

$$k_x''^2 = \frac{k^2}{n^2} - k_y^2.$$

Ahora bien, $k_y = k \operatorname{sen}\theta_i$ y $k = \omega n/c$, así que

$$k_x''^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,(1 - n^2 \operatorname{sen}^2\theta_i).$$

Si $n \operatorname{sen}\theta_i$ es mayor que uno, $k_x''^2$ es *negativo* y k_x'' es imaginario puro, digamos que $\pm ik_I$. ¡Ahora saben lo que esto significa! La onda "transmitida", ecuación (33.34) tendrá la forma

$$\boldsymbol{E}_t = \boldsymbol{E}_0'' e^{\pm k_I x} e^{i(\omega t - k_y y)}.$$

La amplitud de la onda o crece o decae exponencialmente cuando crece x. Evidentemente lo que necesitamos aquí es el signo negativo. Entonces la *amplitud* de la onda a la derecha de la frontera será como muestra la figura 33-9. Noten que k_I es ω/c —que es de orden $1/\lambda_0$, el recíproco de la longitud de onda de la luz en el espacio vacío—. Cuando la luz se refleja totalmente en la parte interna de una superficie vidrio aire, hay campos en el aire, pero se extienden más allá de la superficie sólo hasta una distancia del orden de la longitud de onda de la luz.

Veamos ahora cómo se resuelve el siguiente problema: si una onda luminosa propagándose en vidrio llega a la superficie con un ángulo suficientemente grande y se refleja; si otro pedazo de vidrio se pone en la superficie (de manera que la "superficie" efectivamente desaparece) la luz es transmitida. ¿Cuándo sucede exactamente esto? ¡Seguramente debe existir un cambio continuo de la reflexión total a la no reflexión! La respuesta, por supuesto, es que si la capa de aire intermedia es tan pequeña que la cola exponencial de la onda en el aire tenga una intensidad apreciable en el segundo trozo de vidrio, podrá sacudir los electrones de esa zona y generar una nueva onda, como se muestra en la figura 33-10. Así, algo de luz se transmitirá. (Evidentemente nuestra solución es incompleta; debemos resolver todas las ecuaciones nuevamente para una delgada capa de aire entre las dos regiones de vidrio.)

Este efecto de transmisión puede ser observado con la luz ordinaria solamente si la capa de aire intermedia es muy pequeña (del orden de la longitud de onda de luz, digamos 10^{-5} cm), pero es demostrable fácilmente con ondas de tres centímetros. En este caso el campo exponencialmente decreciente se extiende varios centímetros. En la figura 33-11 se ha dibujado un aparato de microondas que muestra este efecto. Las ondas de tres centímetros de un transmisor pequeño

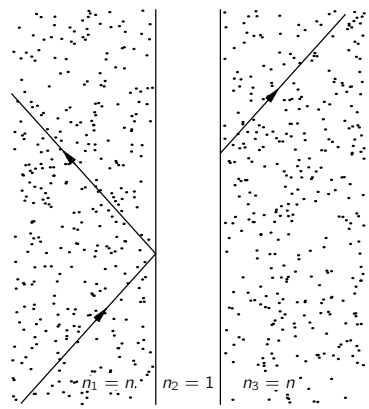


Figura 33-10. Si hay una delgada capa intermedia, la reflexión interna no es "total"; aparece una onda transmitida más allá de la capa intermedia.

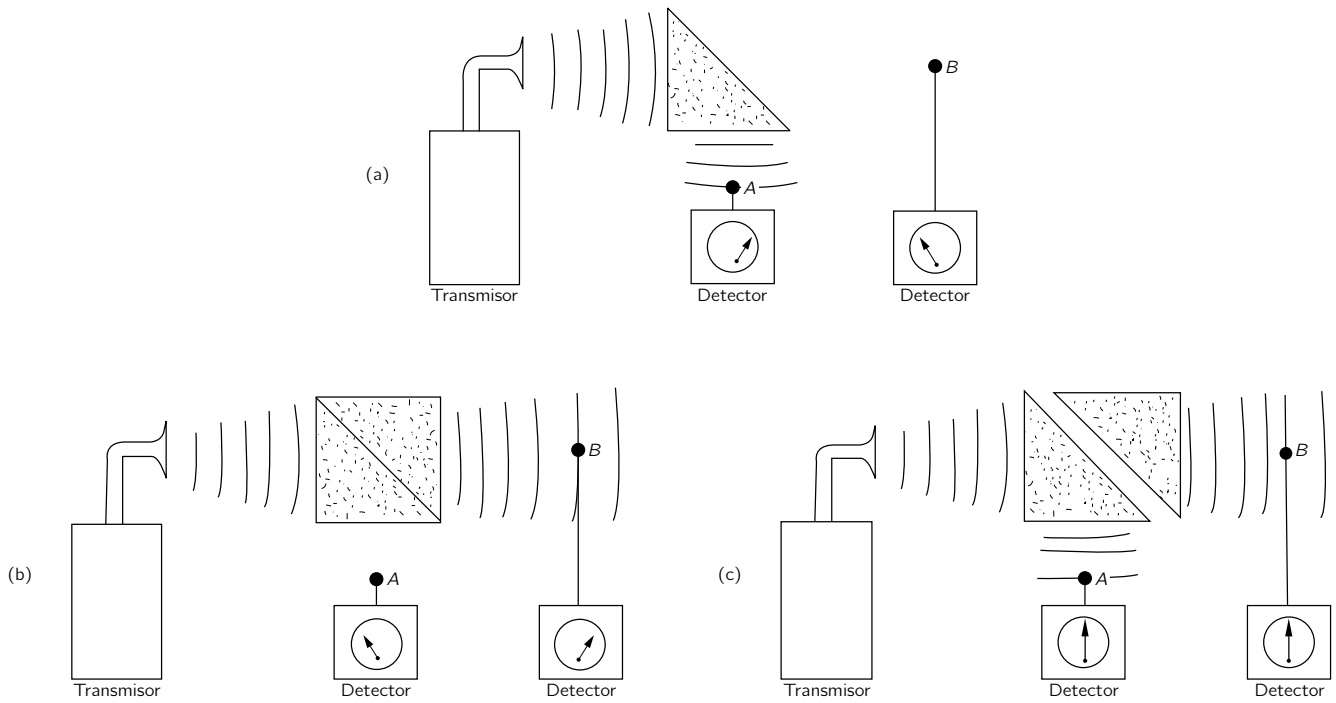


Figura 33-11. Demostración de la penetración de la onda reflejada internamente.

se transmiten directamente a un prisma de parafina de 45°. El índice de refracción de la parafina para estas frecuencias es de 1.50 y, por lo tanto, el ángulo crítico es de 41.5°. Así, la onda se refleja totalmente en la cara a 45° y es recibida por el detector A, como se indica en la figura 33-11(a). Si un segundo prisma de parafina se pone en contacto con el primero, como muestra la parte (b) de la figura, la onda lo atraviesa directamente y es recibida por el detector B. Si se deja un espacio de pocos centímetros entre los dos prismas, como en la parte (c) de la figura, hay tanto onda transmitida como reflejada. El campo eléctrico en el exterior de la cara a 45° del prisma en la figura 33-11(a) se puede igualmente poner de manifiesto llevando el detector B a pocos centímetros de la superficie.

34

Magnetismo de la materia

34-1 Diamagnetismo y paramagnetismo
34-2 Momentos magnéticos y momentum angular
34-3 Precesión de los imanes atómicos
34-4 Diamagnetismo
34-5 Teorema de Larmor
34-6 La física clásica no da ni diamagnetismo ni paramagnetismo
34-7 Momentum angular en la mecánica cuántica
34-8 Energía magnética de los átomos

34-1 Diamagnetismo y paramagnetismo

En este capítulo vamos a hablar de las propiedades magnéticas de los materiales. El material que tiene las propiedades magnéticas más sorprendentes es, por supuesto, el hierro. Los elementos níquel, cobalto y —a temperaturas suficientemente bajas (por debajo de 16°C)— gadolinio, así como cierta cantidad de aleaciones especiales, tienen propiedades magnéticas similares. Esa clase de magnetismo, llamada *ferromagnetismo*, que es tan sorprendente y complicado, lo estudiaremos en un capítulo especial. Sin embargo, todas las sustancias ordinarias muestran algunos efectos magnéticos, aunque muy pequeños —mil a un millón de veces menores que los efectos de los materiales ferromagnéticos—. Aquí vamos a describir el magnetismo común, es decir, el magnetismo de las sustancias que no son ferromagnéticas.

Este pequeño magnetismo es de dos clases. Algunos materiales son *atraídos* hacia campos magnéticos; otros son *repelidos*. Contrariamente al efecto eléctrico en la materia, que siempre hace que los dieléctricos sean atraídos, el efecto magnético tiene dos signos. Es posible mostrar estos dos signos con ayuda de un electroimán intenso que tiene una pieza polar muy afilada y una pieza polar chata, como se ha dibujado en la figura 34-1. El campo magnético es mucho más intenso cerca del polo en punta que cerca del polo chato. Si se ata un pequeño trozo de material a un hilo largo y se suspende entre los polos, habrá en general una pequeña fuerza sobre él. Se puede ver esta pequeña fuerza por el ligero desplazamiento del material colgado cuando se enciende el imán. Los pocos materiales ferromagnéticos son atraídos muy fuertemente hacia el polo en punta; todos los otros materiales experimentan una fuerza muy débil. Algunos son atraídos débilmente hacia el polo en punta; otros son repelidos débilmente.

Revisar
Volumen II, sección 15-1, "Las fuerzas sobre un lazo de corriente; energía de un dipolo"

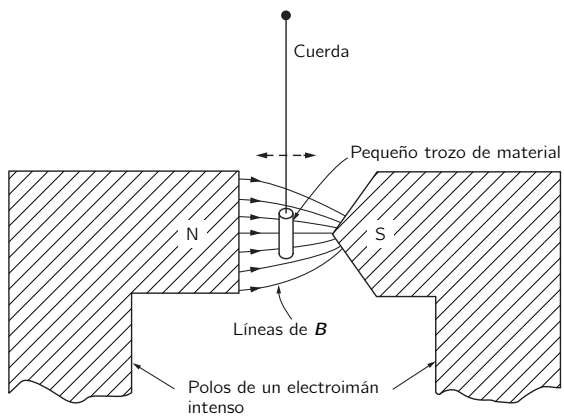


Figura 34-1. El polo en punta repele débilmente un pequeño cilindro de bismuto y atrae un trozo de aluminio.

La manera más fácil de ver el efecto es con un cilindro pequeño de bismuto, que es *repelido* de la región de campo intenso. Las sustancias repelidas de este modo se llaman *diamagnetismo*. El bismuto es uno de los materiales diamagnéticos más intensos, pero aun así el efecto es bastante débil. El diamagnetismo siempre es muy débil. Si se suspende un pedazo pequeño de aluminio entre los polos, también hay una fuerza débil, pero *hacia* el polo en punta. Las sustancias como el aluminio se llaman *paramagnetismo*. (En un experimento como éste aparecen

fuerzas debidas a corrientes de Foucault cuando se enciende y se apaga el imán, las cuales pueden dar lugar a impulsos fuertes. Deben tener cuidado de determinar el desplazamiento neto después que el objeto colgado se queda quieto.)

Ahora queremos describir brevemente los mecanismos de estos dos efectos. Primero, en muchas sustancias los átomos no tienen momento magnético permanente, o más bien, todos los imanes que hay dentro de cada átomo se compensan de modo que el momento *neto* del átomo es cero. Los espines y los movimientos orbitales electrónicos se compensan exactamente, de modo que cualquier átomo particular no tiene momento magnético medio. En estas circunstancias, cuando aplican un campo magnético se generan por inducción pequeñas corrientes adicionales dentro del átomo. Según la ley de Lenz, el sentido de estas corrientes es tal que se oponen al aumento del campo. Así, los momentos magnéticos inducidos de los átomos están en dirección *opuesta* al campo magnético. Éste es el mecanismo del diamagnetismo.

Luego hay algunas sustancias cuyos átomos sí tienen un momento magnético permanente —átomos en los cuales las órbitas y los espines electrónicos tienen una corriente neta no nula—. Así, además del efecto diamagnético (que siempre está presente), está la posibilidad de alinear los momentos magnéticos atómicos. En este caso, los momentos tratan de alinearse *con* el campo magnético (como los dipolos permanentes de un dieléctrico se alinean con el campo eléctrico), y el magnetismo inducido tiende a aumentar el campo magnético. Éstas son las sustancias paramagnéticas. Generalmente el paramagnetismo es bastante débil porque las fuerzas de alineamiento son relativamente bajas frente a las fuerzas provenientes de los movimientos térmicos que tienden a destruir el orden. Es por eso también que el paramagnetismo es normalmente sensible a la temperatura. (El paramagnetismo que proviene de los espines de los electrones responsables de la conducción en un metal constituye la excepción. No estudiaremos este fenómeno aquí.) En el paramagnetismo ordinario, cuanto menor es la temperatura mayor es el efecto. Hay más alineamientos a temperaturas bajas cuando los efectos de desordenamiento debido a las colisiones son menores. Por el contrario, el diamagnetismo es más o menos independiente de la temperatura. En cualquier sustancia con momentos magnéticos intrínsecos hay tanto un efecto diamagnético como uno paramagnético, pero domina comúnmente este último.

En el capítulo 11 describimos un material *ferroeléctrico* en el que todos los dipolos eléctricos se alineaban debido a sus propios campos eléctricos mutuos. También es posible imaginar el análogo magnético de la ferroelectricidad, en el cual todos los momentos se alinearían y se acoplarían. Si hacen cálculos sobre cómo ocurriría esto, encontrarán que como las fuerzas magnéticas son mucho más pequeñas que las eléctricas, los movimientos térmicos destruirán este alineamiento aun a temperaturas tan bajas como unas décimas de grado Kelvin. Así, sería imposible a la temperatura ambiente tener un alineamiento permanente de los imanes.

Por otra parte, esto es exactamente lo que ocurre en el hierro —ahí sí hay alineamiento—. Hay una fuerza efectiva entre los momentos magnéticos de diferentes átomos de hierro, la cual es mucho, mucho mayor que la interacción *magnética directa*. Es un efecto indirecto que sólo se puede explicar con la mecánica cuántica. Es unas 10 000 veces más fuerte que la interacción magnética directa y es lo que alinea los momentos en los materiales ferromagnéticos. Estudiamos esta interacción especial en un capítulo posterior.

Ahora que hemos tratado de darles una explicación cualitativa del diamagnetismo y del paramagnetismo, debemos corregirnos y decir honestamente que *no es posible* comprender los efectos magnéticos de los materiales desde el punto de vista de la física clásica. Estos efectos magnéticos son *fenómenos completamente cuánticos*. Sin embargo, es posible hacer ciertos razonamientos clásicos engañosos y hacerse una idea de lo que está pasando. Digámoslo así. Pueden hacer razonamientos clásicos y obtener estimaciones sobre el comportamiento del material, pero estos razonamientos no son "legales" en ningún sentido porque es absolutamente esencial hacer intervenir a la mecánica cuántica en cada uno de estos fenómenos magnéticos. No obstante, hay situaciones, como en un plasma

o región del espacio con muchos electrones libres, en las que los electrones sí obedecen las leyes de la mecánica clásica. Y en estas circunstancias tienen valor algunos teoremas del magnetismo clásico. Adicionalmente, los razonamientos clásicos tienen cierto valor por razones históricas. Las pocas primeras veces que los físicos pudieron hacerse una idea del significado y comportamiento de los materiales magnéticos, utilizaron razonamientos clásicos. Finalmente, y ya hemos dado ejemplos de esto, la mecánica clásica nos puede dar estimaciones útiles de lo que está pasando —aunque la manera realmente honesta de estudiar este tema sería aprendiendo mecánica cuántica primero para luego entender el magnetismo en términos de la mecánica cuántica—.

Por otra parte, no queremos esperar hasta que aprendamos mecánica cuántica de punta a punta para comprender algo simple como el diamagnetismo. Tendremos que descansar en la mecánica clásica en una especie de demostración a medias de lo que ocurre, teniendo en cuenta, sin embargo, que los razonamientos no son realmente correctos. Por lo tanto, hacemos una serie de teoremas sobre el magnetismo clásico, que los confundirán porque demostrarán cosas diferentes. A excepción del último, todos serán incorrectos. Aun más, todos serán incorrectos como descripción del mundo físico porque se deja fuera a la mecánica cuántica.

34-2 Momentos magnéticos y momentum angular

El primer teorema que queremos demostrar a partir de la mecánica clásica es el siguiente: si un electrón se mueve en una órbita circular (por ejemplo, dando vueltas alrededor de un núcleo bajo la influencia de una fuerza central), hay un cociente definido entre el momento magnético y el momentum angular. Llamemos $\boldsymbol{J}$ al momentum angular y $\boldsymbol{\mu}$ al momento magnético del electrón en la órbita. El módulo del momentum angular es la masa del electrón por la velocidad por el radio (véase figura 34-2). Está dirigido perpendicularmente al plano de la órbita.

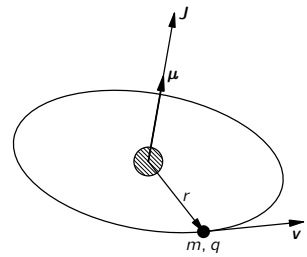


Figura 34-2. Para cualquier órbita circular el momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ es $q/2m$ por el momentum angular $\boldsymbol{J}$.

$$J = mvr. \tag{34.1}$$

(Ésta es, naturalmente, una fórmula no relativista, pero es una buena aproximación para átomos, porque para los electrones que intervienen, v/c es generalmente del orden de $e^2/\hbar c \approx 1/137$ o sea, aproximadamente 1 %.)

El momento magnético de la misma órbita es la corriente por el área. (Véase sección 14-5.) La corriente es la carga que pasa por unidad de tiempo por cualquier punto de la órbita, o sea, la carga q por la frecuencia de rotación. La frecuencia es la velocidad dividida entre la longitud de la órbita; luego,

$$I = q\,\frac{v}{2\pi r}.$$

El área es πr^2, de modo que el momento magnético es

$$\mu = \frac{qvr}{2}. \tag{34.2}$$

También es perpendicular al plano de la órbita. Por lo tanto, $\boldsymbol{J}$ y $\boldsymbol{\mu}$ están en la misma dirección

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{2m}\,\boldsymbol{J} \text{ (órbita)}. \tag{34.3}$$

Su cociente no depende ni de la velocidad ni del radio. Para cualquier partícula moviéndose en una órbita circular el momento magnético es igual a $q/2m$ por el momentum angular. En el caso del electrón la carga es negativa —la podemos llamar $-q_e$—; luego, para un electrón,

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{q_e}{2m}\,\boldsymbol{J} \text{ (órbita del electrón)}. \tag{34.4}$$

Esto es lo que se esperaría clásicamente y, lo que es más bien un milagro, también vale en la mecánica cuántica. Son cosas que pasan. Sin embargo, si continúan con la física clásica, encontrarán otras partes donde da respuestas incorrectas, y es todo juego tratar de recordar qué cosas están bien y qué cosas

son incorrectas. También podríamos darles inmediatamente lo que es válido *en general* en la mecánica cuántica. Primero, la ecuación (34.4) es válida para el *movimiento orbital*, pero no es el único magnetismo que existe. El electrón también tiene espín, que es algo así como una rotación alrededor de su propio eje (parecida a la rotación de la Tierra alrededor de su eje) y como resultado de ese espín tiene también un momentum angular y un momento magnético. Pero por razones puramente cuánticas —no hay explicación clásica— el cociente entre $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{J}$ para el espín del electrón es el doble del correspondiente al movimiento orbital del electrón con espín:

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{q_e}{m}\,\boldsymbol{J} \text{ (espín del electrón).} \tag{34.5}$$

En cualquier átomo hay, en general, varios electrones y algunas combinaciones de espín y rotación orbital que dan lugar a un momentum angular total y a un momento magnético total. Aunque no hay ninguna razón clásica de por qué debe ser así, *siempre es verdad* en la mecánica cuántica que (para un átomo aislado) la dirección del momento magnético es exactamente opuesta a la dirección del momentum angular. El cociente de los dos no es necesariamente ni $-q_e/m$ ni $-q_e/2m$ sino algo intermedio porque hay una mezcla de las contribuciones de las órbitas y de los espines. Podemos escribir

$$\boldsymbol{\mu} = -g\left(\frac{q_e}{2m}\right)\boldsymbol{J}, \tag{34.6}$$

donde g es un factor característico del estado del átomo. Sería 1 para un momento puramente orbital, o 2 para un momento puramente de espín, o algo intermedio para un sistema complicado como un átomo. Naturalmente, esta fórmula no nos dice mucho. Indica que el momento magnético es *paralelo* al momentum angular, pero puede tener cualquier módulo. La forma de la ecuación (34.6) es conveniente, porque g —llamado "factor g de Landé"— es una constante adimensional cuya magnitud es de orden de uno. Una de las tareas de la mecánica cuántica es predecir el factor g para cualquier estado atómico particular.

Puede que también estén interesados en lo que pasa en los núcleos. En los núcleos hay protones y neutrones que se pueden mover en una especie de órbita y al mismo tiempo tienen, como el electrón, una rotación intrínseca o espín. Aquí también el momento magnético es paralelo al momentum angular. Sólo que ahora el orden de magnitud del cociente de los dos es lo que sería de esperar para un *protón* dando vueltas en círculo, con la m de la ecuación (34.3) igual a la *masa del protón*. Por lo tanto, se acostumbra a escribir para los núcleos

$$\boldsymbol{\mu} = g\left(\frac{q_e}{2m_p}\right)\boldsymbol{J}, \tag{34.7}$$

donde m_p es la masa del protón y g —llamado factor g *nuclear*— es un número cercano a uno, que hay que determinar para cada núcleo.

Otra diferencia importante en un núcleo es que el momento magnético de *espín* del protón *no* tiene un factor g de 2 como el electrón. Para un protón, $g = 2(2.79)$. Y lo que es sorprendente, el *neutrón* también tiene un momento magnético de espín y el cociente entre su momento magnético y su momentum angular es $2(-1.91)$. En otras palabras, el neutrón no es exactamente "neutro" en lo que respecta al magnetismo. Es como un pequeño imán y tiene la clase de momento magnético que tendría una carga *negativa* girando.

34-3 Precesión de los imanes atómicos

Una de las consecuencias de tener el momento magnético proporcional al momentum angular es que un imán atómico colocado en campo magnético *precesa*. Primero razonaremos clásicamente. Supongan que tenemos un momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ suspendido libremente en un campo magnético uniforme. Experimentará un torque $\boldsymbol{\tau}$, igual a $\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}$ que trata de alinearlo en la dirección del campo.

Pero el imán atómico es un giroscopio —tiene un momentum angular $\boldsymbol{J}$—. Por lo tanto, debido al campo magnético el torque no hará que el imán termine alineado. En lugar de eso, el imán *precesará*, como vimos al analizar un giroscopio en el capítulo 20 del volumen I. El momentum angular —y con él el momento magnético— precesa alrededor de un eje paralelo al campo magnético. Podemos hallar la velocidad de precesión con el mismo método que usamos en el capítulo 20 del primer volumen.

Supongan que en un corto tiempo Δt el momentum angular varía de $\boldsymbol{J}$ a $\boldsymbol{J}'$, como se ha dibujado en la figura 34-3, formando siempre el mismo ángulo θ con la dirección del campo magnético $\boldsymbol{B}$. Llamemos ω_p a la velocidad angular de precesión, por lo que en el tiempo Δt el ángulo *de precesión* es $\omega_p\,\Delta t$. Se deduce de la geometría de la figura, que la variación del momentum angular en el tiempo Δt es

$$\Delta J = (J \operatorname{sen}\theta)(\omega_p\,\Delta t).$$

Por lo tanto, la derivada del momentum angular respecto al tiempo es

$$\frac{dJ}{dt} = \omega_p J \operatorname{sen}\theta, \tag{34.8}$$

que debe ser igual al torque:

$$\tau = \mu B \operatorname{sen}\theta. \tag{34.9}$$

La velocidad angular de precesión es entonces

$$\omega_p = \frac{\mu}{J}\,B. \tag{34.10}$$

Sustituyendo μ/J dado en la ecuación (34.6), vemos que para un sistema atómico se tiene

$$\omega_p = g\,\frac{q_e B}{2m}; \tag{34.11}$$

la frecuencia de precesión es proporcional a B. Es práctico recordar que para un átomo (o un electrón)

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = (1.4 \text{ megaciclos/gauss})gB, \tag{34.12}$$

y que para un núcleo

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = (0.76 \text{ kilociclos/gauss})gB. \tag{34.13}$$

(Las fórmulas para átomos y para núcleos son diferentes únicamente por las convenciones distintas para g en ambos casos.)

Por lo tanto, según la teoría *clásica* las órbitas —y los espines— electrónicas de un átomo deben precesar en un campo magnético. ¿Es también válido en la mecánica cuántica? Esencialmente es válido, pero el significado de la "precesión" es diferente. En la mecánica cuántica no se puede hablar de *dirección* del momentum angular en el mismo sentido que clásicamente; de todas maneras, hay una analogía muy estrecha —tan estrecha que seguiremos llamándola "precesión"—. La estudiaremos más adelante cuando hablemos del punto de vista cuántico.

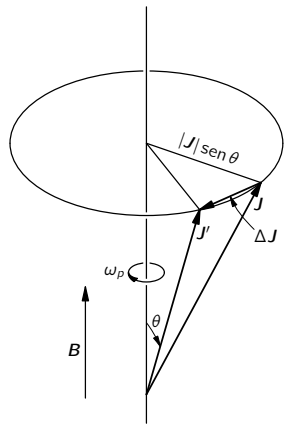


Figura 34-3. Un objeto de momentum angular $\boldsymbol{J}$ y momento magnético paralelo $\boldsymbol{\mu}$ colocado en un campo magnético $\boldsymbol{B}$ precesa con velocidad angular ω_p.

34-4 Diamagnetismo

A continuación queremos examinar el *dia*magnetismo desde el punto de vista clásico. Se puede calcular de varias maneras, pero una de las formas más elegantes es la siguiente. Supongan que encendemos lentamente un campo magnético en las cercanías de un átomo. A medida que el campo magnético cambia, se genera un campo *eléctrico* por inducción magnética. Conforme a la ley de Faraday, la integral de línea de $\boldsymbol{E}$ a lo largo de cualquier camino cerrado es la derivada respecto al tiempo del flujo magnético a través del camino. Supongan que elegimos una trayectoria Γ que es una circunferencia de radio r alineada al centro del

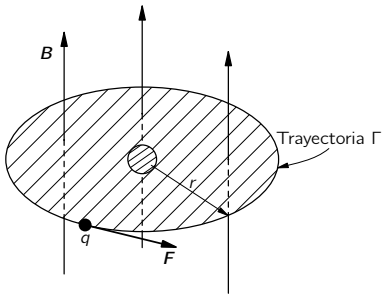


Figura 34-4. Fuerzas eléctricas inducidas que actúan sobre los electrones en un átomo.

átomo, como muestra la figura 34-4. El promedio del campo eléctrico tangencial E a lo largo de este camino está dado por

$$E2\pi r = -\frac{d}{dt}\,(B\pi r^2),$$

y hay un campo eléctrico circular cuya intensidad es

$$E = -\frac{r}{2}\,\frac{dB}{dt}.$$

El campo eléctrico inducido que actúa sobre un electrón del átomo produce un torque igual a $-q_eEr$, el cual debe ser igual a la derivada del momentum angular respecto al tiempo, dJ/dt:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{q_e r^2}{2}\,\frac{dB}{dt}. \tag{34.14}$$

Integrando respecto al tiempo desde el campo cero, encontramos que la variación del momentum angular debida al encendido del campo es

$$\Delta J = \frac{q_e r^2}{2}\,B. \tag{34.15}$$

Éste es el momentum angular adicional proveniente del impulso rotatorio dado a los electrones al encender el campo.

Este momentum adicional da lugar a un momento magnético adicional que, como se trata de un movimiento *orbital*, es simplemente $-q_e/2m$ por el momentum angular. El momento diamagnético inducido es

$$\Delta\mu = -\frac{q_e}{2m}\,\Delta J = -\frac{q_e^2 r^2}{4m}\,B. \tag{34.16}$$

El signo menos (que con la regla de Lenz pueden ver que es correcto) significa que el momento adicional es opuesto al campo magnético.

Nos gustaría escribir la ecuación (34.16) de un modo un poco diferente. El r^2 que aparece es el radio a partir de un eje paralelo a $\boldsymbol{B}$ que pasa por el átomo, por lo que si $\boldsymbol{B}$ está según el eje z, es $x^2 + y^2$. Si consideramos los átomos esféricamente simétricos (o promediamos sobre átomos con sus ejes naturales en todas direcciones), el promedio de $x^2 + y^2$ es $2/3$ del promedio del cuadrado de la verdadera distancia radial desde el *punto* central del átomo. En consecuencia, por lo común, es más conveniente escribir la ecuación (34.16) en la forma

$$\Delta\mu = -\frac{q_e^2}{6m}\langle r^2\rangle_{\text{prom}} B. \tag{34.17}$$

En todo caso, hemos encontrado un momento atómico inducido proporcional al campo magnético B y opuesto a él. Éste es el diamagnetismo de la materia. Es este efecto magnético el responsable de la pequeña fuerza que experimenta un trozo de bismuto en un campo magnético no uniforme (pueden obtener la fuerza calculando la energía de los momentos inducidos en el campo y viendo cómo varía la energía cuando el material se saca o se introduce en la región del campo intenso).

Aún nos queda un problema: ¿cuál es el promedio $\langle r^2\rangle_{\text{prom}}$ del cuadrado del radio? La mecánica clásica no nos puede dar respuesta alguna. Debemos volver atrás y empezar todo con la mecánica cuántica. En un átomo, no podemos decir realmente dónde está un electrón, sino conocer únicamente la probabilidad de que esté en un sitio. Si interpretamos $\langle r^2\rangle_{\text{prom}}$ como el promedio del cuadrado de la distancia al centro para la distribución de probabilidad, el momento diamagnético dado por la mecánica cuántica es exactamente lo mismo que la fórmula (34.17). Naturalmente, esta ecuación es el momento de un electrón. El momento total está dado por la suma sobre todos los electrones del átomo. Lo sorprendente es que el razonamiento clásico y el de la mecánica cuántica dan la misma respuesta,

aunque como veremos, el razonamiento clásico que lleva a la ecuación (34.17) no es en realidad válido en la mecánica clásica.

Aparece el mismo efecto diamagnético aun cuando un átomo ya tenga un momento permanente. Luego, el sistema precesará en el campo magnético. A medida que todo el átomo precesa, adquiere una pequeña velocidad angular adicional y ese girar lento da una pequeña corriente que representa una corrección al momento magnético. Éste es justamente el efecto diamagnético representado de otra manera. Sin embargo, realmente no tenemos que preocuparnos de eso al hablar del paramagnetismo. Si primero se calcula el efecto diamagnético, como hemos hecho aquí, no tenemos por qué preocuparnos de que haya una pequeña corriente adicional debida a la precesión. Esto ya ha sido incluido en el término diamagnético.

34-5 Teorema de Larmor

Ya podemos sacar una conclusión de los resultados obtenidos hasta ahora. Primero que todo, en la teoría clásica el momento $\boldsymbol{\mu}$ siempre era proporcional a $\boldsymbol{J}$ con una constante dada de proporcionalidad para un átomo en particular. No había ningún espín de los electrones y la constante de proporcionalidad era siempre $-q_e/2m$; es decir, en la ecuación (34.6) debíamos poner $g = 1$. El cociente $\boldsymbol{\mu}$ entre $\boldsymbol{J}$ era independiente de los movimientos internos de los electrones. Así, según la teoría clásica todos los sistemas de electrones precesarían con *la misma* velocidad angular (esto *no* es verdad en la mecánica cuántica). Este resultado está relacionado con un teorema de la mecánica clásica que desearíamos demostrar ahora. Supongan que tenemos un grupo de electrones que una atracción hacia un punto central mantiene juntos —como el núcleo atrae a los electrones—. Los electrones también estarán interactuando entre sí y, en general, pueden tener movimientos complicados. Además, supongan que han hallado la solución *sin* campo magnético y entonces quieren saber cuáles serían los movimientos *con* un campo magnético débil. El teorema dice que el movimiento en un campo magnético débil siempre es una de las soluciones sin campo más una rotación alrededor del eje del campo con una velocidad angular $\omega_L = q_eB/2m$. (Lo cual es igual a ω_p si $g = 1$.) Naturalmente, hay muchos movimientos posibles. Lo importante es que para cada movimiento sin campo magnético hay un movimiento correspondiente con el campo, el cual es el movimiento original más una rotación uniforme. Esto se llama teorema de Larmor y ω_L se llama *frecuencia de Larmor*.

Nos gustaría mostrar cómo se demuestra el teorema, pero les dejaremos calcular los detalles. Tomen primero un electrón en un campo de fuerzas centrales. La fuerza que experimenta es simplemente $\boldsymbol{F}(r)$ dirigida hacia el centro. Si ahora aplicamos un campo magnético uniforme, tenemos la fuerza adicional $q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$; la fuerza total es entonces

$$\boldsymbol{F}(r) + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}. \tag{34.18}$$

Examinemos ahora el mismo sistema desde un sistema de coordenadas que rota con velocidad angular ω alrededor de un eje paralelo a $\boldsymbol{B}$ que pasa por el centro de fuerza. Esto ya no es un sistema inercial, por lo que tenemos que introducir las pseudofuerzas apropiadas —las fuerzas centrífuga y de Coriolis de que hablamos en el capítulo 19 del volumen I—. Encontramos allí que en un sistema de ejes que rota con velocidad angular ω hay una fuerza *tangencial* aparente proporcional a v_r, la componente radial de la velocidad:

$$F_t = -2m\omega v_r. \tag{34.19}$$

Y hay una fuerza radial aparente que está dada por

$$F_r = m\omega^2 r + 2m\omega v_t, \tag{34.20}$$

donde v_t es la componente tangencial de la velocidad medida *en* el sistema rotante de coordenadas. (La componente radial v_r es la misma en los sistemas rotante e inercial.)

Ahora bien, para velocidades angulares suficientemente pequeñas (es decir, si $\omega r \ll v_t$), podemos despreciar el primer término (centrífugo) en la ecuación (34.20) frente al segundo (de Coriolis). Entonces es posible escribir conjuntamente las ecuaciones (34.19) y (34.20) en la forma

$$\boldsymbol{F} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}. \tag{34.21}$$

Si ahora *combinamos* una rotación y un campo magnético, debemos agregar la fuerza (34.21) a la fuerza (34.18). La fuerza total es

$$\boldsymbol{F}(r) + q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} + 2m\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{\omega} \tag{34.22}$$

[invertimos el producto vectorial y el signo de la ecuación (34.21) para obtener el último término]. Examinando nuestro resultado, vemos que si

$$2m\boldsymbol{\omega} = -q\boldsymbol{B}$$

los dos últimos términos se cancelan y la única fuerza en el sistema rotante es $\boldsymbol{F}(r)$. El movimiento del electrón es exactamente lo mismo que sin campo magnético —y, por supuesto, sin rotación—. Hemos demostrado el teorema de Larmor para un electrón. Como la demostración supone una ω pequeña, el teorema es válido sólo para campos magnéticos débiles. Lo único que podríamos pedirles para mejorar las cosas es que tomen el caso de muchos electrones interactuando entre sí, pero todos en el mismo campo central, y que demuestren el mismo teorema. Así, no importa lo complicado que sea un átomo: si tiene un campo central el teorema es válido. Pero esto es el fin de la mecánica clásica, porque en realidad no es verdad que los movimientos precesen de esa manera. La frecuencia de precesión ω_p de la ecuación (34.11) sólo es igual a ω_L si ocurre que g es igual a 1.

34-6 La física clásica no da ni diamagnetismo ni paramagnetismo

Ahora nos gustaría demostrar que conforme a la mecánica clásica no puede haber ni diamagnetismo ni paramagnetismo. Parece una locura —primero demostramos que hay paramagnetismo, diamagnetismo, órbitas que precesan, etc.—, y ahora vamos a demostrar que todo está mal. ¡Sí! Vamos a demostrar que *si* siguen con la mecánica *clásica* suficientemente lejos, no hay tales efectos magnéticos —*todos se cancelan*—. Si empiezan un razonamiento clásico en cierto punto y no avanzan lo suficiente en las consecuencias, pueden obtener la respuesta que quieran. Pero la única demostración legítima y correcta muestra que no hay ningún efecto magnético.

Es una consecuencia de la mecánica clásica que si tienen cualquier clase de sistema —un gas con electrones, protones o lo que sea— dentro de una caja de modo que el todo no puede girar, no habrá efecto magnético. Es posible tener un efecto magnético si tienen un sistema aislado, como una estrella que se mantiene unida por sí misma, el cual puede comenzar a rotar cuando aplican el campo magnético. Pero si tienen un trozo de material que se mantiene en su sitio de modo que no puede empezar a girar, no habrá efectos magnéticos. Resumimos así lo que entendemos por impedir que gire: a una temperatura dada suponemos que hay *sólo un estado* de equilibrio termodinámico. El teorema dice entonces que si aplican un campo magnético y esperan que el sistema alcance equilibrio termodinámico, no habrá, ni paramagnetismo ni diamagnetismo —no habrá ningún momento magnético inducido—. Demostración: según la mecánica estadística, la probabilidad de que un sistema tenga un determinado estado de movimiento es proporcional a $e^{-U/kT}$, donde U es la energía de ese movimiento. Ahora bien: ¿cuál es la energía de movimiento? Para una partícula moviéndose en un campo magnético constante la energía es la energía potencial ordinaria más $mv^2/2$ sin nada adicional debido al campo magnético. [Ustedes saben que las fuerzas debidas a campos electromagnéticos son $q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$, y que la rapidez $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}$ con que se realiza el trabajo es simplemente $q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v}$, la cual no está afectada por el campo magnético.] Así, la energía de un sistema, esté o no en

un campo magnético, siempre está dada por la energía cinética más la energía potencial. Como la probabilidad de cualquier movimiento sólo depende de la energía —es decir, de la velocidad y de la posición— es lo mismo que haya o no un campo magnético. Por lo tanto, el campo magnético no tiene ningún efecto sobre el equilibrio *termodinámico*. Si tenemos un sistema en una caja y luego tenemos otro sistema en una segunda caja, esta vez con un campo magnético, la probabilidad de cualquier velocidad en cualquier punto de la primera caja es igual que en la segunda. Si la primera caja no tiene ninguna corriente media circulante (y no la tendrá si está en equilibrio con las paredes estáticas), no hay momento magnético medio. Como en la segunda caja todos los movimientos son iguales, tampoco allí hay un momento magnético medio. Por lo tanto, si se mantiene la temperatura constante y se restablece el equilibrio termodinámico después de aplicar el campo, no puede haber ningún momento magnético inducido por el campo —conforme a la mecánica clásica—. Sólo con la mecánica cuántica podemos llegar a una comprensión satisfactoria de los fenómenos magnéticos.

Desafortunadamente, no podemos suponer que ustedes tengan un buen conocimiento de la mecánica cuántica, por lo que difícilmente sea éste el momento de discutir el tema. Por otra parte, no siempre tenemos que aprender algo aprendiendo primero las reglas exactas y luego aprendiendo cómo se aplican en casos diferentes. Prácticamente todos los temas que hemos abordado en este curso han sido tratados de diferente modo. En el caso de la electricidad, escribimos las ecuaciones de Maxwell en la "página uno" y luego dedujimos todas las consecuencias. Ésa es una manera. Pero ahora *no* trataremos de empezar una nueva "página uno" escribiendo las ecuaciones de la mecánica cuántica y deduciendo todo de ellas. Simplemente les hablaremos de algunas consecuencias de la mecánica cuántica antes de que aprendan de dónde vienen. Así que, allá vamos.

34-7 Momentum angular en la mecánica cuántica

Ya les hemos dado una relación entre el momento magnético y el momentum angular. Eso está muy bien. Pero, ¿cuál es el *significado* del momento magnético y el momentum angular en la mecánica cuántica? En la mecánica cuántica resulta que lo mejor es definir cosas como los momentos magnéticos en términos de otros conceptos, como energía, para estar seguros de lo que significa. Ahora bien, es fácil definir un momento magnético en función de la energía porque la energía de un momento en un campo magnético es, en la teoría clásica, $\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}$. En consecuencia, se ha tomado la siguiente definición en la mecánica cuántica: si calculamos la energía de un sistema en un campo magnético y encontramos que es proporcional a la intensidad de campo (para campos pequeños), el coeficiente se llama componente del momento magnético en la dirección del campo. (No necesitamos ponernos tan elegantes para nuestro trabajo; aún podemos pensar en el momento magnético en el sentido ordinario clásico, hasta cierto punto.)

Nos gustaría discutir ahora el concepto de momentum angular en la mecánica cuántica —o más bien las características de lo que en la mecánica cuántica se llama momentum angular—. Como ven, al pasar a nuevas clases de leyes, no pueden suponer simplemente que cada palabra va a significar exactamente lo mismo. Puede que piensen: "Ah, sé lo que es el momentum angular. Es eso que varía cuando aplicamos un torque". ¿Pero qué es un torque? En mecánica cuántica tenemos que tener nuevas definiciones de las viejas magnitudes. Por lo tanto, legalmente, lo mejor sería darle otro nombre, como "momentum cuantangular" o algo por el estilo, porque es el momentum angular como se lo define en la mecánica cuántica. Pero si en la mecánica cuántica podemos hallar una magnitud que sea idéntica a nuestra vieja idea de momentum angular cuando el sistema se hace suficientemente grande, no es de utilidad inventar una palabra más. También podríamos llamarlo momentum angular simplemente. Aclarado esto, la cosa rara que estamos a punto de describir *es* el momentum angular. Es lo que en sistemas grandes reconocemos como momentum angular en la mecánica clásica.

Primero, tomemos un sistema cuyo momentum angular se conserva, como un átomo solitario en el espacio vacío. Ese sistema podría (como la Tierra girando sobre su eje) estar girando, en el sentido ordinario de la palabra, alrededor de cualquier eje que se elija. Y para cada velocidad de giro podría haber muchos "estados" diferentes, todos de la misma energía correspondiendo cada "estado" a una dirección determinada del eje del momentum angular. Así, en la teoría clásica, dado un momentum angular, hay un número infinito de estados posibles, todos con la misma energía.

Por el contrario, en la mecánica cuántica resulta que ocurren varias cosas extrañas. Primero el número de estados en que ese sistema *puede existir* está limitado —sólo hay un número finito—. Si el sistema es pequeño, el número finito es muy pequeño y si el sistema es grande, el número finito se hace muy, pero muy grande. Segundo: *no podemos* describir un "estado" dando la *dirección* de su momentum angular, sino únicamente dando la *componente* del momentum angular según alguna dirección —la dirección z, por ejemplo—. Clásicamente, un objeto con un momentum angular total J podría tener, para su componente z, cualquier valor entre $+J$ y $-J$. Pero cuánticamente, la componente z del momentum angular sólo puede tener ciertos valores discretos. Cualquier sistema —un átomo, o un núcleo, o lo que sea— con cierta energía dada, tiene un número característico j y la componente z de su momentum angular sólo puede asumir uno de los siguientes valores:

$$\begin{aligned} &j\hbar\\ &(j-1)\hbar\\ &(j-2)\hbar\\ &\vdots\\ &-(j-2)\hbar\\ &-(j-1)\hbar\\ &-j\hbar \end{aligned} \tag{34.23}$$

La componente z más grande es j por $\hbar$; la que le sigue es una unidad de $\hbar$ menor, y así siguiendo hasta $-j\hbar$. El número j se llama "espín del sistema" (algunos lo llaman "número cuántico del momentum angular total", pero nosotros lo llamaremos "espín").

Puede que les preocupe saber si lo que estamos diciendo vale únicamente para cierto eje z "especial". Pero no es así. Para un sistema cuyo espín es j, la componente del momentum angular según *cualquier* eje sólo puede tener uno de los valores en (34.23). Aunque es bastante misterioso, les pedimos que lo acepten por el momento. Más adelante volveremos sobre este punto y lo discutiremos. Por lo menos pueden estar contentos de oír que la componente z va desde cierto número hasta menos el *mismo* número, para que por lo menos no tengamos que decidir cuál es la dirección positiva del eje z. (Por cierto que si dijéramos que va desde $+j$ hasta menos una cantidad diferente, eso sería infinitamente misterioso porque no podríamos definir el eje z apuntando en el otro sentido.)

Ahora bien, si la componente z del momentum angular debe bajar de uno en uno desde $+j$ hasta $-j$, entonces j debe ser un entero. ¡No! No tanto; dos veces j debe ser un entero. Sólo la *diferencia* entre $+j$ y $-j$ debe ser un entero. Así, en general, el espín j es entero o semientero, según que $2j$ sea par o impar. Por ejemplo, tomen un núcleo como el litio, que tiene espín tres medios: $j = 3/2$. Entonces el momentum angular respecto al eje z es, en unidades de $\hbar$, uno de los siguientes:

$$\begin{aligned} &+3/2\\ &+1/2\\ &-1/2\\ &-3/2. \end{aligned}$$

Hay cuatro estados posibles, todos de la misma energía, si el núcleo está en el espacio vacío sin campos externos. Si tenemos un sistema cuyo espín es dos,

la componente z de su momentum angular tiene únicamente los siguientes valores, en unidades de $\hbar$,

$$\begin{array}{r} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2. \end{array}$$

Si cuentan cuántos estados hay para un j dado, encuentran $(2j+1)$ posibilidades. En otras palabras, si me dicen cuál es la energía y también el espín j, resulta que hay exactamente $(2j+1)$ estados con esa energía, cada uno de los cuales corresponde a uno de los diferentes valores posibles de la componente z del momentum angular.

Agreguemos otro hecho. Si toman al azar cualquier átomo de j conocido y miden la componente z del momentum angular, entonces pueden obtener cualquiera de los valores posibles, y cada uno de ellos es *igualmente* probable. En efecto, todos los estados son únicos y cada uno es tan bueno como el otro. Cada uno tiene el mismo "peso" en el mundo. (Estamos suponiendo que no se ha hecho nada para escoger una muestra especial.) Incidentalmente, este hecho tiene un análogo clásico simple, si hacen la misma pregunta clásicamente: ¿cuál es la probabilidad de un valor particular de la componente z del momentum angular si toman una muestra al azar de sistemas, todos con el mismo momentum angular total? —la respuesta es que todos los valores desde el máximo hasta el mínimo son igualmente probables (pueden calcular esto fácilmente)—. El resultado clásico corresponde a la equiprobabilidad de las $(2j+1)$ posibilidades en la mecánica cuántica.

Con lo que tenemos hasta ahora podemos obtener otra conclusión interesante y algo sorprendente. En ciertos cálculos clásicos, la cantidad que aparece en el resultado final es el *cuadrado* del módulo del momentum angular $\boldsymbol{J}$ —o sea $\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J}$—. Resulta que muchas veces es posible *adivinar* la fórmula cuántica correcta usando el cálculo clásico y la siguiente regla simple: remplazar $J^2 = \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J}$ por $j(j+1)\hbar^2$. Esta regla se usa mucho y usualmente da el resultado correcto, pero *no* siempre. Podemos dar el siguiente argumento para mostrar por qué sería de esperar que esta regla funcione.

Se puede escribir el producto escalar $\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J}$ en la forma

$$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J} = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2.$$

Como es un escalar, debe ser el mismo para cualquier orientación del espín. Supongan que tomamos muestras al azar de un sistema determinado cualquiera y hacemos medidas de J_x^2, J_y^2 o J_z^2, el *valor medio* debe ser igual para todas (ninguna dirección es privilegiada). En consecuencia, el promedio de $\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J}$ es simplemente igual a tres veces el promedio de cualquiera de las componentes al cuadrado, digamos que de J_z^2:

$$\langle \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J}\rangle_{\text{prom}} = 3\langle J_z^2\rangle_{\text{prom}}.$$

Pero como $\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J}$ es el mismo para todas las orientaciones, su promedio es, naturalmente, su valor constante; tenemos

$$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J} = 3\langle J_z^2\rangle_{\text{prom}}. \tag{34.24}$$

Si ahora decimos que vamos a usar la misma ecuación en la mecánica cuántica, podemos hallar fácilmente $\langle J_z^2\rangle_{\text{prom}}$. Sólo tenemos que sumar los $(2j+1)$ valores posibles de J_z^2 y dividir entre el número total:

$$\langle J_z^2\rangle_{\text{prom}} = \frac{j^2 + (j-1)^2 + \cdots + (-j+1)^2 + (-j)^2}{2j+1}\,\hbar^2. \tag{34.25}$$

Para un sistema de espín $3/2$ se tiene:

$$\langle J_z^2\rangle_{\text{prom}} = \frac{(3/2)^2 + (1/2)^2 + (-1/2)^2 + (-3/2)^2}{4}\,\hbar^2 = \frac{5}{4}\,\hbar^2.$$

Concluimos que

$$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J} = 3\langle J_z^2\rangle_{\text{prom}} = 3\tfrac{5}{4}\hbar^2 = \tfrac{3}{2}(\tfrac{3}{2}+1)\hbar^2.$$

Dejamos que ustedes demuestren que la ecuación (34.25), junto con la ecuación (34.24), da el resultado general

$$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J} = j(j+1)\hbar^2. \tag{34.26}$$

Aunque clásicamente pensaríamos que el mayor valor posible de la componente z de $\boldsymbol{J}$ es justamente el módulo de $\boldsymbol{J}$ —dicho de otro modo, $\sqrt{\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J}}$— cuánticamente, el máximo de J_z siempre es un poco menor porque $j\hbar$ siempre es menor que $\sqrt{j(j+1)}\hbar$. Además, el momentum angular nunca yace "completamente en la dirección z".

34-8 Energía magnética de los átomos

Ahora queremos hablarles nuevamente del momento magnético. Hemos dicho que en la mecánica cuántica el momento magnético de un sistema atómico determinado se puede escribir en función del momentum angular mediante la ecuación (34.6),

$$\boldsymbol{\mu} = -g\left(\frac{q_e}{2m}\right)\boldsymbol{J}, \tag{34.27}$$

donde $-q_e$ y m son la carga y la masa del electrón.

Un imán atómico colocado en un campo magnético externo tendrá una energía magnética adicional que depende de la componente de su momento magnético en la dirección del campo. Sabemos que

$$U_{\text{mag}} = -\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}. \tag{34.28}$$

Eligiendo el eje z en la dirección de $\boldsymbol{B}$,

$$U_{\text{mag}} = -\mu_z B. \tag{34.29}$$

Usando la ecuación (34.27) tenemos

$$U_{\text{mag}} = g\left(\frac{q_e}{2m}\right)J_z B.$$

La mecánica cuántica afirma que J_z solamente puede tener ciertos valores: $j\hbar$, $(j-1)\hbar$, …, $-j\hbar$. En consecuencia, la energía magnética de un sistema atómico no es arbitraria; sólo puede tener ciertos valores. Por ejemplo, su máximo es

$$g\left(\frac{q_e}{2m}\right)\hbar j B.$$

La cantidad $q_e\hbar/2m$ recibe habitualmente el nombre de "magnetón de Bohr" y se escribe μ_B:

$$\mu_B = \frac{q_e\hbar}{2m}.$$

Los valores posibles de la energía magnética son

$$U_{\text{mag}} = g\mu_B B\,\frac{J_z}{\hbar},$$

donde $J_z/\hbar$ asume los valores posibles j, $(j-1)$, $(j-2)$, …, $(-j+1)$, $-j$.

En otras palabras, cuando se pone un sistema atómico en un campo magnético su energía varía en una cantidad que es proporcional al campo y a J_z. Decimos que la energía de un sistema atómico "se desdobla en $2j+1$ niveles" debido al campo magnético. Por ejemplo, un átomo cuya energía es U_0 fuera de un campo magnético y cuyo j es $3/2$, tendrá cuatro energías posibles al colocarle en un campo. Podemos mostrarles estas energías por medio de un diagrama de niveles

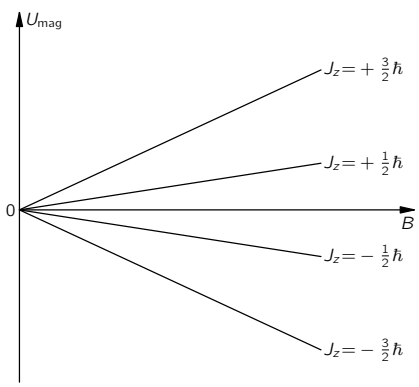


Figura 34-5. Energías magnéticas posibles de un sistema atómico de espín 3/2 en un campo magnético $\boldsymbol{B}$.

de energía como el dibujado en la figura 34-5. Cualquier átomo en particular sólo puede tener una de las cuatro energías posibles en un campo determinado B. Esto es lo que la mecánica cuántica dice sobre el comportamiento de un sistema atómico en un campo magnético.

El sistema "atómico" más simple es un electrón solo. El espín de un electrón es 1/2, por lo que hay dos estados posibles: $J_z = \hbar/2$ y $J_z = -\hbar/2$. Para un electrón en reposo (sin movimiento orbital) el momento magnético de espín tiene un g que vale 2, de modo que la energía magnética puede ser $\pm\mu_B B$. La figura 34-6 muestra las energías posibles en un campo magnético. Hablando un poco a la ligera decimos que el electrón tiene su espín o bien, "hacia arriba" (según el campo), o bien "hacia abajo" (opuesto al campo).

Para sistemas de espín más alto hay más estados. Podemos pensar que el espín está "hacia arriba" o "hacia abajo" o inclinado a cierto "ángulo" intermedio, según sea el valor de J_z.

Usaremos estos resultados cuánticos para estudiar las propiedades magnéticas de los materiales en el próximo capítulo.

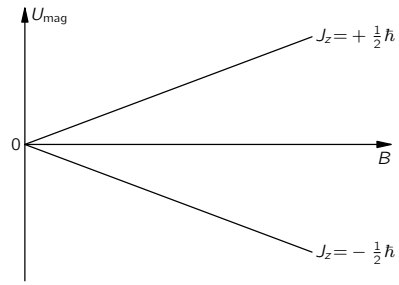


Figura 34-6. Los dos estados posibles de energía de un electrón en un campo magnético $\boldsymbol{B}$.

35

Paramagnetismo y resonancias magnéticas

35-1 Estados magnéticos cuantizados
35-2 El experimento de Stern-Gerlach
35-3 El método de haces moleculares de Rabi
35-4 Paramagnetismo macroscópico de materiales
35-5 Enfriamiento por desmagnetización adiabática
35-6 Resonancia magnética nuclear

35-1 Estados magnéticos cuantizados

En el último capítulo describimos cómo es que en la mecánica cuántica el momentum angular de algo no tiene una dirección arbitraria, sino que su componente según un eje dado sólo puede tomar ciertos valores discretos igualmente espaciados. Es algo raro y peculiar. Quizá piensen que no deberíamos entrar en tales cosas hasta que ustedes estén más avanzados y listos para aceptar esta clase de idea. En realidad, sus mentes nunca estarán suficientemente listas —en el sentido de que sean capaces de aceptar fácilmente tal cosa—. No hay modo descriptivo alguno de hacerla inteligible y que a la vez no sea tan sutil y avanzado en su propia forma que resulte más complicado que lo que tratan de explicar. El comportamiento de la materia a escala microscópica es verdaderamente muy extraño —como hemos señalado muchas veces— y es diferente de cualquier cosa a la que están acostumbrados. A medida que avanzamos en la física clásica, es una buena idea tratar de irse familiarizando poco a poco con el comportamiento de las cosas a una escala microscópica, al principio como una experiencia sin ninguna comprensión profunda. La comprensión de ello viene muy lentamente, si es que viene. Naturalmente, uno es capaz de saber qué va a suceder en una situación cuántica —si esto es lo que comprensión significa—, pero nunca se tiene la sensación de comodidad de que estas reglas cuánticas son "naturales". Por supuesto que lo *son*, pero no son naturales para nuestra experiencia propia a un nivel ordinario. Debemos aclarar que la actitud que vamos a tomar respecto a esta regla del momentum angular es completamente diferente de muchas de las otras cuestiones de que hemos hablado. No vamos a tratar de "explicarla", pero al menos debemos *decirles* lo que sucede; no sería honrado describirles las propiedades magnéticas de los materiales sin mencionarles el hecho de que la descripción clásica del magnetismo —del momentum angular y de los momentos magnéticos— es incorrecta.

Revisar
Volumen II, capítulo 11,
Dentro de los dieléctricos

Una de las características más sorprendentes y perturbadoras de la mecánica cuántica es que si toman el momentum angular según cualquier eje particular encuentran que siempre es un entero o un semientero por $\hbar$. Esto es así, sea cual sea el eje que tomen. Las sutilezas de este hecho curioso —que pueden tomar cualquier otro eje y encuentran que la componente según él también está incluida en el mismo conjunto de valores— las dejaremos para un capítulo posterior, cuando experimentarán la satisfacción de ver cómo se resuelve finalmente esta aparente paradoja.

Ahora aceptaremos solamente el hecho de que para cada sistema atómico hay un número j, llamado *espín* del sistema —que debe ser un entero o un semientero— y que la componente del momentum angular según cualquier eje particular tendrá siempre uno de los siguientes valores entre $+j\hbar$ y $-j\hbar$:

$$J_z = \text{uno de} \left\{ \begin{array}{c} j \\ j-1 \\ j-2 \\ \vdots \\ -j+2 \\ -j+1 \\ -j \end{array} \right\} \cdot \hbar. \tag{35.1}$$

También hemos mencionado que todo sistema atómico sencillo posee un momento magnético que posee la misma dirección que el momentum angular.

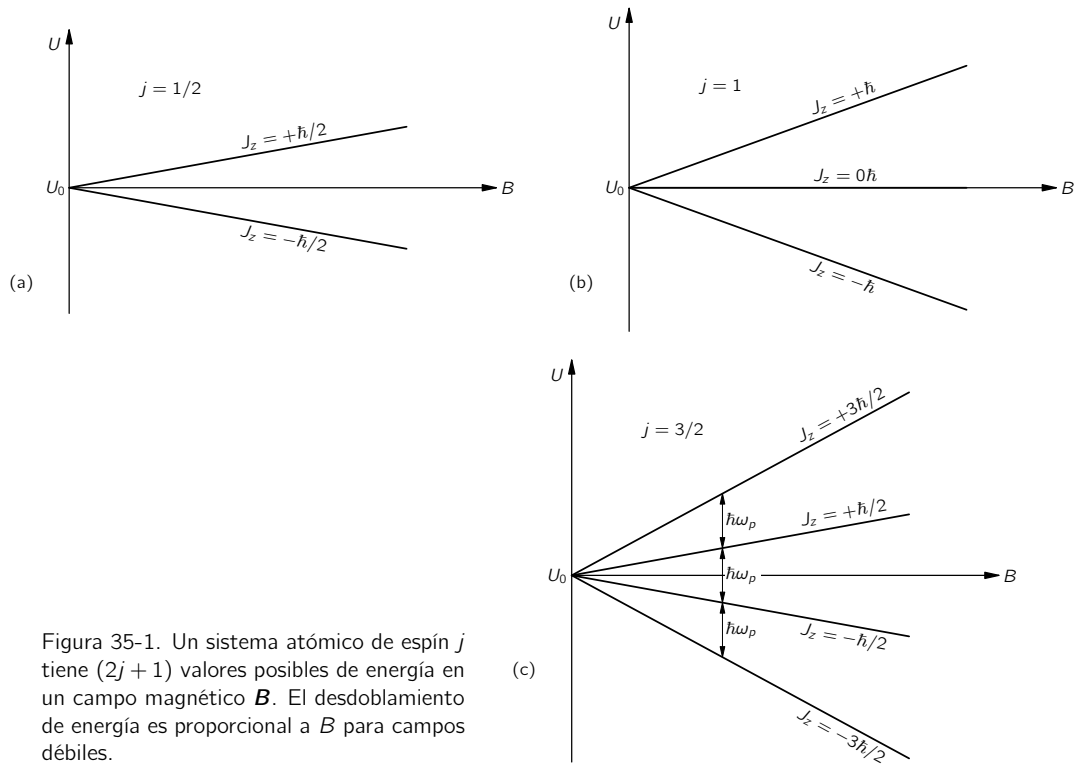


Figura 35-1. Un sistema atómico de espín j tiene $(2j+1)$ valores posibles de energía en un campo magnético $\boldsymbol{B}$. El desdoblamiento de energía es proporcional a B para campos débiles.

Esto no sólo es válido para átomos y núcleos sino también para las partículas fundamentales. Toda partícula fundamental tiene su valor propio característico para j y para el momento magnético. (Para algunas partículas ambos son cero.) Lo que queremos decir por "el momento magnético" en esa afirmación es que la energía del sistema en un campo magnético, en la dirección z por ejemplo, se puede escribir como $-\mu_z B$ para campos magnéticos débiles. Debemos imponer la condición de que el campo no debe ser muy intenso, porque de otro modo podría perturbar los movimientos internos del sistema y la energía no sería una medida del momento magnético que se encontraba presente antes de que se aplicase el campo. Pero si el campo es suficientemente débil, el mismo varía la energía en la cantidad

$$\Delta U = -\mu_z B, \tag{35.2}$$

siendo que en esta ecuación tenemos que remplazar μ_z por

$$\mu_z = g\left(\frac{q}{2m}\right)J_z, \tag{35.3}$$

donde J_z tiene uno de los valores de la ecuación (35.1).

Supongan que tenemos un sistema de espín $j = 3/2$. En ausencia de un campo magnético, el sistema tiene cuatro estados diferentes posibles correspondientes a los distintos valores de J_z, todos los cuales tienen exactamente la misma energía. Sin embargo, el momento en que introducimos el campo magnético, hay una energía adicional de interacción que separa estos estados en cuatro niveles de energía levemente diferentes. Las energías de estos niveles están dadas por una cierta energía proporcional a B, multiplicada por $\hbar$ por $3/2$, $1/2$, $-1/2$ y $-3/2$ —los valores de J_z—. Los diagramas de la figura 35-1 muestran los desdoblamientos de los niveles de energía para sistemas atómicos con espines $1/2$, 1 y $3/2$ (recuerden que el momento magnético siempre es antiparalelo al momentum angular para cualquier ordenamiento de electrones).

Observarán en los diagramas que el "centro de gravedad" de los niveles de energía es el mismo con o sin campo magnético. Observen también que los

espaciamientos de un nivel al siguiente son siempre iguales para una partícula dada en un campo magnético dado. Vamos a escribir el espaciamiento de energía, para un campo magnético B dado, como $\hbar\omega_p$ —lo cual es simplemente una definición de ω_p—. Usando las ecuaciones (35.2) y (35.3), tenemos

$$\hbar\omega_p = g\,\frac{q}{2m}\,\hbar B$$

o sea

$$\omega_p = g\,\frac{q}{2m}\,B. \tag{35.4}$$

La cantidad $g(q/2m)$ es justamente el cociente entre el momento magnético y el momentum angular —es una propiedad de la partícula—. La ecuación (35.4) es la misma fórmula que obtuvimos en el capítulo 34 para la velocidad angular de precesión en un campo magnético de un giroscopio cuyo momentum angular es $\boldsymbol{J}$ y cuyo momento magnético es $\boldsymbol{\mu}$.

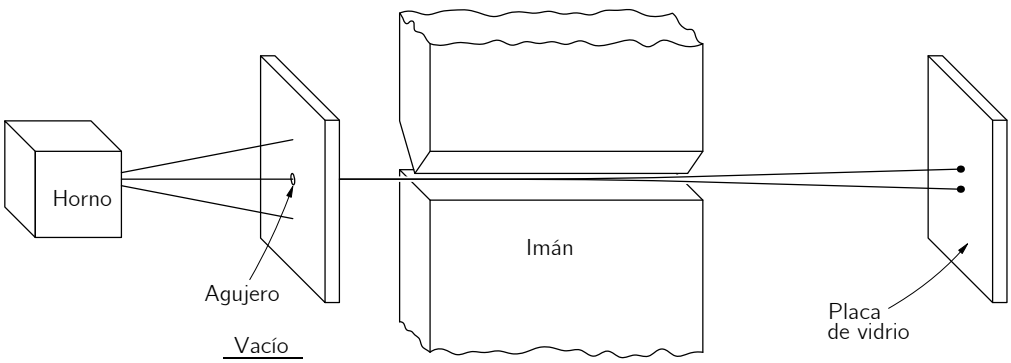


Figura 35-2. El experimento de Stern y Gerlach.

35-2 El experimento de Stern-Gerlach

El hecho de que el momentum angular esté cuantizado es tan sorprendente que hablaremos un poco de él históricamente. Su descubrimiento produjo una gran sorpresa (aunque teóricamente se esperaba). Stern y Gerlach lo observaron por primera vez en un experimento realizado en 1922. Si lo desean, pueden considerar el experimento de Stern-Gerlach como una justificación directa de la creencia de la cuantización del momentum angular. Stern y Gerlach idearon un experimento para medir el momento magnético de un átomo de plata. Produjeron un haz de átomos de plata evaporando plata en un horno y dejando que algunos salieran a través de una serie de agujeros pequeños. Este haz se dirigió entre los polos de un imán especial, como muestra la figura 35-2. Su idea fue la siguiente: si el átomo de plata tiene un momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ y lo colocamos en un campo magnético $\boldsymbol{B}$, tendrá una energía $-\mu_z B$, siendo z la dirección del campo magnético. En la teoría clásica μ_z sería igual al momento magnético por el coseno del ángulo formado por el momento y el campo magnético, por lo que la energía adicional en el campo sería

$$\Delta U = -\mu B\cos\theta. \tag{35.5}$$

Naturalmente, al salir los átomos del horno sus momentos magnéticos apuntarían cualquier dirección posible y encontraríamos cualquier valor para θ. Ahora bien, si el campo magnético varía muy rápidamente con z —si hay un gradiente intenso del campo— entonces la energía magnética variará también con la posición y habrá una fuerza sobre los momentos magnéticos cuya dirección dependerá de si el coseno de θ es positivo o negativo. Los átomos serán atraídos hacia arriba o

hacia abajo de una fuerza proporcional a la derivada de la energía magnética; según el principio de trabajos virtuales, tenemos

$$F_z = -\frac{\partial U}{\partial z} = \mu \cos\theta \, \frac{\partial B}{\partial z}. \tag{35.6}$$

Stern y Gerlach construyeron su imán con uno de los polos muy en punta para que así se produjese una variación muy rápida del campo magnético. El haz de átomos de plata se dirigió justamente a lo largo de este filo para que así los átomos se viesen sometidos a una fuerza vertical en un campo no homogéneo. Un átomo de plata con su momento magnético dirigido horizontalmente no experimentaría fuerza y pasaría en línea recta el imán. Un átomo cuyo momento magnético estuviese exactamente vertical experimentaría una fuerza vertical que lo empujaría hacia el polo en la punta del imán. Un átomo cuyo momento magnético apuntase hacia abajo experimentaría un empuje hacia abajo. Por consiguiente, cuando abandonasen el imán, los átomos se distribuirían de acuerdo a sus componentes verticales de momento magnético. Todos los ángulos son posibles en la teoría clásica, de modo que cuando los átomos de plata se recogen por deposición en una placa de vidrio, se espera una distribución de plata según una línea vertical. La altura de la línea sería proporcional al módulo del momento magnético. El tremendo fracaso de las ideas clásicas se puso de manifiesto cuando Stern y Gerlach vieron lo que en la realidad sucede. Encontraron en la lámina de vidrio dos manchas nítidas. Los átomos de plata habían formado dos haces.

Es casi milagroso que un haz de átomos cuyos espines estarían aparentemente orientados al azar se bifurque en dos haces separados. ¿Cómo *sabe* el momento magnético que solamente se le permite llevar ciertas componentes en la dirección del campo magnético? En realidad éste fue el comienzo del descubrimiento de la cuantización del momentum angular, y en lugar de tratar de darles una explicación teórica, solamente les diré que se atengan al resultado del experimento, como los físicos de entonces tuvieron que aceptarlo en su momento cuando se realizó el experimento por primera vez. Es un *hecho experimental* que la energía de un átomo en un campo magnético toma una serie de valores particulares. Para cada uno de estos valores la energía es proporcional a la intensidad del campo. Por consiguiente, en una región donde el campo varía, el principio de los trabajos virtuales nos dice que la fuerza magnética posible sobre los átomos tendrá un conjunto de valores discretos; la fuerza es diferente para cada estado y, por lo tanto, el haz de átomos se separa en un número pequeño de haces distintos. Se puede encontrar la intensidad del momento magnético a partir de la medida de la desviación de los haces.

35-3 El método de haces moleculares de Rabi

Describiremos ahora un aparato mejor que mide momentos magnéticos y que fue desarrollado por Isidor Isaac Rabi y sus colaboradores. La desviación de los átomos en el experimento de Stern-Gerlach es muy pequeña y la medida del momento magnético no es muy precisa. La técnica de Rabi permite una precisión fantástica en la medida de los momentos magnéticos. El método se basa en el hecho de que la energía original de los átomos en un campo magnético se separa en un número finito de niveles de energía. Que la energía de un átomo en un campo magnético pueda tener solamente ciertas energías discretas no es realmente más sorprendente, que el hecho de que los átomos *en general* puedan tener solamente ciertos niveles discretos de energía —algo que mencionamos con frecuencia en el volumen I—. ¿Por qué *no* valdría lo mismo para átomos en un campo magnético? Sí, sirve. Pero se intenta correlacionarlo con la idea de un *momento magnético orientado* que implica algunas complicaciones raras de la mecánica cuántica.

Cuando un átomo tiene dos niveles que difieren en energía en la cantidad ΔU, puede realizar una transición del nivel superior al nivel inferior mediante la emisión de un cuanto de luz de frecuencia ω, siendo

$$\hbar\omega = \Delta U. \tag{35.7}$$

Lo mismo puede suceder con átomos en un campo magnético. Sólo que las diferencias de energía son tan pequeñas que la frecuencia no corresponde a luz sino a microondas o a radiofrecuencias. Las transiciones del nivel inferior de energía a un nivel superior de un átomo, también pueden tener lugar con la ayuda de la absorción de luz o, en el caso de átomos en un campo magnético, mediante la absorción de energía de microondas. Así, si tenemos un átomo en un campo magnético, podemos causar transiciones de un estado a otro mediante la aplicación de un campo electromagnético adicional con frecuencia apropiada. En otras palabras, si tenemos un átomo en un campo magnético intenso y le "hacemos cosquillas" al átomo con campo electromagnético débil que varía, habrá una cierta probabilidad de pasarlo a otro nivel si la frecuencia es próxima a la ω de la ecuación (35.7). Para un átomo en un campo magnético, esta frecuencia es justamente lo que antes llamamos ω_p y está dada en función del campo magnético por la ecuación (35.4). Si se cosquillea al átomo con la frecuencia incorrecta, la probabilidad de causar una transición es muy pequeña. Así, en la probabilidad de causar una transición hay una *resonancia* aguda en ω_p. Midiendo la frecuencia de esta resonancia en un campo magnético B conocido, podemos medir la cantidad $g(q/2m)$ —y por tanto el factor g— con gran precisión.

Es interesante cuando se llega a la misma conclusión desde un punto de vista clásico. Según la imagen clásica, cuando colocamos un pequeño giroscopio de momento magnético μ y momentum angular J en un campo magnético externo, el giroscopio precesará alrededor de un eje paralelo al campo magnético (véase figura 35-3). Supongan que preguntamos: ¿cómo podemos cambiar el ángulo del giroscopio clásico respecto al campo —a saber, respecto al eje z—? El campo magnético produce un torque en dirección *horizontal*. Pensarían que tal torque está *tratando* de alinear el imán con el campo, pero solamente causa la precesión. Si queremos cambiar el ángulo del giroscopio respecto al eje z, debemos aplicarle un torque *en dirección del eje z*. Si aplicamos un torque que va en la misma dirección que la precesión, el ángulo del giroscopio cambiará y dará una componente más pequeña de $\boldsymbol{J}$ en la dirección z. En la figura 35-3, aumentará el ángulo entre $\boldsymbol{J}$ y el eje z. Si tratamos de impedir la precesión, $\boldsymbol{J}$ se mueve sobre la vertical.

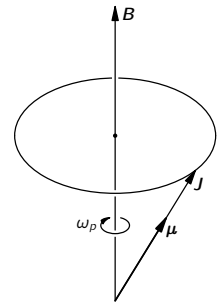


Figura 35-3. La precesión clásica de un átomo con momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ y momento angular $\boldsymbol{J}$.

¿Cómo podemos aplicar la clase de torque que deseamos a nuestro átomo precesando en un campo magnético uniforme? La respuesta es: aplicando un pequeño campo magnético lateral. Puede que piensen que la dirección de este campo magnético tendría que rotar con la precesión del momento magnético de manera que siempre formase con él un ángulo recto, como el campo B' en la figura 35-4(a). Este campo sirve, pero un campo horizontal *alterno* es casi tan bueno. Si tenemos un campo horizontal B' pequeño, el cual está siempre en la dirección x (más o menos) y que oscila con la frecuencia ω_p en cada mitad de ciclo el torque sobre el momento magnético se invierte, de modo que tiene un efecto acumulativo que es casi tan efectivo como un campo magnético rotatorio. Clásicamente, entonces, esperaríamos que la componente del momento magnético según la dirección z cambiase si tenemos un campo magnético oscilatorio muy débil con una frecuencia exactamente ω_p. Es natural que, clásicamente, μ_z cambiaría continuamente, pero en la mecánica cuántica la componente z del momento magnético no se puede ajustar continuamente. Debe saltar de repente de un valor a otro. Hemos hecho la comparación entre las consecuencias de la mecánica clásica y de la mecánica cuántica para darles cierta idea de lo que puede suceder clásicamente y de cómo se relaciona con lo que realmente sucede en la mecánica cuántica. A propósito, notarán que la frecuencia de resonancia esperada es la misma en ambos casos.

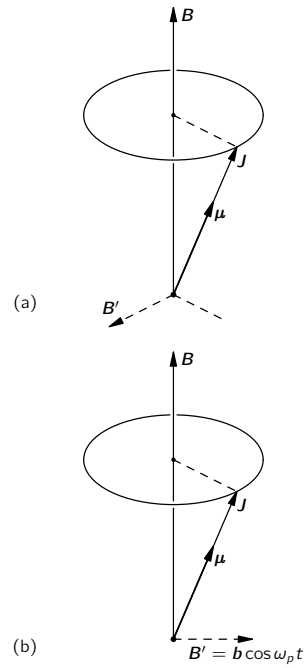


Figura 35-4. El ángulo de precesión de un imán atómico se puede variar por medio de un campo magnético horizontal siempre perpendicular a $\boldsymbol{\mu}$, como en (a), o mediante un campo oscilante, como en (b).

Una nota adicional: según lo que hemos dicho acerca de la mecánica cuántica, no hay razón aparente para que no haya también transiciones a la frecuencia $2\omega_p$. Resulta que no hay nada análogo en el caso clásico, ni tampoco sucede en la teoría cuántica —por lo menos en el método particular de inducir las transiciones que hemos descrito—. Con un campo magnético horizontal oscilante, la probabilidad de que una frecuencia $2\omega_p$ cause de un salto de dos pasos al mismo tiempo es cero.

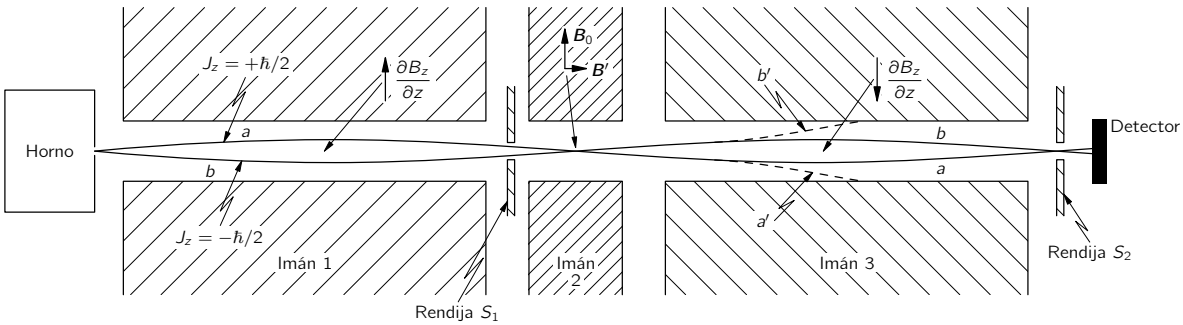


Figura 35-5. El aparato de haces moleculares de Rabi.

La probabilidad de que ocurran transiciones, bien hacia arriba bien hacia abajo, es solamente a la frecuencia ω_p.

Ahora estamos preparados para describir el método de Rabi para la medida de momentos magnéticos. Consideraremos aquí solamente dicha operación para átomos de espín 1/2. La figura 35-5 muestra un diagrama del aparato. Hay un horno que produce un haz de átomos neutros que pasa a través de tres imanes. El imán 1 es exactamente como el de la figura 35-2 y tiene un campo con un gradiente de campo intenso —digamos que con $\partial B_z/\partial_z$ positiva—. Si los átomos tienen momento magnético, serán desviados hacia abajo si $J_z = +\hbar/2$, o hacia arriba si $J_z = -\hbar/2$ (ya que $\boldsymbol{\mu}$ y $\boldsymbol{J}$ son opuestos en los electrones). Si consideramos solamente los átomos que atraviesan la rendija S_1, hay dos trayectorias posibles, como las que se muestran. Los átomos de $J_z = +\hbar/2$ deben seguir la curva a para atravesar la rendija y los de $J_z = -\hbar/2$ deben seguir la curva b. Los átomos que salgan del horno según otros caminos no atravesarán la rendija.

El imán 2 tiene un campo uniforme. No se ejercen fuerzas sobre los átomos en esta región, por lo que atraviesan en línea recta y entran en el imán 3. El imán 3 es exactamente como el imán 1 pero con el campo *invertido* de modo que $\partial B_z/\partial z$ tiene signo opuesto. Los átomos con $J_z = +\hbar/2$ (decimos "con espín hacia arriba") que sintieron un empuje hacia abajo en el imán 1, sienten un empuje *hacia arriba* en el imán 3; continúan en el camino a y atravesando la rendija S_2 llegan a un detector. Los átomos con $J_z = -\hbar/2$ ("con espín hacia abajo") también sienten fuerzas opuestas en los imanes 1 y 3, siguen el camino b que también los conduce al detector a través de la rendija S_2.

El detector se puede construir de diversas maneras, dependiendo del átomo que se mida. Por ejemplo, para átomos de un metal alcalino como el sodio, el detector puede ser un alambre delgado y caliente de tungsteno conectado a un medidor sensible de corriente. Cuando los átomos de sodio aterrizan en el alambre, se evaporan como iones Na^+ dejando atrás un electrón. Se establece una corriente proporcional al número de átomos de sodio que llegan por segundo.

En el espacio entre el imán 2 hay un conjunto de bobinas que produce un campo magnético horizontal $\boldsymbol{B'}$ pequeño. Las bobinas funcionan mediante una corriente que oscila a una frecuencia ω variable. Así, entre los polos del imán 2 hay un campo vertical $\boldsymbol{B_0}$ constante e intenso y un campo horizontal $\boldsymbol{B'}$ oscilante y débil.

Supongan que hacemos la frecuencia ω del campo oscilante igual a ω_p —la frecuencia de "precesión" de los átomos en el campo $\boldsymbol{B}$. El campo oscilante hará que algunos de los átomos que pasen hagan transiciones de un J_z al otro. Un átomo cuyo espín inicial estaba "hacia arriba" ($J_z = +\hbar/2$) puede ser cambiado "hacia abajo" ($J_z = -\hbar/2$). Este átomo tiene ahora invertida la dirección de su momento magnético por lo que sentirá una fuerza *hacia abajo* en el imán 3 y seguirá el camino a', que muestra la figura 35-5. Ya no pasará a través de la rendija S_2 hacia el detector. Análogamente, algunos de los átomos cuyos espines iniciales estaban hacia abajo ($J_z = -\hbar/2$) se invertirán hacia arriba ($J_z = +\hbar/2$) cuando pasen por el imán 2. Seguirán el camino b' y no llegarán al detector.

Si el campo oscilante $\boldsymbol{B}'$ tiene una frecuencia apreciablemente diferente de ω_p, no invertirá espines y los átomos seguirán sus caminos no perturbados hacia el detector. De este modo pueden ver que la frecuencia de "precesión" ω_p de los átomos en el campo $\boldsymbol{B}_0$ se puede encontrar variando la frecuencia ω del campo $\boldsymbol{B}'$ hasta que se observe una disminución en la corriente de átomos que llega al detector. Ocurrirá una disminución de la corriente cuando ω esté "en resonancia" con ω_p. Una representación de la corriente del detector en función de ω se puede parecer a lo que muestra la figura 35-6. Conociendo ω_p podemos obtener el valor de g del átomo.

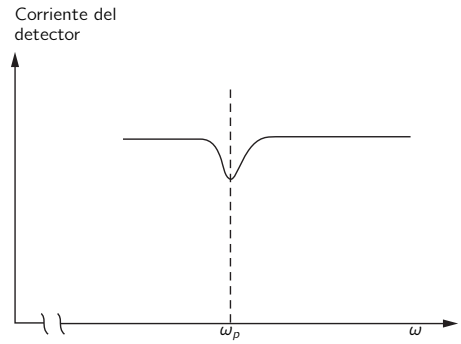


Figura 35-6. La corriente de átomos del haz disminuye cuando $\omega = \omega_p$.

Estos experimentos con haces atómicos, o como se les llama comúnmente, experimentos de resonancia de haces "moleculares", son una manera delicada y bella de medir las propiedades magnéticas de los objetos atómicos. Se puede determinar con gran precisión la frecuencia de resonancia ω_p —de hecho, con una precisión mayor que con la que medimos el campo magnético $\boldsymbol{B}_0$, el cual debemos conocer para encontrar g—.

35-4 Paramagnetismo macroscópico de materiales

Ahora desearíamos describir el fenómeno de paramagnetismo macroscópico de los materiales. Supongan que tenemos una sustancia cuyos átomos tienen momentos magnéticos permanentes, por ejemplo, un cristal de sulfato de cobre. En el cristal hay iones de cobre cuyas capas electrónicas internas tienen un momentum angular resultante y un momento magnético resultante. Así, el ion cobre es un objeto que tiene un momento magnético permanente. Digamos unas palabras sobre cuáles átomos tienen momentos magnéticos y cuáles no. Cualquier átomo, el sodio por ejemplo, que tenga un número *impar* de electrones, tendrá momento magnético. El sodio tiene un electrón en su capa incompleta y este electrón da al átomo un espín y un momento magnético. Sin embargo, comúnmente cuando se forman los compuestos, los electrones adicionales de la capa externa se acoplan con otros electrones cuyos espines tienen direcciones opuestas, de modo que todos los momenta angulares y todos los momentos magnéticos de los electrones de valencia se cancelan. Ésta es la razón, en general, para que las moléculas no tengan momento magnético. Por supuesto, si tienen un gas de átomos de sodio, no existe la compensación.* Del mismo modo, si tienen lo que se llama en química un "radical libre" —un objeto con un número impar de electrones de valencia— los enlaces no se saturan completamente y hay un momentum angular resultante.

En la mayoría de los materiales macroscópicos hay un momento magnético resultante solamente si hay átomos presentes cuya capa electrónica *interna* no está completa. En este caso, puede haber un momentum angular resultante y un momentum magnético. Estos átomos se encuentran en la parte de los "elementos de transición" de la tabla periódica —por ejemplo, el cromo, manganeso, hierro, níquel, cobalto, paladio y el platino son elementos de esta clase—. Todos los elementos de las tierras raras también tienen capas internas incompletas y, por lo tanto, tienen momentos magnéticos permanentes. Hay un par de elementos extraños que también tienen momentos magnéticos; uno de ellos es el oxígeno líquido, pero dejaremos que el departamento de química les explique la razón.

Supongan ahora que tenemos una caja llena de átomos o moléculas con momentos permanentes —digamos un gas, un líquido o un cristal—. Nos gustaría saber qué sucede si aplicamos un campo magnético externo. Sin *ningún* campo magnético, los átomos son empujados desordenadamente por los movimientos térmicos y los momentos terminan apuntando en todas direcciones. Pero cuando hay un campo magnético, éste trata de alinear los imanes pequeños; hay entonces más momentos en la dirección del campo que en otra dirección. El material se ha "magnetizado".

Definimos la *magnetización* $\boldsymbol{M}$ de un material como el momento magnético resultante por unidad de volumen, con lo cual entendemos la suma vectorial de

* Generalmente el vapor de Na es en su mayoría monoatómico, a menos que haya algunas moléculas de Na_2.

todos los momentos magnéticos atómicos en una unidad de volumen. Si hay N átomos por unidad de volumen y su momento *promedio* es $\langle\boldsymbol{\mu}\rangle_{\text{prom}}$, entonces $\boldsymbol{M}$ se puede expresar como N por el momento atómico promedio:

$$\boldsymbol{M} = N\langle\boldsymbol{\mu}\rangle_{\text{prom}}. \tag{35.8}$$

La definición de $\boldsymbol{M}$ corresponde a la definición de polarización eléctrica $\boldsymbol{P}$ del capítulo 10.

La teoría clásica del paramagnetismo es exactamente como la teoría de la constante dieléctrica que dimos en el capítulo 11. Se supone que cada uno de los átomos tenga un momento magnético $\boldsymbol{\mu}$, que siempre tiene el mismo módulo, pero que puede apuntar en cualquier dirección. En un campo $\boldsymbol{B}$, la energía magnética es $-\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B} = -\mu B\cos\theta$, donde θ es el ángulo formado por el momento y el campo. Según la mecánica estadística, la probabilidad relativa de tener cualquier ángulo es $e^{-\text{energía}/kT}$ por lo que los ángulos próximos a cero son más probables que los próximos a π. Procediendo exactamente como hicimos en la sección 11-3, encontramos que para campos magnéticos pequeños, $\boldsymbol{M}$ es paralelo a $\boldsymbol{B}$ y su módulo es

$$M = \frac{N\mu^2 B}{3kT}. \tag{35.9}$$

[Véase ecuación (11.20).] Esta fórmula aproximada es correcta solamente para $\mu B/kT$ mucho menor que uno.

Encontramos que la magnetización inducida —el momento magnético por unidad de volumen— es proporcional al campo magnético. Éste es el fenómeno del paramagnetismo. Verán que el efecto es más intenso a bajas temperaturas y más débil a temperaturas más altas. Cuando aplicamos un campo a una sustancia, ella desarrolla, para campos pequeños, un momento magnético proporcional al campo. Se llama *susceptibilidad* magnética al cociente entre M y B (para campos pequeños).

Ahora queremos considerar el paramagnetismo desde el punto de vista de la mecánica cuántica. Tomamos en primer lugar un átomo de espín 1/2. En ausencia de campo magnético los átomos tienen una cierta energía, pero en un campo magnético hay dos energías posibles, una para cada valor de J_z. Para $J_z = +\hbar/2$, el campo magnético hace que la energía sufra una variación

$$\Delta U_1 = +g\left(\frac{q_e\hbar}{2m}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot B. \tag{35.10}$$

(El desplazamiento de energía ΔU es positivo para un átomo ya que la carga del electrón es negativa.) Para $J_z = -\hbar/2$, la energía varía en la cantidad

$$\Delta U_2 = -g\left(\frac{q_e\hbar}{2m}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot B. \tag{35.11}$$

Para ahorrar escritura, hagamos

$$\mu_0 = g\left(\frac{q_e\hbar}{2m}\right)\cdot\frac{1}{2}; \tag{35.12}$$

y entonces

$$\Delta U = \pm\mu_0 B. \tag{35.13}$$

El significado de μ_0 es claro: $-\mu_0$ es la componente z del momento magnético en caso de que el espín esté hacia arriba y $+\mu_0$ es la componente z del momento magnético en el caso de espín hacia abajo.

Ahora bien, la mecánica estadística nos dice que la probabilidad de que un átomo esté en un estado u otro es proporcional a

$$e^{-(\text{energía del estado})/kT}.$$

En ausencia del campo magnético, los dos estados tienen la misma energía y por eso cuando hay equilibrio en un campo magnético, las probabilidades son proporcionales a

$$e^{-\Delta U/kT}. \tag{35.14}$$

El número de átomos por unidad de volumen con espín hacia arriba es

$$N_{\text{arriba}} = ae^{-\mu_0 B/kT}, \tag{35.15}$$

y el número con espín hacia abajo es

$$N_{\text{abajo}} = ae^{+\mu_0 B/kT}. \tag{35.16}$$

La constante a hay que determinarla de manera que

$$N_{\text{arriba}} + N_{\text{abajo}} = N, \tag{35.17}$$

el número total de átomos por unidad de volumen. Así, obtenemos

$$a = \frac{N}{e^{+\mu_0 B/kT} + e^{-\mu_0 B/kT}}. \tag{35.18}$$

Lo que nos interesa es el momento magnético *promedio* según el eje z. Los átomos de espín hacia arriba contribuirán con un momento $-\mu_0$ y los de espín hacia abajo lo harán con $+\mu_0$; de este modo, el momento promedio es

$$\langle\mu\rangle_{\text{prom}} = \frac{N_{\text{arriba}}(-\mu_0) + N_{\text{abajo}}(+\mu_0)}{N}. \tag{35.19}$$

El momento magnético por unidad de volumen M es entonces $N\langle\mu\rangle_{\text{prom}}$. Usando las ecuaciones (35.15), (35.16) y (35.17) obtenemos

$$M = N\mu_0 \frac{e^{+\mu_0 B/kT} - e^{-\mu_0 B/kT}}{e^{+\mu_0 B/kT} + e^{-\mu_0 B/kT}}. \tag{35.20}$$

Ésta es la fórmula cuántica para M en el caso de átomos con $j = 1/2$. A propósito, esta fórmula también se puede escribir de un modo algo más conciso en términos de la función tangente hiperbólica:

$$M = N\mu_0 \tanh \frac{\mu_0 B}{kT}. \tag{35.21}$$

La figura 35-7 muestra una representación de M en función de B. Cuando B se hace muy grande, la tangente hiperbólica se aproxima a 1 y M hacia el valor límite $N\mu_0$. Por consiguiente, para campos intensos la magnetización se *satura*. Podemos ver por qué ocurre así; para campos suficientemente intensos todos los momentos están alineados en la misma dirección. En otras palabras, todos se encuentran en el estado de espín hacia abajo y cada átomo contribuye con el momento μ_0.

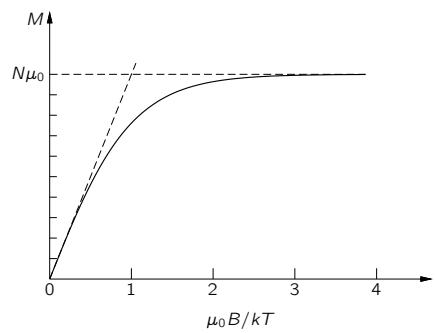


Figura 35-7. Variación de la magnetización paramagnética en función de la intensidad del campo magnético B.

En la mayoría de los casos normales —digamos, para los momentos típicos, la temperatura ambiente y los campos que comúnmente se puede obtener (del orden de 10 000 gauss)— el cociente $\mu_0 B/kT$ es del orden 0.002. Se debe bajar mucho la temperatura para ver la saturación. A temperaturas normales, se puede remplazar $\tanh x$ por x y escribir

$$M = \frac{N\mu_0^2 B}{kT}. \tag{35.22}$$

Como en la teoría clásica, M es proporcional a B. De hecho, la fórmula es casi exactamente igual, excepto que parece que falta un factor de 1/3. Pero aún necesitamos relacionar la μ_0 de la fórmula cuántica con la μ que aparece en el resultado clásico, ecuación (35.9).

En la fórmula clásica, lo que aparece es $\mu^2 = \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mu}$, el cuadrado del vector momento magnético, o sea

$$\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{\mu} = \left(g \frac{q_e}{2m}\right)^2 \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{J}. \tag{35.23}$$

Señalamos en el capítulo anterior que con mucha probabilidad pueden obtener la respuesta correcta de un cálculo clásico remplazando $\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J}$ por $j(j+1)\hbar^2$. En nuestro caso particular tenemos que $j=1/2$, por lo que

$$j(j+1)\hbar^2=\tfrac{3}{4}\hbar^2.$$

Sustituyendo esto en lugar de $\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{J}$ en la ecuación (35.23), obtenemos

$$\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\mu}=\left(g\,\frac{q_e}{2m}\right)^2\frac{3\hbar^2}{4},$$

o en función de μ_0, definida en la ecuación (35.12),

$$\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{\mu}=3\mu_0^2.$$

Sustituyendo μ^2 en la fórmula clásica (35.9) por esto, verdaderamente reproduce la fórmula cuántica correcta, ecuación (35.22).

La teoría cuántica del paramagnetismo se extiende fácilmente a átomos de cualquier espín j. La magnetización en un campo débil es

$$M=Ng^2\,\frac{j(j+1)}{3}\,\frac{\mu_B^2B}{kT}, \tag{35.24}$$

donde

$$\mu_B=\frac{q_e\hbar}{2m} \tag{35.25}$$

es una combinación de constantes con las dimensiones de un momento magnético. La mayoría de los átomos tienen momentos de este tamaño aproximadamente. Se llama *magnetón de Bohr*. El momento magnético de espín del electrón vale casi exactamente un magnetón de Bohr.

35-5 Enfriamiento por desmagnetización adiabática

Hay una aplicación especial del paramagnetismo que es muy interesante. A muy bajas temperaturas es posible alinear los imanes atómicos en un campo intenso. Es posible entonces descender a temperaturas *extremadamente* bajas mediante un proceso llamado *desmagnetización adiabática*. Podemos tomar una sal paramagnética (por ejemplo, una que contenga un cierto número de átomos de tierras raras como nitrato amónico de praseodimio), y comenzar a enfriarla con helio líquido hasta uno o dos grados absolutos en un campo magnético intenso. Así, el factor $\mu B/kT$ es mayor que 1 —más parecido a 2 o 3—. La mayoría de los espines están alineados y la magnetización está casi saturada. Digamos, para simplificar, que el campo es muy potente y que la temperatura es muy baja, por lo que casi todos los átomos están alineados. Ahora aislamos la sal térmicamente (digamos que quitando helio líquido y haciendo un buen vacío) y apagamos el campo magnético. La temperatura de la sal sigue bajando.

Ahora bien, si quitasen el campo *de repente*, el movimiento desordenado y las sacudidas de los átomos en la red cristalina sacarían gradualmente todos los espines del alineamiento. Unos estarían hacia arriba y otros hacia abajo. Pero si no hay campo (y despreciando las interacciones entre los imanes atómicos, que serán solamente un error despreciable), no se necesita energía para voltear los imanes atómicos. Podrían distribuir al azar sus espines sin ningún cambio de energía y por lo tanto sin ningún cambio de temperatura.

Supongan, sin embargo, que mientras los imanes atómicos están siendo zarandeados por el movimiento térmico, existe todavía un poco de campo magnético presente. Entonces se necesita trabajo para ponerlos en dirección opuesta al campo —*deben realizar trabajo contra el campo*—. Esto toma energía de los movimientos térmicos y baja la temperatura. Así pues, si el campo magnético intenso no se retira muy rápidamente, la temperatura de la sal disminuirá —se ha enfriado por desmagnetización—. Desde el punto de vista cuántico, cuando el campo es intenso todos los átomos están en el estado inferior, porque la

probabilidad de que alguno se encuentre en el estado superior es increíblemente pequeña. Pero a medida que disminuye el campo hay más y más probabilidad de que las fluctuaciones térmicas empujen un átomo al estado superior. Cuando esto sucede, el átomo absorbe la energía $\Delta U = \mu_0 B$. Por consiguiente, si el campo magnético se saca lentamente, las transiciones magnéticas pueden tomar energía de las vibraciones térmicas del cristal, enfriándolo. Así que es posible ir desde una temperatura de unos pocos grados absolutos hasta una temperatura de unas pocas milésimas de grado.

¿Les gustaría enfriar aún más? Pues bien, la naturaleza ha proporcionado un medio. Ya hemos mencionado que los núcleos atómicos también tienen momentos magnéticos. Nuestras fórmulas del paramagnetismo sirven igualmente bien para los núcleos, excepto que los momentos de los núcleos son aproximadamente un *millar de veces más pequeños*. [Son del orden de magnitud de $q\hbar/2m_p$ donde m_p es la masa del *protón*, por lo que son menores por el cociente de las masas del electrón y del protón.] Con tales momentos magnéticos, aun a una temperatura de 2°K, el factor $\mu B/kT$ es solamente unas pocas milésimas. Pero si usamos el proceso de desmagnetización paramagnética para descender a una temperatura de unas milésimas de grado, $\mu B/kT$ se hace casi 1 —a estas temperaturas bajas podemos comenzar a saturar los momentos nucleares—. Es buena suerte, ya que es posible usar entonces la desmagnetización adiabática del magnetismo *nuclear* para alcanzar temperaturas aún más bajas. En resumen, es posible realizar dos etapas para enfriamiento magnético. Primero usamos desmagnetización adiabática de iones paramagnéticos hasta alcanzar unas milésimas de grado. Luego, usamos la sal paramagnética fría para enfriar cierto material que tenga un magnetismo nuclear intenso. Finalmente, cuando quitemos el campo magnético de este material, su temperatura descenderá a unas *millonésimas* de grado sobre el cero absoluto —si lo hemos hecho todo muy cuidadosamente—.

35-6 Resonancia magnética nuclear

Hemos dicho que el paramagnetismo atómico es muy pequeño y que el magnetismo nuclear es aún un millar de veces menor. Incluso así es relativamente fácil observar el magnetismo nuclear mediante el fenómeno de "resonancia magnética nuclear". Supongan que tomamos una sustancia, como agua, en la que cualesquiera de los espines electrónicos están exactamente equilibrados de manera que su momento magnético resultante es cero. Las moléculas aún tendrán un momento magnético muy, muy débil debido al momento magnético nuclear del núcleo de hidrógeno. Supongan que colocamos una muestra pequeña de agua en un campo magnético $\boldsymbol{B}$. Como los protones (del hidrógeno) tienen espín 1/2, tendrán dos estados posibles de energía. Si el agua está en equilibrio térmico, habrá levemente más protones en los estados de energía más baja —con sus momentos paralelos al campo—. Hay un momento magnético pequeño resultante por unidad de volumen. Como el momento del protón es solamente una milésima de un momento atómico, la magnetización que va como μ^2 —usando la ecuación (35.22)— tiene solamente una millonésima de la intensidad del paramagnetismo atómico típico. (Ésta es la razón por la que hemos escogido un material sin magnetismo atómico.) Si lo calculan, la diferencia entre el número de protones con espín hacia arriba y con espín hacia abajo es solamente uno en 10^8; ¡el efecto es verdaderamente muy pequeño! No obstante, se puede observar de la siguiente manera.

Supongan que rodeamos la muestra de agua con una pequeña bobina que produce un pequeño campo magnético horizontal oscilante. Si el campo oscila a la frecuencia ω_p, inducirá transiciones entre los dos estados de energía —justamente como describimos en el caso del experimento de Rabi en la sección 35-3—. Cuando un protón salta de un estado de energía superior a uno inferior, suelta la energía $2\mu_z B$, que, como hemos visto, es igual a $\hbar\omega_p$. Si salta del estado de energía inferior al superior, *absorberá* la energía $\hbar\omega_p$ de la bobina. Como hay levemente más protones en el estado inferior que en el superior, habrá una *absorción* resultante

de energía de la bobina. Aunque el efecto es muy pequeño, la leve absorción de energía se puede ver con un amplificador electrónico sensible.

Lo mismo que en el experimento de haces moleculares de Rabi, la absorción de energía se verá solamente cuando el campo oscilante esté en resonancia, es decir, cuando

$$\omega = \omega_p = g\left(\frac{q_e}{2m_p}\right)B.$$

Normalmente es más conveniente buscar la resonancia variando B y conservando ω fijo. La absorción de energía aparecerá evidentemente cuando

$$B = \frac{2m_p}{gq_e}\,\omega.$$

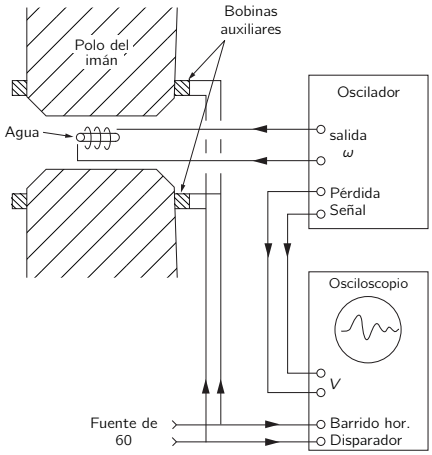


Figura 35-8. Un aparato de resonancia magnética nuclear.

La figura 35-8 muestra un típico aparato de resonancia magnética nuclear. Un oscilador de alta frecuencia se conecta a la bobina pequeña colocada entre los polos de un gran electroimán. Dos bobinas pequeñas auxiliares se conectan a una corriente de 60 ciclos de modo que el campo magnético se "tambalea" alrededor de su valor promedio en una cantidad muy pequeña. Como ejemplo, digamos que la corriente principal del imán se ajusta para producir un campo de 5 000 gauss y que las bobinas auxiliares producen una variación de ± 1 gauss respecto a ese valor. Si se coloca el oscilador a 21.2 megaciclos por segundo, se encontrará la resonancia protónica cada vez que el campo barra 5 000 gauss [usando la ecuación (34.13) con $g = 5.58$ para el protón].

El circuito del oscilador es de tal forma que da una señal de salida adicional proporcional a cualquier *variación* de potencia que se absorba del oscilador. Esta señal alimenta el amplificador de desviación vertical de un osciloscopio. El barrido horizontal del osciloscopio se dispara una sola vez en cada ciclo de la frecuencia tambaleante del campo. (Más comúnmente, la desviación horizontal se hace proporcional al campo tambaleante.)

Antes de que la muestra de agua se coloque en la bobina de alta frecuencia, la potencia sacada del oscilador tiene algún valor. (No varía con el campo magnético.) Sin embargo, cuando se coloca una botella de agua en la bobina, aparece una señal en el osciloscopio, como lo muestra la figura. Vemos una imagen de la potencia absorbida por la reorientación del espín de los protones.

En la práctica, es difícil saber cómo ajustar el imán principal a exactamente 5 000 gauss. Lo que se hace es ajustar la corriente del imán principal hasta que la señal de resonancia aparece en el osciloscopio. Resulta que ésta es ahora la forma más conveniente de hacer una medida precisa de la intensidad de un campo magnético. Desde luego, antes *alguien* tuvo que medir muchas veces y con precisión el campo magnético y la frecuencia para determinar el valor de g del protón. Pero una vez que se hace esto, un aparato de resonancia protónica como el de la figura se puede usar como "magnetómetro de resonancia protónica".

Diremos algo de la forma de la señal. Si variásemos el campo magnético muy lentamente, esperaríamos ver una curva de resonancia normal. La absorción de energía sería máxima cuando ω_p igualase exactamente la frecuencia del oscilador. Habría alguna absorción a frecuencias cercanas ya que todos los protones no se encuentran en el mismo campo exactamente —y campos diferentes significan frecuencias de resonancia levemente distintas—.

Incidentalmente, uno se podría preguntar si a la frecuencia de resonancia deberíamos ver alguna señal. ¿No sería de esperar que el campo de alta frecuencia igualase la población de los dos estados —así no habría señal excepto en el momento de colocar el agua—? No exactamente, porque aun cuando *tratemos* de igualar las dos poblaciones, los movimientos térmicos por su parte tratan de conservar la proporción para la temperatura T. Si nos situamos en la resonancia, la potencia que los núcleos absorben es justamente la que se pierde por los movimientos térmicos. Sin embargo, hay relativamente poco "contacto térmico" entre los momentos magnéticos protónicos y los movimientos atómicos. Los protones están relativamente aislados en el centro de las distribuciones electrónicas. Por lo tanto, la señal de resonancia en agua pura es en realidad usualmente muy

pequeña para ser vista. Para aumentar la absorción es necesario incrementar el "contacto térmico". Esto se hace comúnmente añadiendo al agua un poco de óxido de hierro. Los átomos de hierro son como imanes pequeños; cuando se zarandean en su danza térmica, producen campos magnéticos danzantes pequeñísimos en los protones. Estos campos variables "acoplan" los imanes protónicos a las vibraciones atómicas y tienden a establecer el equilibrio térmico. Es por este "acoplamiento" que los protones en los estados de energía más alta pueden perder su energía y así son capaces de absorber nuevamente energía del oscilador.

En la práctica la señal de salida de un aparato de resonancia nuclear no se parece a una curva de resonancia normal. Habitualmente es una señal más complicada con oscilaciones —como la dibujada en la figura—. Tales señales aparecen debido a los campos variables. La explicación de ello debería ser cuántica, pero se puede demostrar que en esos experimentos las ideas clásicas de momentos que precesan dan siempre la respuesta correcta. Clásicamente diríamos que cuando llegamos a la resonancia comenzamos a tener un montón de imanes nucleares que precesan en sincronía. Al realizarlo, hacemos que precesen *juntos*. Estos imanes nucleares, todos rotando juntos, inducirán una fem en la bobina del oscilador a la frecuencia ω_p. Pero como el campo magnético aumenta con el tiempo, la frecuencia de precesión también aumenta y el voltaje inducido se encuentra pronto a una frecuencia un poco mayor que la frecuencia del oscilador. Cuando la fem inducida esté alternadamente en fase o desfasada con el oscilador, la potencia "absorbida" será positiva o negativa alternadamente. Así, en el osciloscopio vemos pulsación entre la frecuencia protónica y la frecuencia del oscilador. Como las frecuencias de los protones no son todas idénticas (protones diferentes se encuentran en campos ligeramente distintos) y también posiblemente debido a la perturbación del óxido de hierro en el agua, los momentos que precesan libremente pronto se desfasan y la pulsación desaparece.

Estos fenómenos de resonancia magnética se han usado de diversos modos como herramientas para nuevos hallazgos en la materia —especialmente en química y en física nuclear—. Está demás decir que los valores numéricos de los momentos magnéticos de los núcleos nos indican algo de su estructura. Se ha aprendido mucho en química con la estructura (o forma) de las resonancias. A causa de los campos magnéticos producidos por núcleos cercanos, la posición exacta de la resonancia nuclear está algo movida dependiendo del ambiente en que un núcleo particular se encuentra. La medida de este desplazamiento ayuda a determinar cuáles átomos están cerca de cuáles y ayuda a esclarecer los detalles de la estructura molecular. Igualmente importante es la resonancia de espín electrónico de radicales libres. Aunque no haya muchos de esos radicales en el equilibrio, sí son con frecuencia estados intermedios de reacciones químicas. Una medida de una resonancia de espín electrónico es una comprobación delicada de la presencia de radicales libres y es a menudo la clave para entender el mecanismo de ciertas reacciones químicas.

36

Ferromagnetismo

36-1 Corrientes de magnetización
36-2 El campo $\boldsymbol{H}$
36-3 La curva de magnetización
36-4 Inductancias con núcleo de hierro
36-5 Electroimanes
36-6 Magnetización espontánea

36-1 Corrientes de magnetización

En este capítulo discutiremos algunos materiales en los cuales la fuerza resultante de los momentos magnéticos que hay en el material es mucho mayor que en el caso del paramagnetismo o el diamagnetismo. El fenómeno se llama *ferromagnetismo*. En materiales paramagnéticos y diamagnéticos los momentos magnéticos inducidos generalmente son tan débiles que no necesitamos preocuparnos de los campos adicionales producidos por los momentos magnéticos. Pero en materiales *ferromagnéticos* los momentos magnéticos inducidos por los campos magnéticos aplicados son muy grandes y tienen un gran efecto sobre los mismos campos. En realidad, los momentos inducidos son tan fuertes que a menudo son los efectos dominantes en la producción de los campos observados. Por lo tanto, entre las cuestiones de que nos debemos preocupar está la teoría matemática de los grandes momentos magnéticos inducidos. Por supuesto ésta es simplemente una cuestión técnica. El problema real es ¿por qué los momentos magnéticos son tan fuertes —cómo funciona todo esto—? Más adelante volveremos sobre este asunto.

Revisar
Volumen II, capítulo 10, *Dieléctricos*
Volumen II, capítulo 17, *Las leyes de inducción*

Encontrar los campos magnéticos de materiales ferromagnéticos es algo como encontrar los campos electrostáticos en presencia de dieléctricos. Recordarán que primero describimos las propiedades internas de un dieléctrico en función de un campo vectorial $\boldsymbol{P}$, el momento dipolar por unidad de volumen. Luego nos imaginamos que los efectos de esta polarización son equivalentes a una densidad de carga ρ_{pol} dada por la divergencia de $\boldsymbol{P}$:

$$\rho_{\text{pol}} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P}. \tag{36.1}$$

La carga total en cualquier situación se puede escribir como la suma de esta carga de polarización más todas las otras cargas, cuya densidad escribimos* ρ_{otras}. Por consiguiente la ecuación de Maxwell que relaciona la divergencia de $\boldsymbol{E}$ con la densidad de carga se transforma en

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{pol}} + \rho_{\text{otras}}}{\epsilon_0},$$

o

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = -\frac{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P}}{\epsilon_0} + \frac{\rho_{\text{otras}}}{\epsilon_0}.$$

Entonces podemos sacar la parte de polarización de la carga y pasarla al otro miembro de la ecuación, para obtener la nueva ley

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\epsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}) = \rho_{\text{otras}}. \tag{36.2}$$

La nueva ley dice que la divergencia de la cantidad $(\varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P})$ es igual a la densidad de las otras cargas.

Juntar $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{P}$ como en la ecuación (36.2) es útil, por supuesto, solamente si conocemos alguna relación entre ellos. Hemos visto que la teoría que relaciona el momento dipolar eléctrico inducido con el campo era un asunto relativamente complicado y se puede realmente aplicar sólo a ciertas situaciones sencillas y aun entonces como una aproximación. Querría recordarles una de las ideas aproximadas que usamos. Para hallar el momento dipolar inducido de un átomo

* Si todas las "otras" cargas están en conductores, entonces ρ_{otras} sería la misma que ρ_{lib} del capítulo 10.

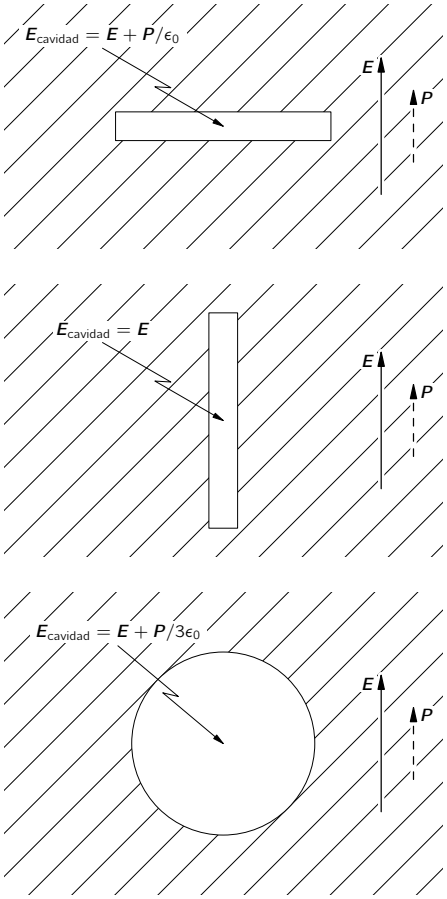


Figura 36-1. El campo eléctrico dentro de una cavidad en un dieléctrico depende de la forma de la cavidad.

dentro de un dieléctrico, es necesario conocer el campo eléctrico que actúa sobre un átomo individual. Hicimos la aproximación —que no es tan mala en muchos casos— de que el campo sobre el átomo es el mismo que habría en el centro del agujero pequeño que quedaría si sacáramos el átomo (sin cambiar los momentos dipolares de todos los átomos vecinos). También recordarán que el campo eléctrico en una cavidad en un dieléctrico polarizado depende de la forma de la cavidad. Resumimos nuestro resultado anterior en la figura 36-1. Para una cavidad delgada en forma de disco perpendicular a la polarización, el campo eléctrico en la cavidad está dado por

$$\boldsymbol{E}_{\text{cavidad}} = \boldsymbol{E}_{\text{dieléctrico}} + \frac{\boldsymbol{P}}{\epsilon_0},$$

lo cual demostramos usando la ley de Gauss. Por otra parte, en una ranura en forma de aguja paralela a la polarización, demostramos —usando el hecho de que el rotacional de $\boldsymbol{E}$ es cero— que los campos eléctricos dentro y fuera de la ranura son iguales. Al final, hallamos que para una cavidad esférica el campo eléctrico estaba a un tercio de camino entre el campo de la ranura y el campo del disco:

$$\boldsymbol{E}_{\text{cavidad}} = \boldsymbol{E}_{\text{dieléctrico}} + \frac{1}{3}\frac{\boldsymbol{P}}{\epsilon_0} \text{ (cavidad esférica).} \tag{36.3}$$

Éste fue el campo usado al considerar lo que le sucede a un átomo dentro de un dieléctrico polarizado.

Discutiremos ahora lo análogo de todo esto en el caso del magnetismo. Una manera sencilla y directa de hacerlo es diciendo que $\boldsymbol{M}$, el momento magnético por unidad de volumen, es como $\boldsymbol{P}$, el momento dipolar eléctrico por unidad de volumen, y que, por consiguiente, menos la divergencia de $\boldsymbol{M}$ es equivalente a una "densidad de carga magnética" ρ_m —signifique lo que signifique—. Por supuesto, el problema es que no hay tal cosa como una "carga magnética" en el mundo físico. Como sabemos, la divergencia de $\boldsymbol{B}$ siempre es cero. Pero esto no nos debe detener de crear una *analogía* artificial y escribir

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{M} = -\rho_m, \tag{36.4}$$

donde se debe entender que ρ_m es puramente matemática. Entonces podríamos hacer una analogía completa con el caso electrostático y usar todas nuestras viejas ecuaciones de la electrostática. Se ha hecho a menudo algo parecido. En realidad, históricamente, hasta se creyó que la analogía era correcta. Se creía que la cantidad ρ_m representaba la densidad de "polos magnéticos". No obstante, en la actualidad sabemos que la magnetización de los materiales proviene de corrientes circulantes dentro de los átomos —debidas a los electrones girando sobre sí mismos o al movimiento de los electrones en el átomo—. Por lo tanto, es más elegante desde el punto de vista físico describir las cosas de un modo realista en función de las corrientes atómicas, en lugar de hacerlo en función de una densidad de ciertos "polos magnéticos" imaginarios. A propósito, estas corrientes algunas veces son llamadas corrientes "amperianas", porque Ampère fue el primero en sugerir que el magnetismo de la materia provenía de corrientes atómicas circulantes.

La densidad real de corriente microscópica en la materia magnetizada es, por supuesto, muy complicada. Su valor depende de qué punto se esté mirando en el átomo —es grande en algunos lugares y pequeño en otros—; va en una dirección en una parte del átomo y en la dirección opuesta en otra (como varía el campo eléctrico microscópico dentro de un dieléctrico). En muchos problemas prácticos, sin embargo, solamente estamos interesados en los campos fuera de la materia o en el campo magnético *promedio* dentro de la materia —donde damos a entender un promedio tomado sobre muchísimos átomos—. Sólo para tales problemas *macroscópicos* es conveniente describir el estado magnético de la materia en función de $\boldsymbol{M}$, el momento dipolar promedio por unidad de volumen. Ahora nos interesa demostrar que las corrientes atómicas de la materia magnetizada pueden dar lugar a ciertas corrientes macroscópicas que están relacionadas con $\boldsymbol{M}$.

Con tal objeto separemos la densidad de corriente $\boldsymbol{j}$ —que es la fuente real de los campos magnéticos— en varias partes: una parte para describir las corrientes circulantes de los imanes atómicos y las otras para describir cualesquier otra corriente que haya. Generalmente es más conveniente separar las corrientes en tres partes. En el capítulo 32 hicimos una distinción entre las corrientes que circulan libremente en los conductores y las que se deben a los movimientos de oscilación de las cargas ligadas en los dieléctricos. En la sección 32-2 escribimos

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_{\text{pol}} + \boldsymbol{j}_{\text{otras}},$$

donde $\boldsymbol{j}_{\text{pol}}$ representaba las corrientes debidas al movimiento de las cargas ligadas en los dieléctricos y $\boldsymbol{j}_{\text{otras}}$ se encargaba de las otras corrientes. Ahora avanzaremos otro paso. Separemos $\boldsymbol{j}_{\text{otras}}$ en una parte, $\boldsymbol{j}_{\text{mag}}$, que describe las corrientes promedio dentro de materiales magnetizados y un término adicional que podemos llamar $\boldsymbol{j}_{\text{cond}}$ para lo que quede. El último término generalmente se referirá a las corrientes en conductores, pero también puede incluir otras corrientes —por ejemplo, las corrientes debidas a cargas que se mueven libremente por el espacio vacío—. Así, escribiremos para la densidad de corriente total:

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_{\text{pol}} + \boldsymbol{j}_{\text{mag}} + \boldsymbol{j}_{\text{cond}}. \tag{36.5}$$

Por supuesto, es esta corriente total la que corresponde poner en la ecuación de Maxwell para el rotacional de $\boldsymbol{B}$:

$$c^2\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{36.6}$$

Ahora tenemos que relacionar la corriente $\boldsymbol{j}_{\text{mag}}$ con el vector magnetizado $\boldsymbol{M}$. Para que puedan ver hacia dónde vamos, les diremos que el resultado va a ser

$$\boldsymbol{j}_{\text{mag}} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{M}. \tag{36.7}$$

Si se nos da el vector magnetizado $\boldsymbol{M}$ en todo punto de un material magnético, la densidad de corriente de circulación está dada por el rotor de $\boldsymbol{M}$. Veamos si podemos entender por qué es así.

Tomemos primero el caso de una barra cilíndrica que tiene una magnetización uniforme paralela a su eje. Físicamente, sabemos que tal magnetización uniforme realmente significa una densidad uniforme de corriente atómica que circula en cualquier lugar dentro del material. Supongan que tratemos de imaginar cuál sería el aspecto de las corrientes en una sección transversal del material. Esperaríamos ver corrientes algo así como las mostradas en la figura 36-2. Además, todas las corrientes atómicas dan vueltas y vueltas en un círculo pequeño, con cada una de las corrientes circulantes dando vueltas en el mismo sentido. Ahora bien, ¿cuál es la corriente efectiva? En la mayor parte de la barra no hay ningún efecto debido a que a cada corriente corresponde otra inmediatamente contigua que va en sentido opuesto. Si imaginamos una superficie pequeña —pero mucho más grande que un solo átomo— como la indicada en la figura 36-2 por la línea $\overline{AB}$, la corriente resultante a través de tal superficie es cero. No hay corriente resultante en ninguna parte dentro del material. Noten, sin embargo, que en la superficie del material hay corrientes atómicas que no son canceladas por ninguna corriente vecina que vaya en sentido opuesto. En la superficie hay una corriente resultante que siempre irá en el mismo sentido alrededor de la barra. Ahora ven por qué dijimos anteriormente que una barra uniformemente magnetizada es equivalente a un solenoide largo por el que circula una corriente eléctrica.

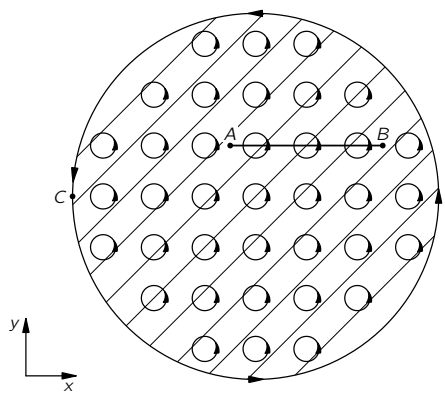


Figura 36-2. Diagrama esquemático de las corrientes atómicas circulantes como se ven en una sección transversal de una barra de hierro magnetizada en la dirección z.

¿Cómo encaja este punto de vista con la ecuación (36.7)? Primero, dentro del material la magnetización $\boldsymbol{M}$ es constante, así que todas sus derivadas son cero. Esto concuerda con nuestra imagen geométrica. No obstante, en la superficie $\boldsymbol{M}$ no es realmente constante —es constante hasta el borde y luego va de repente a cero—. Así pues, justo en la superficie hay gradientes tremendos que, de acuerdo a la ecuación (36.7), darán una alta densidad de corriente. Supongan que observamos lo que sucede cerca del punto C en la figura 36-2. Tomando las

direcciones x y y como en la figura, la magnetización $\boldsymbol{M}$ está en la dirección z. Escribiendo las componentes de la ecuación (36.7), tenemos

$$\frac{\partial M_z}{\partial y} = (j_{\text{mag}})_x,$$
$$-\frac{\partial M_z}{\partial x} = (j_{\text{mag}})_y. \tag{36.8}$$

En el punto C, la derivada $\partial M_z/\partial y$ es cero, pero $\partial M_z/\partial x$ es grande y positiva. La ecuación (36.7) indica que hay una gran densidad de corriente en la dirección menos y. Esto concuerda con nuestra imagen de una corriente de superficie que va alrededor de la barra.

Ahora queremos hallar la densidad de corriente para un caso más complicado en el cual la magnetización varía de un punto a otro en un material. Es fácil ver cualitativamente que si la magnetización es diferente en dos regiones contiguas, no habrá una cancelación perfecta de las corrientes circulantes; por ello habrá una corriente resultante en el volumen del material. Es este efecto el que queremos calcular cuantitativamente.

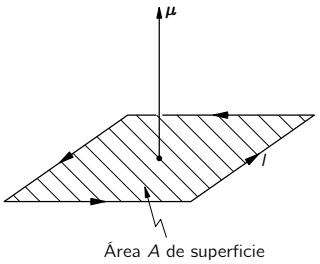


Figura 36-3. El momento dipolar μ de un lazo de corriente es IA.

Primero necesitamos recordar los resultados de la sección 14-5, que una corriente circulante I tiene un momento magnético μ dado por

$$\mu = IA, \tag{36.9}$$

donde A es el área del lazo de corriente (véase la figura 36-3). Consideremos ahora un pequeño bloque rectangular dentro de un material magnetizado, como el esbozado en la figura 36-4. Tomamos el bloque tan pequeño que podamos considerar que la magnetización es uniforme dentro de él. Si este bloque tiene una magnetización M_z en la dirección z, el efecto resultante será el mismo que si hubiese una corriente de superficie alrededor de los lados verticales, como se muestra. Podemos hallar la magnitud de estas corrientes usando la ecuación (36.9). El momento magnético total del bloque es igual al producto de la magnetización por el volumen:

$$\mu = M_z(abc),$$

de donde obtenemos (recordando que el área de la curva es ac)

$$I = M_z b.$$

En otras palabras, la corriente por unidad de longitud (verticalmente) en cada una de las superficies verticales es igual a M_z.

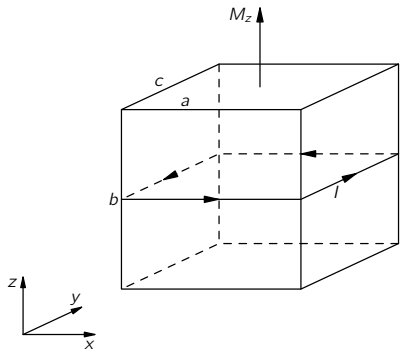


Figura 36-4. Un pequeño bloque magnetizado es equivalente a una corriente circulante de superficie.

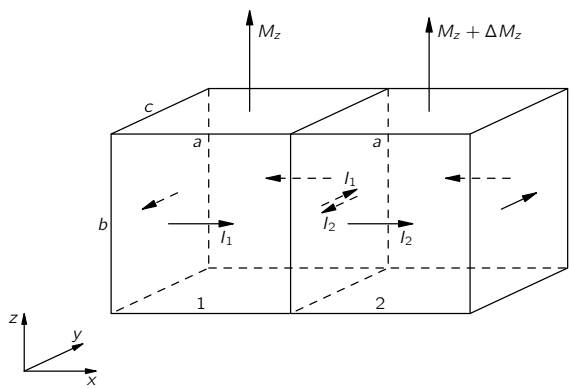


Figura 36-5. Si la magnetización de dos bloques contiguos no es la misma, hay una corriente de superficie resultante entre ellos.

Ahora imaginemos dos bloques pequeños, uno a continuación del otro, como muestra la figura 36-5. Como el bloque 2 está ligeramente desplazado del bloque 1, tendrá una componente vertical de magnetización ligeramente diferente, la cual llamaremos $M_z + \Delta M_z$. Ahora bien, sobre la superficie entre los dos bloques habrá dos contribuciones a la corriente total. El bloque 1 producirá una corriente

I_1 que fluye en la dirección positiva de y, y el bloque 2 una corriente de superficie I_2 que fluye en la dirección negativa de y. La corriente de superficie total en la dirección positiva de y es la suma:

$$\begin{aligned} I &= I_1 - I_2 = M_z b - (M_z + \Delta M_z) b \\ &= -\Delta M_z b. \end{aligned}$$

Podemos escribir ΔM_z como el producto de la derivada de M_z en la dirección x por el desplazamiento desde el bloque 1 al bloque 2, el cual es simplemente a:

$$\Delta M_z = \frac{\partial M_z}{\partial x}\, a.$$

La corriente que fluye entre los dos bloques es entonces

$$I = -\frac{\partial M_z}{\partial x}\, ab.$$

Para relacionar la corriente I con una densidad de corriente volumétrica promedio $\boldsymbol{j}$, debemos darnos cuenta de que esta corriente I realmente está distribuida sobre una cierta sección transversal. Si imaginamos que el volumen total del material está lleno de esos bloques pequeños, se puede asociar con cada bloque una de tales caras (perpendicular al eje x).* Entonces vemos que el área a asociar con la corriente I es simplemente el área ab de una de las caras del frente. Obtenemos el resultado

$$j_y = \frac{I}{ab} = -\frac{\partial M_z}{\partial x}.$$

Tenemos al menos el comienzo del rotacional de $\boldsymbol{M}$.

Debe haber otro término en j_y proveniente de la variación de la componente x de la magnetización con z. Esta contribución a $\boldsymbol{j}$ vendrá de la superficie entre los dos bloques pequeños al poner uno sobre otro, como muestra la figura 36-6. Usando el mismo razonamiento que acabamos de hacer, pueden demostrar que esta superficie contribuirá a la componente j_y la cantidad $\partial M_x/\partial_z$. Éstas son las únicas superficies que pueden contribuir a la componente y de la corriente; así que tenemos que la densidad de corriente total en la dirección y es

$$j_y = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}.$$

Calculando las corrientes en las caras restantes de un cubo —o usando el hecho de que nuestra dirección z es completamente arbitraria— podemos concluir que el vector densidad de corriente realmente está dado por la ecuación

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{M}.$$

Así, si escogemos describir la situación magnética en la materia en función del momento magnético promedio por unidad de volumen $\boldsymbol{M}$, hallamos que las corrientes atómicas circulantes son equivalentes a una densidad de corriente promedio en la materia, dada por la ecuación (36.7). Si el material también es un dieléctrico, debe haber además una corriente de polarización $\boldsymbol{j}_{\text{pol}} = \partial \boldsymbol{P}/\partial t$. Y si el material también es un conductor, debemos, además, tener una corriente de conducción $\boldsymbol{j}_{\text{cond}}$. Podemos escribir la corriente total en la forma

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_{\text{cond}} + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{M} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}. \tag{36.10}$$

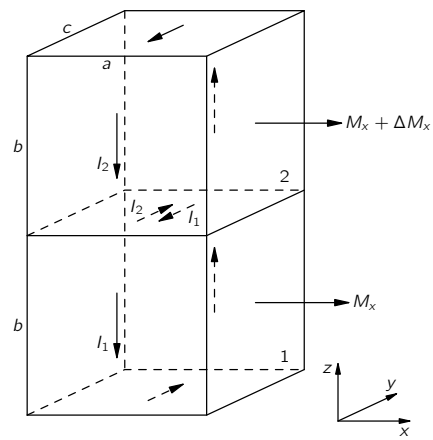


Figura 36-6. Dos bloques, uno encima del otro, pueden también contribuir a j_y.

36-2 El campo $\boldsymbol{H}$

A continuación introducimos en las ecuaciones de Maxwell la corriente como aparece en la ecuación (36.10). Obtenemos

$$c^2 \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0}\left(\boldsymbol{j}_{\text{cond}} + \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{M} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}\right) + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}.$$

* O si lo prefieren, la corriente I en cada cara debe ser repartida 50-50 en los bloques de los dos lados.

Podemos pasar el término en $\boldsymbol{M}$ al primer miembro:

$$c^2\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{B}-\frac{\boldsymbol{M}}{\epsilon_0c^2}\right)=\frac{\boldsymbol{j}_{\text{cond}}}{\epsilon_0}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{E}+\frac{\boldsymbol{P}}{\epsilon_0}\right). \tag{36.11}$$

Como señalamos en el capítulo 32, a mucha gente le gusta escribir $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}/\varepsilon_0)$ como un nuevo vector de campo $\boldsymbol{D}/\varepsilon_0$. Análogamente conviene a menudo escribir $(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{M}/\varepsilon_0c^2)$ como un solo vector de campo. *Nosotros* decidimos definir un nuevo vector de campo $\boldsymbol{H}$ como

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}-\frac{\boldsymbol{M}}{\epsilon_0c^2}. \tag{36.12}$$

Entonces la ecuación (36.11) se transforma en

$$\epsilon_0c^2\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{j}_{\text{cond}}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}. \tag{36.13}$$

Es sencilla en apariencia, pero su complejidad está oculta en las letras $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{H}$.

Ahora debemos advertir lo siguiente. La mayoría de los que usan las unidades MKS han escogido una definición diferente de $\boldsymbol{H}$. Llamando *su* campo $\boldsymbol{H'}$ (por supuesto lo siguen llamando $\boldsymbol{H}$ sin la prima), lo definen como

$$\boldsymbol{H}'=\epsilon_0c^2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{M}. \tag{36.14}$$

(También, comúnmente escriben ε_0c^2 como un nuevo número $1/\mu_0$; ¡así tienen una constante más de la cual seguir la pista!) Con esta definición, la ecuación (36.13) parece aún más simple:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}'=\boldsymbol{j}_{\text{cond}}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}. \tag{36.15}$$

Pero las dificultades con esta definición de $\boldsymbol{H}'$ son, primero, que no concuerda con la definición de quienes no usan las unidades MKS, y, segundo, que hace que $\boldsymbol{H}'$ y $\boldsymbol{B}$ tengan unidades diferentes. Pensamos que es más conveniente que $\boldsymbol{H}$ tenga las mismas unidades de $\boldsymbol{B}$ —en lugar de las unidades de $\boldsymbol{M}$, como $\boldsymbol{H}'$—. Pero si van a ser ingenieros y quieren trabajar en el diseño de transformadores, imanes, y cosas por el estilo, tendrán que tener cuidado. Encontrarán muchos libros que usan para $\boldsymbol{H}$ la definición (36.14) en vez de nuestra definición (36.12); y muchos otros libros —especialmente manuales sobre materiales magnéticos— que relacionan $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{H}$ en la forma que lo hemos hecho. Hay, pues, que cerciorarse cuál es la convención que ellos están usando.

Una de las formas de darse cuenta es por las unidades que usan. Recuerden que en el sistema MKS, $\boldsymbol{B}$ —y, por lo tanto, *nuestro* $\boldsymbol{H}$— se miden con la unidad: un weber por metro cuadrado, igual a 10 000 gauss. En el sistema MKS, un momento magnético (producto de una corriente por un área) tiene la unidad: un ampere · metro^2. Luego, la magnetización $\boldsymbol{M}$ tiene la unidad: un ampere *por* metro. Las unidades de $\boldsymbol{H}'$ son las mismas que las de $\boldsymbol{M}$. Pueden ver que esto concuerda con la ecuación (36.15), puesto que $\boldsymbol{\nabla}$ tiene las dimensiones de uno sobre una longitud. Los que trabajan con electroimanes, también adquieren el hábito de llamar unidad de $\boldsymbol{H}$ (con la definición de $\boldsymbol{H}'$) "un ampere *vuelta* por metro" —pensando en las vueltas de alambre de un enbobinado—. Pero una "vuelta" realmente es un número sin dimensión, así que no pueden confundirse. Como nuestra H es igual a H'/ε_0c^2, si están usando el sistema MKS, H (en webers/metro^2) es igual a $4\pi\times10^{-7}$ por H' (en amperes por metro). Quizá sea más conveniente recordar que H (en gauss) $= 0.0126H'$ (en ampere/metro).

Hay algo mucho peor. ¡Muchos de los que usan *nuestra* definición de $\boldsymbol{H}$ han decidido llamar las unidades de $\boldsymbol{H}$ y $\boldsymbol{B}$ con *nombres diferentes*! Aunque tengan las mismas dimensiones, llaman a la unidad de $\boldsymbol{B}$ un *gauss* y a la unidad de $\boldsymbol{H}$ un *oersted* (en honor a Gauss y Oersted, por supuesto). Así, en muchos libros hallarán gráficas con $\boldsymbol{B}$ representado en gauss y $\boldsymbol{H}$ en oersted. Realmente son la misma unidad —10^{-4} de la unidad MKS—. Hemos resumido la confusión sobre unidades magnéticas en la tabla 36-1.

Tabla 36-1

Unidades de cantidades magnéticas

$[B]$ = weber/metro^2 = 10^4 gauss
$[H]$ = weber/metro^2 = 10^4 gauss
o 10^4 oersted
$[M]$ = ampere/metro
$[H']$ = ampere/metro

Conversiones convenientes

B (gauss) = 10^4B (weber/metro^2)
H (gauss) = H (oersted)
= $0.0126H'$ (amp/metro)

36-3 La curva de magnetización

Ahora examinaremos algunas situaciones más sencillas en las cuales el campo magnético es constante, o en las cuales los campos varían tan lentamente como para que podamos despreciar $\partial \boldsymbol{D}/\partial t$ en comparación con $\boldsymbol{j}_{\text{cond}}$. Entonces los campos obedecen las ecuaciones

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{36.16}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j}_{\text{cond}}/\epsilon_0 c^2, \tag{36.17}$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{M}/\epsilon_0 c^2. \tag{36.18}$$

Supongan que tenemos un toro (una rosca) de hierro cubierto con una bobina de alambre de cobre, como muestra la figura 36-7(a). Una corriente I circula por el alambre. ¿Cuál es el campo magnético? El campo magnético estará principalmente dentro del hierro; allí, las líneas de $\boldsymbol{B}$ serán círculos, como muestra la figura 36-7(b). Como el flujo de $\boldsymbol{B}$ es continuo, su divergencia es cero y satisface la ecuación (36.16). En seguida, escribimos la ecuación (36.17) en otra forma integrando alrededor de la curva cerrada Γ dibujada en la figura 36-7(b). Según el teorema de Stokes tenemos que

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{s} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \int_S \boldsymbol{j}_{\text{cond}} \cdot \boldsymbol{n}\, da, \tag{36.19}$$

donde la integral de $\boldsymbol{j}$ es sobre cualquier superficie S limitada por Γ. En cada vuelta del devanado esta superficie se corta una sola vez. Cada vuelta contribuye con la corriente I a la integral y si hay N vueltas en total, la integral es NI. Por la simetría de nuestro problema, $\boldsymbol{B}$ es el mismo a lo largo de toda la curva Γ; si suponemos que la magnetización y, por lo tanto, también el campo H, es constante a lo largo de Γ, la ecuación (36.19) se transforma en

$$Hl = \frac{NI}{\epsilon_0 c^2},$$

donde l es la longitud de la curva Γ. Así,

$$H = \frac{1}{\epsilon_0 c^2}\,\frac{NI}{l}. \tag{36.20}$$

Debido a que $\boldsymbol{H}$ es directamente proporcional a la corriente de magnetización en casos como éste, a veces se le llama *campo magnetizante*.

Todo lo que necesitamos ahora es una ecuación que relacione $\boldsymbol{H}$ con $\boldsymbol{B}$. ¡Pero no existe tal ecuación! Por supuesto, está la ecuación (36.18), pero no sirve debido a que no hay relación directa entre $\boldsymbol{M}$ y $\boldsymbol{B}$ para un material ferromagnético como el hierro. La magnetización $\boldsymbol{M}$ depende de toda la historia pasada del hierro y no solamente de lo que $\boldsymbol{B}$ es en este momento.

No obstante, no todo está perdido. Podemos obtener soluciones en ciertos casos sencillos. Si empezamos con hierro no magnetizado —digamos, con hierro recocido a temperaturas altas— entonces, en la geometría sencilla del toro, todo el hierro tendrá la misma historia magnética. Por consiguiente, podemos decir algo acerca de $\boldsymbol{M}$ —y por lo tanto acerca de la relación entre $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{H}$— a partir de mediciones experimentales. Según la ecuación (36.20) el campo $\boldsymbol{H}$ en el toro está dado por el producto de una constante por la corriente I del devanado. El campo $\boldsymbol{B}$ se puede medir integrando sobre el tiempo la fem en la bobina (o en una bobina adicional enrollada sobre la bobina magnetizante, como se muestra en la figura). Esta fem es igual a la derivada respecto al tiempo del flujo de $\boldsymbol{B}$, así que la integral de la fem en el tiempo es igual al producto de $\boldsymbol{B}$ por la sección del toro.

La figura 36-8 muestra la relación entre $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{H}$, observada con un toro de hierro suave. Cuando se da corriente por primera vez, $\boldsymbol{B}$ aumenta al aumentar $\boldsymbol{H}$ a lo largo de la curva a. Noten las diferentes escalas de $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{H}$; inicialmente

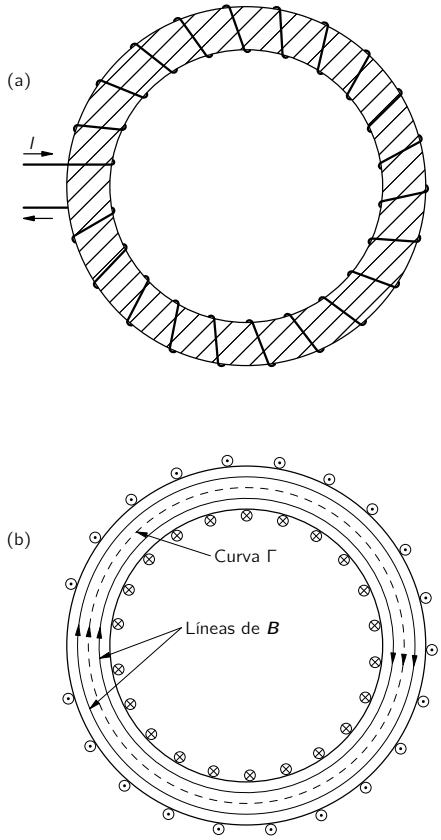


Figura 36-7. (a) Un toro de hierro devanado con una bobina de alambre aislado. (b) Sección transversal del toro que muestra líneas de campo.

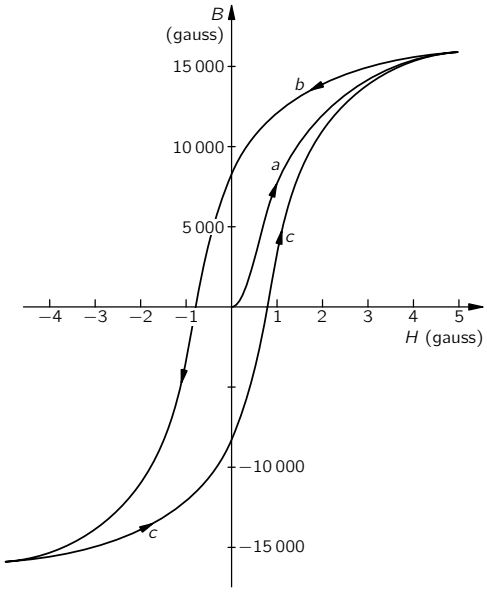


Figura 36-8. Magnetización típica y curvas de histéresis para hierro suave.

sólo necesita un $\boldsymbol{H}$ relativamente pequeño para producir un $\boldsymbol{B}$ grande. ¿Por qué $\boldsymbol{B}$ es mucho mayor con el hierro que lo que sería con el aire? Porque hay una magnetización $\boldsymbol{M}$ grande, la cual es equivalente a una corriente de superficie grande sobre el hierro —el campo $\boldsymbol{B}$ proviene de la *suma* de esta corriente y la conducción en el devanado—. Más adelante estudiaremos por qué $\boldsymbol{M}$ debe ser grande.

Para valores grandes de $\boldsymbol{H}$, la curva de magnetización deja de crecer fuertemente. Decimos que el hierro se *satura*. Con la escala de nuestra figura la curva parece que se vuelve horizontal. En realidad, continúa subiendo ligeramente —para campos grandes, $\boldsymbol{B}$ se vuelve proporcional a $\boldsymbol{H}$ y con pendiente unitaria—. No existe aumento adicional de $\boldsymbol{M}$. De paso, debemos señalar que si se hiciera el toro de algún material no magnético, $\boldsymbol{M}$ sería cero y $\boldsymbol{B}$ sería igual a $\boldsymbol{H}$ para todos los campos.

Lo primero que notamos es que la curva a de la figura 36-8 —que es la así llamada *curva de magnetización*— es altamente no lineal. Pero es peor que eso. Si después de alcanzar la saturación disminuimos la corriente en la bobina para llevar $\boldsymbol{H}$ a cero, el campo magnético $\boldsymbol{B}$ cae siguiendo la curva b. Cuando $\boldsymbol{H}$ alcanza el cero, algo queda de $\boldsymbol{B}$. Aun sin ninguna corriente magnetizante hay un campo magnético en el hierro —se ha magnetizado permanentemente—. Si ahora aplicamos una corriente *negativa* a la bobina, la curva B-H continúa a lo largo de b hasta que se sature el hierro en la dirección negativa.

Si nuevamente llevamos la corriente a cero, $\boldsymbol{B}$ sigue la curva c. Si alternamos la corriente entre grandes valores positivos y negativos, la curva B-H va y viene prácticamente a lo largo de las curvas b y c. Sin embargo, si variamos $\boldsymbol{H}$ en una forma arbitraria, podemos obtener curvas más complicadas que, en general, estarán en alguna parte entre las curvas b y c. La curva formada por oscilaciones repetidas de los campos se llama *curva de histéresis* del hierro.

Vemos además que no podemos escribir una relación funcional como $B = f(H)$, debido a que los valores de $\boldsymbol{B}$ en cualquier momento dependen no solamente de lo que $\boldsymbol{H}$ es en ese instante, sino también de su historia completa. Naturalmente, las curvas de magnetización e histéresis son diferentes en sustancias distintas. La forma de las curvas depende de manera decisiva de la composición química del material, también de los detalles de su preparación y subsiguiente tratamiento físico. Discutiremos algunas de las explicaciones físicas de estas complicaciones en el capítulo siguiente.

36-4 Inductancias con núcleo de hierro

Una de las aplicaciones más importantes de los materiales magnéticos es en los circuitos eléctricos —por ejemplo, en transformadores, motores eléctricos, etc.—. Una razón es que con hierro podemos controlar por dónde van los campos magnéticos y también obtener campos mucho mayores con una corriente eléctrica dada. Por ejemplo, la inductancia "toroidal" típica se hace muy parecida al objeto mostrado en la figura 36-7. Para una inductancia dada, puede ser de volumen mucho menor y usar mucho menos cobre que una inductancia equivalente con "núcleo de aire". Para una inductancia dada, obtenemos una resistencia mucho menor en el devanado, así que la inductancia se acerca mucho más a la "ideal" —particularmente para frecuencias bajas—. Es muy fácil comprender cualitativamente cómo trabajan tales inductancias. Si I es la corriente en el devanado, el campo $\boldsymbol{H}$ producido en el interior es proporcional a I —como lo indica la ecuación (36.20)—. El voltaje $\mathcal{V}$ en los terminales está relacionado con el campo magnético $\boldsymbol{B}$. Despreciando la resistencia del devanado, el voltaje $\mathcal{V}$ es proporcional a $\partial\boldsymbol{B}/\partial t$. La inductancia $\mathcal{L}$, que es el cociente entre $\mathcal{V}$ y dI/dt (véase sección 17-7), incluye además la relación entre B y H en el hierro. Como $\boldsymbol{B}$ es mucho mayor que $\boldsymbol{H}$, obtenemos un factor grande en la inductancia. Físicamente, lo que sucede es que una corriente pequeña en la bobina, la cual debería producir comúnmente un campo magnético pequeño, hace que los pequeños imanes "esclavos" en el hierro se alineen y produzcan una corriente "magnética" tremendamente mayor que la corriente externa en el devanado. Es como si

tuviésemos muchísima más corriente por la bobina que la que realmente tenemos. Cuando invertimos la corriente, todos los imanes pequeños se reorientan —todas esas corrientes internas se invierten— y obtenemos una fem inducida mucho mayor que la que obtendríamos sin el hierro. Si queremos calcular la inductancia, entonces podemos hacerlo a través de la energía —como lo describimos en la sección 17-8—. La *rapidez* a la cual la fuente de corriente produce energía es $I\mathcal{V}$. El voltaje $\mathcal{V}$ es el producto de la sección A del núcleo por N por dB/dt. Según la ecuación (36.20), $I = (\varepsilon_0 c^2 l/N)H$. Tenemos así

$$\frac{dU}{dt} = \mathcal{V}I = (\epsilon_0 c^2 lA)H\,\frac{dB}{dt}.$$

Integrando sobre el tiempo, obtenemos

$$U = (\epsilon_0 c^2 lA)\int H\,dB. \tag{36.21}$$

Nótese que lA es el volumen del toro, así que hemos demostrado que la densidad de energía $u = U/\text{vol}$ en un material magnético está dada por

$$u = \epsilon_0 c^2 \int H\,dB. \tag{36.22}$$

Una característica interesante está implícita aquí. Cuando usamos corriente alterna, el hierro recorre una curva de histéresis. Como B no es una función sencilla de H, la integral $\int HdB$ alrededor de un ciclo completo *no* es igual a cero. Es el área encerrada dentro de la curva de histéresis. Entonces, la fuente conductora produce una cierta energía resultante en cada ciclo —una energía proporcional al área encerrada por la curva de histéresis—. Y esa energía se "pierde". Se pierde para las acciones electromagnéticas, pero aparece como calor en el hierro. Se llama *pérdida por histéresis*. Para mantener las pérdidas de energía pequeñas, nos gustaría que la curva de histéresis fuese tan angosta como fuera posible. Una forma de disminuir el área de la curva es reduciendo el campo máximo que se obtiene durante cada ciclo. Para campos máximos menores, obtenemos una curva de histéresis como la mostrada en la figura 36-9. También se diseñan materiales especiales para obtener una curva muy angosta. Los así llamados *hierros de transformador* —que son aleaciones de hierro con una cantidad pequeña de silicio— han sido elaborados para contar con esta propiedad.

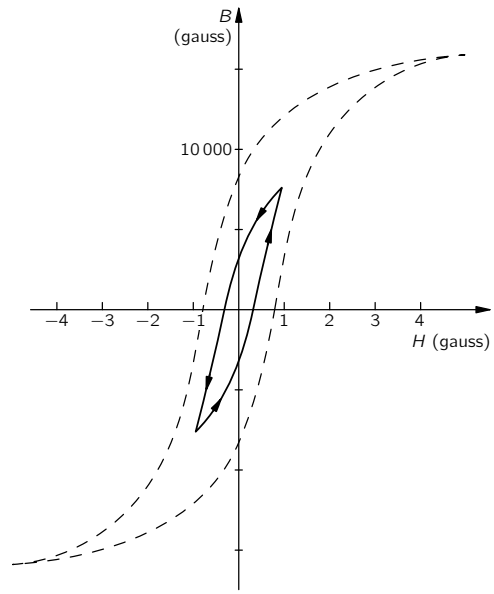


Figura 36-9. Una curva de histéresis que no alcanza saturación.

Cuando se hace que una inductancia recorra una curva de histéresis pequeña, la relación entre B y H se puede aproximar por una ecuación lineal. Por lo común se escribe

$$B = \mu H. \tag{36.23}$$

La constante μ *no* es el momento magnético que hemos usado anteriormente. Se la llama *permeabilidad* del hierro. (También se la llama algunas veces *permeabilidad relativa*.) La permeabilidad de hierros comunes es típicamente de varios miles. Hay aleaciones especiales, como el "supermalloy", cuya permeabilidad puede llegar a un millón.

Si usamos la aproximación $B = \mu H$ en la ecuación (36.21), podemos escribir la energía de una inductancia toroidal en la forma

$$U = (\epsilon_0 c^2 lA)\mu \int H\,dH = (\epsilon_0 c^2 lA)\,\frac{\mu H^2}{2}. \tag{36.24}$$

Así, la densidad de energía es aproximadamente

$$u \approx \frac{\epsilon_0 c^2}{2}\,\mu H^2.$$

Ahora podemos hacer la energía de la ecuación (36.24) igual a la energía $\mathcal{L}I^2/2$ de una inductancia y despejar $\mathcal{L}$. Obtenemos

$$\mathcal{L} = (\epsilon_0 c^2 lA)\mu\left(\frac{H}{I}\right)^2.$$

Usando H/I de la ecuación (36.20), tenemos

$$\mathcal{L} = \frac{\mu N^2 A}{\epsilon_0 c^2 l}. \tag{36.25}$$

La inductancia es proporcional a μ. Si quieren inductancias para cosas como amplificadores de audio, tratarán de hacerlas funcionar sobre una curva de histéresis donde la relación B-H sea tan lineal como sea posible. (Recordarán que en el capítulo 50 del volumen I, hablamos respecto de la producción de armónicos en sistemas no lineales.) Para estos fines, la ecuación (36.23) es una buena aproximación y muy útil. En cambio, si *quieren* producir armónicos, pueden usar una inductancia haciéndola trabajar intencionalmente en una forma altamente no lineal. Entonces tendrán que usar la curva B-H completa y analizar qué sucede por medio de métodos gráficos o numéricos.

A menudo, un "transformador" se hace poniendo dos bobinas en el mismo toro —o *núcleo*— de un material magnético. (Para transformadores grandes, el núcleo se hace con proporciones rectangulares por conveniencia.) Además, una corriente variable en el devanado "primario" hará que el campo magnético en el núcleo cambie, lo cual induce una fem en el devanado "secundario". Como el flujo a través de *cada vuelta* de ambos devanados es el mismo, las fem en los dos devanados están en la misma relación que el número de vueltas en cada uno de ellos. Un voltaje aplicado al primario es transformado a un voltaje diferente en el secundario. Como se necesita cierta corriente *resultante* para producir el cambio requerido en el campo magnético, la suma *algebraica* de las corrientes en los dos devanados será fija e igual a la corriente "magnetizante" requerida. Si la corriente extraída del secundario aumenta, la corriente del primario debe aumentar en proporción —hay una "transformación" de corriente lo mismo que de voltaje—.

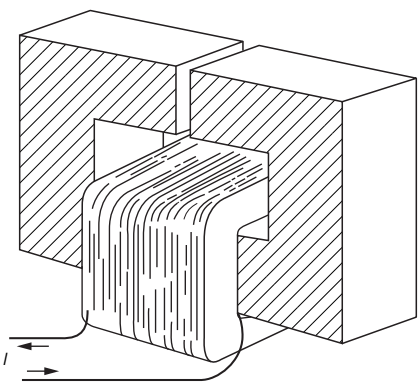


Figura 36-10. Un electroimán.

36-5 Electroimanes

Discutamos ahora una situación práctica que es un poco más complicada. Supongan que tenemos un electroimán de la forma normal, mostrada en la figura 36-10 —hay un yugo de hierro en forma de "C", con una bobina de muchas vueltas de alambre enrollado alrededor del mismo—. ¿Cuál es el campo magnético $\boldsymbol{B}$ en la grieta?

Si el espesor de la grieta es pequeño comparado con todas las otras dimensiones, podemos, en primera aproximación, suponer que las líneas de $\boldsymbol{B}$ darán vuelta a lo largo del lazo, como lo harán en el toro. Tendrán más o menos el aspecto que muestra la figura 36-11(a). Tienden a abrirse un poco en la grieta pero si la abertura es angosta, éste será un efecto pequeño. Es una buena aproximación

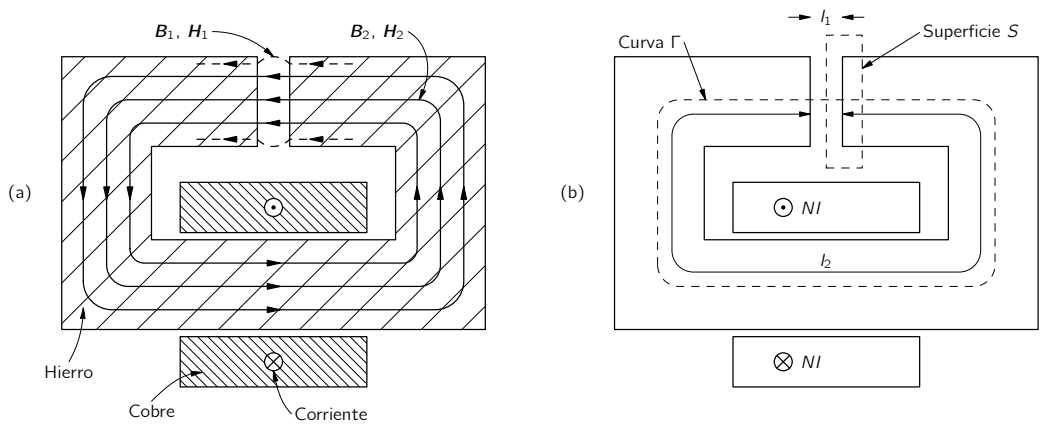


Figura 36-11. Sección transversal de un electroimán.

suponer que el flujo de $\boldsymbol{B}$ a través de cualquier sección transversal del yugo es constante. Si el yugo tiene un área de sección transversal uniforme A —y si despreciamos cualquier efecto de borde en la grieta o en las esquinas— podemos decir que $\boldsymbol{B}$ es uniforme en todo el yugo.

Además, $\boldsymbol{B}$ tendrá el mismo valor en la grieta. Esto se deduce de la ecuación (36.16). Imaginemos una superficie cerrada S, como muestra la figura 36-11(b), que tiene una cara en la grieta y la otra en el hierro. El flujo total de $\boldsymbol{B}$ que sale de esta superficie debe ser cero. Llamando B_1 al campo en la grieta y B_2 al campo en el hierro, tenemos (para nuestra aproximación) que

$$B_1A - B_2A = 0.$$

Concluimos que $B_1 = B_2$.

Ahora consideremos H. Otra vez podemos usar la ecuación (36.19), tomando la integral de línea a lo largo de la curva Γ de la figura 36-11(b). Como antes, la integral del segundo miembro es NI, el número de vueltas por la corriente. Sin embargo, ahora H será diferente en el aire y en el hierro. Llamando H_2 al campo en el hierro y l_2 a la longitud de la trayectoria alrededor del yugo, esta parte de la curva contribuirá con la cantidad H_2l_2 a la integral. Llamando H_1 al campo en la grieta y l_1 al espesor de ésta, obtenemos la contribución H_1l_1 de la grieta. Tenemos que

$$H_1l_1 + H_2l_2 = \frac{NI}{\epsilon_0c^2}. \tag{36.26}$$

Ahora sabemos otra cosa: que en la grieta la magnetización es despreciable, de modo que $B_1 = H_1$. Como $B_1 = B_2$, la ecuación (36.26) se transforma en

$$B_2l_1 + H_2l_2 = \frac{NI}{\epsilon_0c^2}. \tag{36.27}$$

Aún tenemos dos incógnitas. Para hallar B_2 y H_2, necesitamos otra relación —o sea, la que relaciona B con H en el hierro—. Si podemos hacer la aproximación de que $B_2 = \mu H_2$, podemos resolver la ecuación algebraicamente. No obstante, hagámoslo para el caso general, en que la curva de magnetización del hierro es como la que muestra la figura 36-8. Lo que queremos es la solución simultánea de esta relación funcional junto con la ecuación (36.27). Podemos hallarla representando la ecuación (36.27) sobre la misma gráfica de la curva de magnetización, como se ha hecho en la figura 36-12. Donde se intersecan las dos curvas, tenemos nuestra solución.

Para una corriente I, la función (36.27) es la línea recta marcada con $I > 0$ en la figura 36-12. La línea interseca al eje H ($B_2 = 0$) en $H_2 = NI/\epsilon_0c^2l_2$ y la pendiente es $-l_2/l_1$. Corrientes diferentes sólo desplazan la línea horizontalmente. De la figura 36-12 vemos que para una corriente dada hay muchas soluciones diferentes, dependiendo de cómo llegaron ahí. Si sólo hubieran construido el imán y puesto la corriente I, el campo B_2 (que también es el B_1) tendrá el valor dado por el punto a. Si hubieran puesto la corriente en un valor muy alto y luego la bajan a I, el campo estará dado por el punto b. O bien, si hubieran puesto una corriente altamente negativa en el imán y luego la *suben* a I, el campo es el que está en el punto c. El campo en la grieta depende de qué hicieron en el pasado.

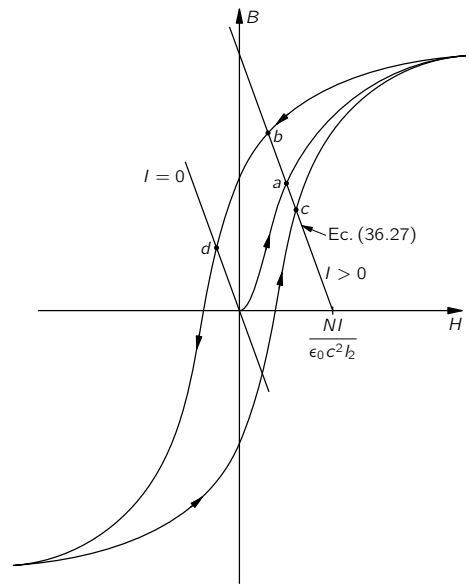


Figura 36-12. Cómo determinar el campo de un electroimán.

Cuando la corriente en el imán es cero, la relación entre B_2 y H_2 en la ecuación (36.27) está mostrada por la línea marcada $I = 0$ en la figura. Aún hay varias soluciones posibles. Si primero han saturado el hierro, debe haber un campo residual considerable en el imán como el dado por el punto d. Pueden quitar la bobina y tienen un imán permanente. Pueden ver que para un buen imán permanente, necesitan un material con una curva de histéresis *ancha*. Aleaciones especiales, como el Alnico V, tienen curvas muy anchas.

36-6 Magnetización espontánea

Ahora vamos a la cuestión de por qué en materiales ferromagnéticos un campo magnético pequeño produce una magnetización grande. La magnetización

de materiales ferromagnéticos, como el hierro y el níquel, se debe al momento magnético de los electrones en la capa interna del átomo. Cada electrón tiene un momento magnético $\boldsymbol{\mu}$ igual al producto de $q/2m$ por su factor g, por su momentum angular $\boldsymbol{J}$. Para un solo electrón con movimiento orbital resultante cero, $g = 2$ y la componente de $\boldsymbol{J}$ en cualquier dirección —digamos que la dirección z— es $\pm\hbar/2$, así que la componente de $\boldsymbol{\mu}$ según el eje z es

$$\mu_z = \frac{q\hbar}{2m} = 0.928 \times 10^{-23} \text{ amp} \cdot \text{m}^2. \tag{36.28}$$

En un átomo de hierro hay dos electrones que contribuyen al ferromagnetismo, así que para que la discusión sea más sencilla hablaremos del níquel, el cual es ferromagnético como el hierro pero solamente tiene un electrón en la capa interna. (Es fácil extender el razonamiento al hierro.)

Ahora bien, lo que queremos señalar es que en presencia de un campo externo $\boldsymbol{B}$, los imanes atómicos tienden a alinearse con el campo, pero sufren choques por el movimiento térmico, como lo describimos para materiales paramagnéticos. En el capítulo anterior concluimos que el balance entre un campo magnético que trata de alinear los imanes atómicos y los movimientos térmicos que tratan de desordenarlo producía el resultado de que el momento magnético medio por unidad de volumen terminaría siendo

$$M = N\mu \tanh \frac{\mu B_a}{kT}. \tag{36.29}$$

Por $\boldsymbol{B}_a$ entendemos el campo que actúa en el átomo, y kT es la energía de Boltzmann. En la teoría del paramagnetismo usamos para B_a simplemente el mismo B, despreciando la parte del campo en cualquier átomo dado producido por los átomos vecinos. En el caso ferromagnético hay una complicación. No debemos usar el campo promedio en el hierro para el $\boldsymbol{B}_a$ que actúa sobre un átomo individual. En cambio, debemos proceder como en el caso de los dieléctricos —tenemos que hallar el campo *local* que actúa en un solo átomo—. Para una determinación exacta debemos agregar los campos en el átomo en cuestión debidos a todos los otros átomos de la red cristalina. Sin embargo, como lo hicimos para los dieléctricos, haremos la aproximación de que el campo en un átomo es el mismo que encontraríamos en una cavidad esférica pequeña en el material —suponiendo que los momentos de los átomos en la vecindad no varían por la presencia de la cavidad—.

Siguiendo los razonamientos hechos en el capítulo 11, diríamos que se puede escribir

$$\boldsymbol{B}_{\text{cavidad}} = \boldsymbol{B} + \frac{1}{3}\frac{\boldsymbol{M}}{\epsilon_0 c^2} \qquad (\text{¡error!}).$$

Pero esto no es correcto. Sin embargo, *podemos* utilizar los resultados del capítulo 11 haciendo una comparación cuidadosa de las ecuaciones de ese capítulo con las ecuaciones del ferromagnetismo en este capítulo. Juntemos las ecuaciones correspondientes. Para regiones donde no hay conducción de corriente o cargas tenemos:

Electrostática	Ferromagnetismo estático
$\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\boldsymbol{E} + \dfrac{\boldsymbol{P}}{\epsilon_0}\right) = 0$	$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$
$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$	$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\boldsymbol{B} - \dfrac{\boldsymbol{M}}{\epsilon_0 c^2}\right) = 0$

(36.30)

Estos dos juegos de ecuaciones pueden considerarse análogos si hacemos la siguiente correspondencia *puramente matemática*:

$$\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{B} - \frac{\boldsymbol{M}}{\epsilon_0 c^2}, \qquad \boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{P}}{\epsilon_0} \to \boldsymbol{B}.$$

Esto es lo mismo que hacer la analogía

$$\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{H}, \qquad \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{M}/c^2. \tag{36.31}$$

En otras palabras, si escribimos las ecuaciones del ferromagnetismo en la forma

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\boldsymbol{H}+\frac{\boldsymbol{M}}{\epsilon_0 c^2}\right)&=0,\\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}&=0,\end{aligned}\tag{36.32}$$

se *parecen* a las ecuaciones de la electrostática.

Esta correspondencia puramente algebraica ha dado lugar a cierta confusión en el pasado. Se tenía la tendencia a pensar que $\boldsymbol{H}$ era "*el* campo magnético". Pero, como hemos visto, $\boldsymbol{B}$ y $\boldsymbol{E}$ son físicamente los campos fundamentales y $\boldsymbol{H}$ es una idea derivada. Así, aunque las *ecuaciones* son análogas, el *contenido físico* no es análogo. Sin embargo, esto no impide que usemos el principio de que ecuaciones iguales tienen soluciones iguales.

Podemos usar nuestro resultado anterior para el campo eléctrico dentro de cavidades de diversas formas en los dieléctricos —resumidas en la figura 36-1— para encontrar el campo $\boldsymbol{H}$ dentro de las cavidades correspondientes. Conociendo $\boldsymbol{H}$, podemos determinar $\boldsymbol{B}$. Por ejemplo (usando los resultados que resumimos en la sección 36-1), el campo $\boldsymbol{H}$ en una cavidad en forma de aguja paralela a $\boldsymbol{M}$ es el mismo que el $\boldsymbol{H}$ en el material,

$$\boldsymbol{H}_{\text{cavidad}}=\boldsymbol{H}_{\text{material}}.$$

Pero como $\boldsymbol{M}$ es cero en la cavidad, tenemos

$$\boldsymbol{B}_{\text{cavidad}}=\boldsymbol{B}_{\text{material}}-\frac{\boldsymbol{M}}{\epsilon_0 c^2}.\tag{36.33}$$

Por otra parte, para una cavidad en forma de disco, perpendicular a $\boldsymbol{M}$, tenemos

$$\boldsymbol{E}_{\text{cavidad}}=\boldsymbol{E}_{\text{dieléctrico}}+\frac{\boldsymbol{P}}{\epsilon_0},$$

la cual se traduce

$$\boldsymbol{H}_{\text{cavidad}}=\boldsymbol{H}_{\text{material}}+\frac{\boldsymbol{M}}{\epsilon_0 c^2}.$$

O bien, en función de $\boldsymbol{B}$,

$$\boldsymbol{B}_{\text{cavidad}}=\boldsymbol{B}_{\text{material}}.\tag{36.34}$$

Finalmente, para una cavidad esférica, haciendo nuestra analogía con la ecuación (36.3) tendríamos

$$\boldsymbol{H}_{\text{cavidad}}=\boldsymbol{H}_{\text{material}}+\frac{\boldsymbol{M}}{3\epsilon_0 c^2}$$

o sea

$$\boldsymbol{B}_{\text{cavidad}}=\boldsymbol{B}_{\text{material}}-\frac{2}{3}\,\frac{\boldsymbol{M}}{\epsilon_0 c^2}.\tag{36.35}$$

Este resultado es completamente diferente del que obtuvimos para $\boldsymbol{E}$.

Por supuesto, es posible obtener estos resultados en una forma más física, usando las ecuaciones de Maxwell directamente. Por ejemplo, la ecuación (36.34) proviene directamente de $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0$. (Usen una superficie gaussiana que esté mitad en el material y mitad fuera.) Análogamente, pueden obtener la ecuación (36.33) usando una integral de línea a lo largo de una curva que sube por dentro de la cavidad y luego retorna a través del material. Físicamente, el campo en la cavidad está reducido debido a las corrientes de superficie —las cuales están dadas por $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{M}$—. Dejaremos a cargo de ustedes la demostración de que la ecuación (36.35) también se puede obtener considerando los efectos de las corrientes de superficie en la frontera de la cavidad esférica.

Al hallar la magnetización de equilibrio a partir de la ecuación (36.29), resulta más conveniente trabajar con $\boldsymbol{H}$; así que escribimos

$$\boldsymbol{B}_a=\boldsymbol{H}+\lambda\,\frac{\boldsymbol{M}}{\epsilon_0 c^2}.\tag{36.36}$$

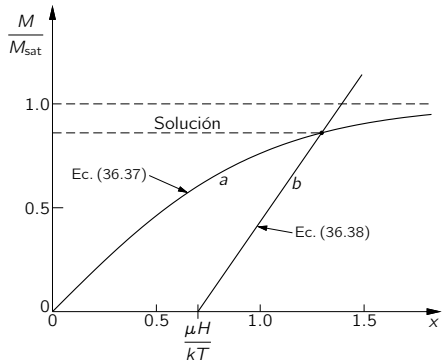


Figura 36-13. Solución gráfica de las ecuaciones (36.37) y (36.38).

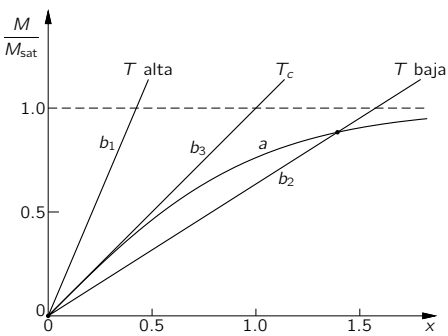


Figura 36-14. Cómo hallar la magnetización cuando $H = 0$.

En la aproximación de la cavidad esférica, debemos tener $\lambda = \frac{1}{3}$ pero como verán, más adelante usaremos algún otro valor, así que lo dejamos como un parámetro ajustable. Además, tomaremos todos los campos en la misma dirección, por ello no nos preocuparemos de la dirección de los vectores. Siempre que sustituimos la ecuación (36.36) en la ecuación (36.29), tenemos una ecuación que relaciona la magnetización M con el campo magnetizante H:

$$M = N\mu \tanh\left(\mu \frac{H + \lambda M/\epsilon_0 c^2}{kT}\right).$$

No obstante, es una ecuación que no se puede resolver explícitamente, así que lo haremos gráficamente.

Pongamos el problema en una forma generalizada escribiendo la ecuación (36.29) en la forma

$$\frac{M}{M_{\text{sat}}} = \tanh x, \tag{36.37}$$

donde M_{sat} es el valor de saturación de la magnetización, o sea N_μ, y x representa $\mu B_a/kT$. La curva a en la figura 36-13 muestra cómo M/M_{sat} depende de x. Podemos también escribir x en función de M —utilizando la ecuación (36.36) para B_a— en la forma

$$x = \frac{\mu B_a}{kT} = \frac{\mu H}{kT} + \left(\frac{\mu\lambda M_{\text{sat}}}{\epsilon_0 c^2 kT}\right)\frac{M}{M_{\text{sat}}}. \tag{36.38}$$

Para cualquier valor determinado de H, ésta es una relación lineal entre M/M_{sat} y x. La intersección con el eje x está en $x = \mu H/kT$, y la pendiente es $\varepsilon_0 c^2 kT/\mu\lambda M_{\text{sat}}$. Para cualquier valor particular de H, tendríamos una recta como la indicada con b en la figura 36-13. La intersección de las curvas a y b nos da la solución para M/M_{sat}. Hemos resuelto el problema.

Veamos ahora cómo se comportan las soluciones en diversas circunstancias. Comenzamos con $H = 0$. Hay dos situaciones posibles indicadas por las rectas b_1 y b_2 de la figura 36-14. Notarán que según la ecuación (36.38) la pendiente de la recta es proporcional a la temperatura absoluta T. Así, a *altas temperaturas* tendríamos una línea como b_1. La solución es $M/M_{\text{sat}} = 0$. Cuando el campo magnetizante H es cero, la magnetización también es cero. Pero a *bajas temperaturas* tendríamos una línea como b_2, y hay *dos soluciones* para M/M_{sat} —una con $M/M_{\text{sat}} = 0$ y la otra con M/M_{sat} cerca de uno—. Resulta que sólo el valor más alto es estable —como se puede ver calculando pequeñas variaciones alrededor de estas soluciones—.

Por lo tanto, de acuerdo con estas ideas, un material magnético debe magnetizarse *espontáneamente* a temperaturas lo suficientemente bajas. En resumen, cuando los movimientos térmicos son lo suficientemente pequeños, el acoplamiento entre los imanes atómicos hace que todos éstos se alineen paralelos unos a otros —tenemos un material permanentemente magnetizado, análogo a los ferroeléctricos que discutimos en el capítulo 11—.

Si empezamos a alta temperatura y la bajamos, hay una temperatura crítica, llamada temperatura de Curie T_c, para la cual el comportamiento ferromagnético aparece de repente. Esta temperatura corresponde a la recta b_3 de la figura 36-14, que es tangente a la curva a y tiene, por supuesto, pendiente 1. La temperatura de Curie está dada por

$$\frac{\epsilon_0 c^2 kT_c}{\mu\lambda M_{\text{sat}}} = 1. \tag{36.39}$$

Si quieren, podemos escribir la ecuación (36.38) más sencillamente en función de T_c como sigue:

$$x = \frac{\mu H}{kT} + \frac{T_c}{T}\left(\frac{M}{M_{\text{sat}}}\right). \tag{36.40}$$

Veamos ahora qué sucede para campos magnetizantes H pequeños. Podemos ver en la figura 36-14 cómo suceden las cosas si corremos nuestras rectas un poco a la derecha. Para el caso de bajas temperaturas, el punto de intersección se

moverá hacia afuera un poquito a lo largo de la parte de baja pendiente de la curva a, y M cambiará relativamente poco. Para el caso de temperatura alta, el punto de intersección se correrá hacia la parte más empinada de la curva a y M cambiará relativamente rápido. En realidad, podemos aproximar la parte de la curva a por una recta de pendiente unitaria y escribir:

$$\frac{M}{M_{\text{sat}}} = x = \frac{\mu H}{kT} + \frac{T_c}{T}\left(\frac{M}{M_{\text{sat}}}\right).$$

Ahora podemos despejar M/M_{sat}:

$$\frac{M}{M_{\text{sat}}} = \frac{\mu H}{k(T - T_c)}. \tag{36.41}$$

Tenemos una ley algo parecida a la que teníamos para el paramagnetismo. Para el paramagnetismo, teníamos

$$\frac{M}{M_{\text{sat}}} = \frac{\mu B}{kT}. \tag{36.42}$$

Además, una diferencia es que ahora tenemos la magnetización en función de H, que incluye algunos de los efectos de la interacción de los imanes atómicos; sin embargo, la diferencia principal es que la magnetización es inversamente proporcional a la *diferencia* entre T y T_c, en lugar de la temperatura absoluta T únicamente. Despreciar las interacciones entre átomos vecinos corresponde a tomar $\lambda = 0$, lo cual, según la ecuación (36.39), significa tomar $T_c = 0$. Entonces los resultados son justamente los que obtuvimos en el capítulo 35.

Se puede comprobar nuestra descripción teórica con los datos experimentales del níquel. Experimentalmente se observa que el comportamiento ferromagnético del níquel desaparece cuando se eleva su temperatura por encima de los 631K. Podemos comparar esto con la T_c calculada mediante la ecuación (36.39). Recordando que $M_{\text{sat}} = \mu N$, tenemos

$$T_c = \lambda\,\frac{N\mu^2}{k\epsilon_0 c^2}.$$

De la densidad y el peso atómico del níquel, obtenemos

$$N = 9.1 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3}.$$

Tomando μ de la ecuación (36.28), y poniendo $\lambda = \frac{1}{3}$, obtenemos

$$T_c = 0.24\text{K}.$$

¡Hay una discrepancia por un factor de cerca de 2 600! Nuestra teoría del ferromagnetismo falla completamente.

Podemos tratar de "remendar" la teoría como Weiss lo hizo, diciendo que por alguna razón desconocida λ no es un tercio, sino $(2\,600)\times\frac{1}{3}$ —o alrededor de 900—. Resulta que se obtienen valores parecidos para otros materiales ferromagnéticos como el hierro. Para entender lo que esto significa, volvamos a la ecuación (36.36). Vemos que una λ grande significa que B_a, el campo local sobre el átomo, parece ser muchísimo mayor de lo que pensaríamos. De hecho, escribiendo $H = B - M/\varepsilon_0 c^2$, tenemos

$$B_a = B + \frac{(\lambda - 1)M}{\epsilon_0 c^2}.$$

Así pues, conforme a nuestra idea original, con $\lambda = \frac{1}{3}$ la magnetización local M *reduce* el campo efectivo B_a en la cantidad $-\frac{2}{3}M/\varepsilon_0 c^2$. Sin embargo, si nuestro modelo de una cavidad esférica no fuese muy bueno, aún sería de esperar *alguna* reducción. En cambio, para explicar el fenómeno del ferromagnetismo, tenemos que imaginarnos que la magnetización del campo *realza* el campo local en algún factor grande —como 1 000 o más—. Parece no haber ninguna manera razonable de fabricar tales campos tremendos en un átomo —¡ni aún campos del signo

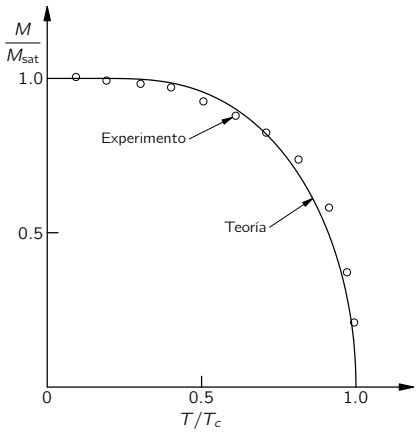


Figura 36-15. Magnetización espontánea del níquel en función de la temperatura.

apropiado!—. Claramente, nuestra teoría "magnética" del ferromagnetismo es un triste fracaso. Debemos concluir entonces que el ferromagnetismo tiene que ver con alguna interacción *no magnética* entre los espines de los electrones de átomos vecinos. Esta interacción debe generar una fuerte tendencia de todos los espines a alinearse en una dirección. Veremos luego que esto tiene que ver con la mecánica cuántica y el principio de exclusión de Pauli.

Finalmente, examinemos lo que sucede a temperaturas bajas —para $T < T_c$—. Hemos visto que hay además una magnetización espontánea —aún con $H = 0$— dada por la intersección de las curvas a y b_2 de la figura 36-14. Si calculamos M para varias temperaturas —cambiando la pendiente de la recta b_2— obtenemos la curva teórica mostrada en la figura 36-15. Esta curva debe ser la misma para todos los materiales ferromagnéticos para los cuales el momento atómico proviene de un solo electrón. Las curvas para otros materiales son sólo ligeramente diferentes.

En el límite, cuando T tiende a cero absoluto, M tiende a M_{sat}. Cuando se aumenta la temperatura, la magnetización disminuye, cayendo a cero a la temperatura de Curie. Los puntos de la figura 36-15 son las observaciones experimentales para el níquel. Concuerdan con la curva teórica bastante bien. Aunque no entendamos el mecanismo básico, las características generales de la teoría parecen correctas.

Finalmente, hay una discrepancia perturbadora más en nuestra tentativa de comprender el ferromagnetismo. Hemos encontrado que por encima de cierta temperatura el material debe comportarse como una sustancia paramagnética con una magnetización M proporcional a H (o B) y que por debajo de esa temperatura debe volverse espontáneamente magnetizado. Pero eso no es lo que hallamos cuando medimos la curva de magnetización del hierro. Solamente se volvía permanentemente magnetizado *después* de haberlo "magnetizado". De acuerdo con las ideas que acabamos de discutir ¡debe magnetizarse él mismo! ¿Qué es lo que está mal? Bien, resulta que si examinan un *cristal suficientemente pequeño* de hierro o níquel, en verdad está completamente magnetizado. Pero en trozos grandes de hierro, hay muchas regiones o "dominios" pequeños que están magnetizados en diferentes direcciones, así que en gran escala la magnetización *promedio* parece ser cero. Sin embargo, en cada dominio pequeño, el hierro tiene una magnetización fija, siendo M casi igual a M_{sat}. Las consecuencias de esta estructura de dominios son que las propiedades macroscópicas de trozos grandes de material son muy diferentes de las propiedades microscópicas que realmente hemos estado tratando. En la próxima clase estudiaremos lo referente al comportamiento práctico de los materiales magnéticos en escala grande.

37

Materiales magnéticos

37-1 Qué es el ferromagnetismo
37-2 Propiedades termodinámicas
37-3 La curva de histéresis
37-4 Materiales ferromagnéticos
37-5 Materiales magnéticos fuera de lo común

37-1 Qué es el ferromagnetismo

En este capítulo discutiremos el comportamiento y peculiaridades de los materiales ferromagnéticos y de otros materiales magnéticos extraños. Sin embargo, antes de proceder a estudiar los materiales magnéticos, repasaremos rápidamente algo acerca de la teoría general de imanes que aprendimos en el capítulo anterior.

Primero imaginamos las corrientes atómicas dentro del material que son responsables del magnetismo, y luego las describimos en función de una densidad de corriente volumétrica $\boldsymbol{j}_{\text{mag}} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{M}$. Recalcamos que no se supone que esto represente las corrientes *de verdad*. Cuando la magnetización es uniforme las corrientes *realmente* no se cancelan en forma exacta; dicho de otro modo, los remolinos de corriente de un electrón en un átomo y los remolinos de corriente de un electrón en otro átomo no se superponen de tal forma que la suma sea exactamente cero. Todavía dentro de un solo átomo la distribución de magnetismo *no* es uniforme. Por ejemplo, en un átomo de hierro la magnetización está distribuida en una capa más o menos esférica, no muy cerca del núcleo ni muy lejos tampoco. Luego, el magnetismo de la materia es una cosa bastante complicada en sus detalles; es muy irregular. Sin embargo, nos vemos obligados ahora a ignorar esta detallada complejidad y discutir el fenómeno desde un punto de vista no tan preciso y promedio. Así, es cierto que la corriente *promedio* en la región interna, sobre cualquier área finita que sea grande comparada con un átomo, es cero cuando $\boldsymbol{M} = 0$. Así, lo que entendemos por magnetización por unidad de volumen y $\boldsymbol{j}_{\text{mag}}$ y lo demás, en el nivel que ahora estamos considerando, es un promedio sobre regiones que son grandes comparadas con el espacio ocupado por un solo átomo.

Revisar

Bozorth, R. M., "Magnetism", *Encyclopaedia Britannica*, vol. 14, 1957, pp. 636-667.

Charles Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 2ª ed., John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1956.

En el capítulo anterior también descubrimos que un material ferromagnético tiene la siguiente propiedad interesante: por encima de una temperatura determinada no es fuertemente magnético, mientras que por debajo de esta temperatura se vuelve magnético. Es fácil demostrar esto. Un pedazo de alambre de níquel a temperatura ambiente es atraído por un imán. Sin embargo, si con un mechero lo calentamos por encima de su temperatura de Curie, se vuelve no magnético y no es atraído por el imán —aun cuando se lo acerque bien al imán—. Si lo dejamos cerca del imán mientras se enfría, en el instante en que su temperatura cae por debajo de la temperatura crítica, ¡el imán lo atrae de repente otra vez!

La teoría general del ferromagnetismo que usaremos supone que el espín del electrón es responsable de la magnetización. El electrón tiene espín un medio y lleva un magnetón de Bohr de momento magnético $\mu = \mu_B = q_e\hbar/2m$. El espín del electrón puede estar apuntando tanto "hacia arriba" como "hacia abajo". Debido a que el electrón tiene una carga negativa, cuando su espín es "hacia arriba" tiene un momento *negativo* y cuando su espín es "hacia abajo" tiene un momento *positivo*. Con nuestra convención habitual, el momento $\boldsymbol{\mu}$ del electrón es opuesto a su espín. Hemos encontrado que la energía de orientación de un dipolo magnético en un campo aplicado $\boldsymbol{B}$ dado es $-\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}$; sin embargo, la energía de un electrón con espín depende del alineamiento de los espines más cercanos. En el hierro, si el momento de un átomo está "hacia arriba", hay una tendencia muy fuerte a que el momento de uno contiguo también esté "hacia arriba". Esto es lo que hace que el hierro, el cobalto y el níquel sean fuertemente magnéticos —todos los momentos quieren ser paralelos—. La primera pregunta que tenemos que discutir es *por qué*.

Poco después del desarrollo de la mecánica cuántica, se observó que hay una fuerza *aparente* muy fuerte —no una fuerza magnética o cualquier otra clase de fuerza real, sino solamente una fuerza aparente— tratando de alinear los espines de electrones cercanos en direcciones *opuestas*. Estas fuerzas están íntimamente relacionadas con las fuerzas químicas de valencia. Hay un principio de la mecánica cuántica —llamado *principio de exclusión*— que dice que dos electrones no pueden ocupar exactamente el mismo estado, que no pueden estar exactamente en la misma condición en lo que respecta a posición y orientación del espín.* Por ejemplo, si están en el mismo punto, la única alternativa es tener sus espines opuestos. Así, si hay una región del espacio entre átomos donde a los electrones les gusta congregarse (como en un enlace químico) y queremos poner otro electrón encima de uno que ya esté allí, la única forma de hacerlo es que el espín del segundo apunte en dirección opuesta al espín del primero. Así pues, tener los espines paralelos es contra las leyes, a menos que los electrones estén lejos uno de otro. Esto tiene el efecto de que un par de electrones con espines paralelos cerca uno del otro tiene mucha más energía que un par de electrones con espines opuestos; el efecto resultante es como si una fuerza tratara de invertir el espín. A veces se llama *fuerza de intercambio* a esta fuerza de inversión de espín, pero este nombre sólo la hace más misteriosa —no es un nombre muy bueno—. Es simplemente por el principio de exclusión que los electrones tienen una tendencia a hacer que sus espines sean opuestos. En realidad, ¡ésa es la explicación de la *carencia* de magnetismo en la casi totalidad de las sustancias! Los espines de los electrones libres en el exterior de los átomos tienen una fortísima tendencia a equilibrarse en direcciones opuestas. El problema es explicar por qué en materiales como el hierro sucede precisamente lo contrario de lo que sería de esperar.

Hemos resumido el efecto de alineamiento supuesto agregando un término conveniente en la ecuación de energía, diciendo que si los imanes electrónicos vecinos tienen una magnetización media M, entonces el momento de un electrón tiene una fuerte tendencia a estar en la misma dirección que la magnetización media de los átomos vecinos. Por lo tanto, podemos escribir, para las dos posibles orientaciones del espín,†

$$\begin{aligned}\text{Energía del espín “hacia arriba”} &= +\mu\left(H+\frac{\lambda M}{\epsilon_0 c^2}\right),\\ \text{Energía del espín “hacia abajo”} &= -\mu\left(H+\frac{\lambda M}{\epsilon_0 c^2}\right).\end{aligned}\tag{37.1}$$

Cuando quedó claro que la mecánica cuántica podía proporcionar una tremenda fuerza orientadora del espín —aunque aparentemente con el signo equivocado— se sugirió que el ferromagnetismo debe tener su origen en la misma fuerza, que debido a la complejidad del hierro y al gran número de electrones implicados, el signo de la energía de interacción podría resultar a la inversa. Por la época en que se pensó en esto —alrededor de 1927, cuando se empezó a comprender la mecánica cuántica— mucha gente había estado haciendo diversas estimaciones y semicálculos, tratando de conseguir una predicción teórica de λ. Los cálculos más recientes de la energía entre los dos espines electrónicos en el hierro —suponiendo que la interacción es directamente entre los dos electrones de átomos vecinos— dan aún el *signo equivocado*. La comprensión actual del fenómeno es suponer que esto se debe en cierta medida a la complejidad de la situación y ¡tener la esperanza de que el próximo hombre que haga el cálculo con una situación más complicada obtenga la respuesta correcta!

Se cree que el espín hacia arriba de uno de los electrones de la capa interna, que está produciendo el magnetismo, tiende a hacer que los electrones de conducción que vuelan por fuera tengan el espín opuesto. Es de esperar que esto suceda

* Véase capítulo 4 del volumen III (sección 4-7).

† Escribimos estas ecuaciones con $H = B - M/\epsilon_0 c^2$ en lugar de B de acuerdo con el trabajo del capítulo anterior. Tal vez prefieran escribir $U = \pm\mu B_a = \pm\mu(B + \lambda' M/\epsilon_0 c^2)$, donde $\lambda' = \lambda - 1$. Es lo mismo.

porque los electrones de conducción entran en la misma región que los electrones "magnéticos". Como se mueven, pueden llevar al átomo siguiente su preferencia a estar cabeza abajo; es decir, un electrón "magnético" trata de forzar a los electrones de conducción a ser opuestos y el electrón de conducción hace luego que el electrón "magnético" siguiente se oponga a *él*. La doble interacción es equivalente a una interacción que trata de alinear los dos electrones "magnéticos". En otras palabras, la tendencia a que los espines sean paralelos se debe a un intermediario que tiende en cierta medida a ser opuesto a ambos. Este mecanismo no requiere que los electrones de conducción estén completamente "cabeza abajo". Podrían tener sólo una ligera preferencia a estar hacia abajo, la suficiente como para hacer que sean mayores las probabilidades de que los "magnéticos" estén en el otro sentido. Éste es el mecanismo que quienes han calculado tales cosas creen actualmente que es el responsable del ferromagnetismo. Pero debemos recalcar que hoy en día nadie puede calcular la magnitud de λ sabiendo simplemente que el material es el número 26 en la tabla periódica. En resumen, no lo comprendemos perfectamente.

Continuemos ahora con la teoría para luego volver a discutir cierto error implícito en la forma en que la hemos enunciado. Si el momento magnético de un determinado electrón es "hacia arriba", la energía proviene del campo externo y también de la tendencia de los espines a estar paralelos. Como la energía es menor cuando los espines son paralelos, a veces se considera el efecto como si se debiera a un "campo interno efectivo". Pero recuerden, *no* se debe a una fuerza *magnética* verdadera; es una interacción más complicada. En todo caso, tomamos las ecuaciones (37.1) como las fórmulas para la energía de los dos estados de espín de un electrón "magnético". A una temperatura T, la probabilidad relativa de estos dos estados es proporcional a $e^{-\text{energía}/kT}$ la cual podemos escribir como $e^{\pm x}$, con $x = \mu(H + \lambda M/\epsilon_0 c^2)/kT$. Entonces, si calculamos el valor medio del momento magnético, encontramos (como en el capítulo anterior) que es

$$M = N\mu \tanh x. \tag{37.2}$$

Ahora querríamos calcular la energía interna del material. Notamos que la energía de un electrón es exactamente proporcional al momento magnético, así que el cálculo del momento medio y el de la energía media son los mismos —excepto que en lugar de μ, en la ecuación (37.2) debemos escribir $-\mu B$, que es $-\mu(H + \lambda M/\epsilon_0 c^2)$—. La energía media es entonces

$$\langle U\rangle_{\text{prom}} = -N\mu\left(H + \frac{\lambda M}{\epsilon_0 c^2}\right)\tanh x.$$

Ahora bien, esto no es del todo correcto. El término $\lambda M/\epsilon_0 c^2$ representa interacciones de todos los *pares* posibles de átomos y debemos acordarnos de contar cada par solamente *una vez*. (Cuando consideramos la energía de un electrón en el campo de los restantes y luego la energía de un segundo electrón en el campo de los restantes, hemos contado parte de la primera energía una vez más.) Por lo tanto, debemos dividir el *término de interacción mutua* entre dos, y nuestra fórmula para la energía se transforma en

$$\langle U\rangle_{\text{prom}} = -N\mu\left(H + \frac{\lambda M}{2\epsilon_0 c^2}\right)\tanh x. \tag{37.3}$$

En el capítulo anterior descubrimos una cosa interesante —que por debajo de una temperatura determinada el material encuentra una solución de las ecuaciones en la que el momento magnético *no es cero*, aun sin campo magnetizante externo—. Haciendo $H = 0$ en la ecuación (37.2), encontramos que

$$\frac{M}{M_{\text{sat}}} = \tanh\left(\frac{T_c}{T}\,\frac{M}{M_{\text{sat}}}\right), \tag{37.4}$$

donde $M_{\text{sat}} = N\mu$ y $T_c = \mu\lambda M_{\text{sat}}/k\epsilon_0 c^2$. Resolviendo esta ecuación (gráficamente o en cualquier otra forma), vemos que la relación M/M_{sat} en función de

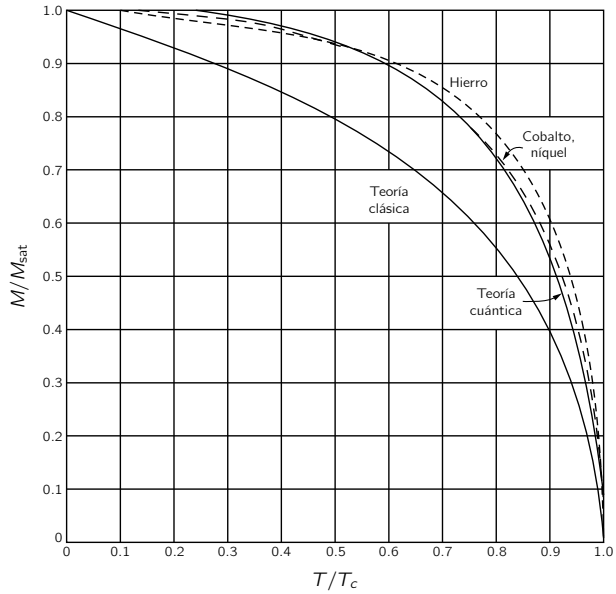


Figura 37-1. La magnetización espontánea ($H = 0$) de cristales ferromagnéticos en función de la temperatura. [Cortesía de *Encyclopaedia Britannica*.]

T/T_c es una curva como la marcada "teoría cuántica" en la figura 37-1. La curva discontinua marcada "cobalto, níquel" muestra los resultados experimentales con cristales de estos elementos. La teoría y el experimento concuerdan razonablemente. La figura muestra también el resultado de la teoría clásica, donde los cálculos se hacen suponiendo que los imanes atómicos pueden tener todas las orientaciones posibles en el espacio. Pueden ver que esta suposición da una predicción que no se acerca a los hechos experimentales.

Aun la teoría cuántica se desvía del comportamiento observado a temperaturas altas y bajas. La razón de esta desviación es que hemos hecho una aproximación bastante descuidada en la teoría: hemos supuesto que la energía de un átomo depende de la magnetización *media* de los átomos cercanos. En otras palabras, por cada uno que esté "hacia arriba" en las cercanías de un átomo dado, habrá una contribución de energía debido al efecto cuántico de alineación. ¿Pero cuántos hay apuntando "hacia arriba"? En promedio, esto se mide por la magnetización M —pero solamente *en promedio*—. En algún lugar, un átomo particular podría encontrar *todos* sus vecinos "hacia arriba". Entonces su energía sería mayor que el promedio. Otro podría encontrar algunos hacia arriba y algunos hacia abajo, tal vez promediando a cero, y no se tendría *ninguna* energía de ese término, y así sucesivamente. Lo que deberíamos hacer es usar algún tipo de promedio más complicado, porque los átomos que están en diferentes lugares tienen distintos ambientes y los números de átomos hacia arriba y hacia abajo son diferentes para cada uno. En lugar de tomar un átomo sujeto a una influencia promedio, deberíamos tomar cada uno en su situación real, calcular su energía y hallar la *energía media*. Pero ¿cómo saber cuántos están "hacia arriba" y cuántos "hacia abajo" en la vecindad? Por supuesto, esto es precisamente lo que estamos tratando de calcular —el número de espines "hacia arriba" y "hacia abajo"—, así que tenemos un problema de correlaciones interconectado y muy complicado, un problema que nunca ha sido resuelto. Es un problema fascinante y lleno de motivación que ha existido por años y sobre el cual algunos de los más grandes físicos han escrito, pero ni siquiera ellos lo han resuelto completamente.

Resulta que a bajas temperaturas, cuando casi todos los imanes atómicos están "hacia arriba" y unos pocos "hacia abajo", es fácil resolverlo; y a temperaturas altas, bastante por encima de la temperatura de Curie T_c, cuando están casi todos al azar, otra vez es fácil. A menudo es fácil calcular desviaciones pequeñas de alguna situación sencilla e idealizada, así que se comprende bastante bien por qué hay desviaciones respecto de la teoría simple a temperaturas bajas. También se comprende físicamente que por razones estadísticas la magnetización *debe*

desviarse a temperaturas altas. Pero el comportamiento correcto cerca del punto de Curie nunca ha sido resuelto completamente. Éste es un problema interesante para estudiar algún día que quieran un problema que nunca ha sido resuelto.

37-2 Propiedades termodinámicas

En el capítulo anterior dimos la base necesaria para calcular las propiedades termodinámicas de materiales ferromagnéticos. Naturalmente, están relacionadas con la energía interna del cristal, la cual incluye interacciones de los diversos espines, y está dada por la ecuación (37.3). Para la energía de magnetización espontánea por debajo del punto Curie, podemos hacer $H = 0$ en la ecuación (37.3) y —notando que $\tanh x = M/M_{\text{sat}}$— encontramos una energía media proporcional a M^2:

$$\langle U\rangle_{\text{prom}} = -\frac{N\mu\lambda M^2}{2\epsilon_0 c^2 M_{\text{sat}}}. \tag{37.5}$$

Ahora representamos en una gráfica la energía debida al magnetismo en función de la temperatura, obtenemos una curva que es menos el cuadrado de la curva de la figura 37-1, como se ha dibujado en la figura 37-2(a). Si midiéramos el *calor específico* de tal material obtendríamos una curva que es la derivada de 37-2(a). Está mostrado en la figura 37-2(b). Sube lentamente al aumentar la temperatura, pero cae súbitamente a cero en $T = T_c$. La caída brusca se debe al cambio de pendiente de la energía magnética y ocurre justo en el punto Curie. Así, sin ninguna medición magnética podemos descubrir que algo está ocurriendo dentro del hierro o del níquel midiendo esta propiedad termodinámica. Sin embargo, tanto los datos experimentales como la teoría mejorada (con fluctuaciones incluidas) sugieren que esta curva sencilla está mal y que la situación es realmente más complicada. La curva va más alto en el pico y cae a cero algo lentamente. Aunque la temperatura sea lo suficientemente alta como para hacer que los espines se orienten al azar *en promedio*, quedan regiones locales donde hay una cierta cantidad de polarización y en estas regiones los espines todavía tienen un poco de energía adicional de interacción —la cual sólo cae lentamente a medida que los espines se disponen más y más al azar al aumentar la temperatura—. Así, la curva verdadera se parece a la figura 37-2(c). Uno de los retos de la física teórica hoy en día es hallar una descripción teórica exacta del carácter del calor específico cerca de la transición de Curie —un problema fascinante que aún no ha sido resuelto—. Naturalmente, este problema está muy relacionado con la forma de la curva de magnetización en la misma región.

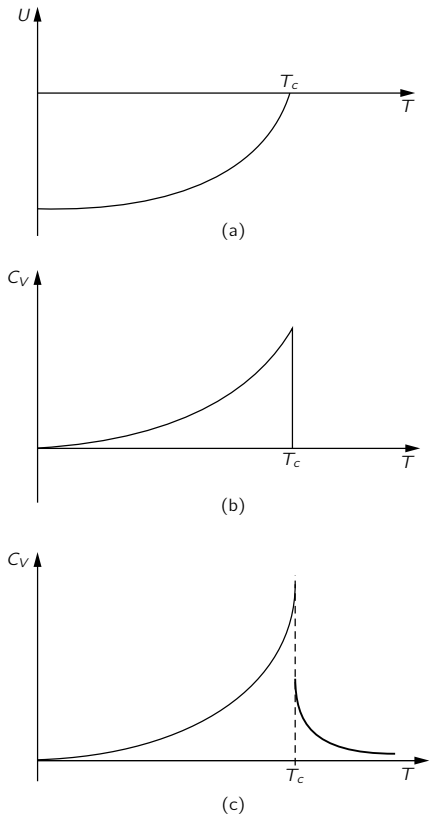


Figura 37-2. La energía por unidad de volumen y calor específico de un cristal ferromagnético.

Ahora queremos describir algunos experimentos, diferentes de los termodinámicos, que demuestran que hay algo *correcto* en nuestra interpretación del magnetismo. Cuando se magnetiza el material hasta la saturación a temperaturas suficientemente bajas, M es casi igual a M_{sat} —casi todos los espines son paralelos, lo mismo que sus momentos magnéticos—. Podemos comprobar esto con un experimento. Supongan que suspendemos un imán de barra de una fibra delgada y luego lo rodeamos de una bobina de modo que podamos invertir el campo magnético sin tocar el imán ni aplicarle torque alguno. Éste es un experimento muy difícil porque las fuerzas magnéticas son tan grandes que cualquier irregularidad, cualquier desequilibrio, o cualquier falta de perfección del hierro, producirá torques accidentales. Sin embargo, el experimento ha sido hecho con sumo cuidado minimizando los torques accidentales. Por medio del campo magnético de una bobina que rodea la barra, invertimos al mismo tiempo todos los imanes atómicos. Al hacer esto también cambiamos los momenta angulares de todos los espines de "hacia arriba" a "hacia abajo" (véase figura 37-3). Para que el momentum angular se conserve al invertir los espines, el resto de la barra debe tener una variación opuesta de momentum angular. El imán completo empezará a girar. Y realmente, cuando hacemos el experimento, vemos que el imán gira ligeramente. Podemos medir el momentum angular total impartido a todo el imán, el cual es simplemente N por $\hbar$, la variación de momentum angular de cada espín. El cociente entre el momentum angular y el momento magnético medido de esta forma resulta dentro de 10 % de lo que calculamos. En

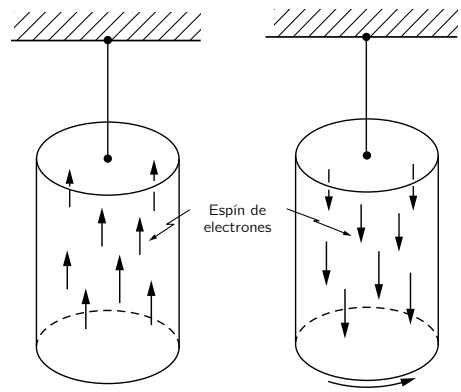


Figura 37-3. Cuando se invierte la magnetización de una barra de hierro, se le da algo de momentum angular.

realidad, nuestros cálculos suponen que los imanes atómicos se deben meramente al espín del electrón, pero hay además cierto movimiento orbital en la mayoría de los materiales. El movimiento orbital no es completamente libre de la red y no contribuye más que en un pequeño porcentaje al magnetismo. En efecto, el campo magnético de saturación que se obtiene tomando $M_{\text{sat}} = N\mu$ y usando la densidad 7.9 del hierro y el momento μ del electrón con espín, es alrededor de 20 000 gauss. Pero conforme a los datos experimentales está realmente en las cercanías de 21 500 gauss. Ésta es una magnitud de error típica —5 o 10 %— debido a que despreciamos las contribuciones de los momentos orbitales que no hemos incluido al hacer el análisis. Por lo tanto, una ligera discrepancia con las mediciones giromagnéticas es muy comprensible.

37-3 La curva de histéresis

Hemos concluido de nuestro análisis teórico que un material ferromagnético debe magnetizarse espontáneamente por debajo de una temperatura determinada, de modo que todo el magnetismo estaría en la misma dirección. Pero sabemos que esto no es cierto en el caso de un pedazo común de hierro *no magnetizado*. ¿Por qué no todo el hierro está magnetizado? Podemos explicarlo con la ayuda de la figura 37-4. Supongan que el hierro fuera un gran monocristal de la forma mostrada en la figura 37-4(a) y se magnetizara espontáneamente en una dirección. Entonces habría un campo magnético externo considerable que tendría un montón de energía. Podemos reducir esa energía de campo si arreglamos que un lado del bloque esté magnetizado "hacia arriba" y el otro lado magnetizado "hacia abajo", como en la figura 37-4(b). Por supuesto, entonces los campos se extenderían fuera del hierro sobre menor volumen, de modo que allí habría menor energía.

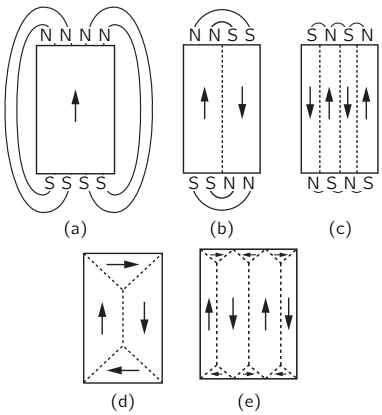


Figura 37-4. La formación de dominios en un monocristal de hierro. [De Charles Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 2ª ed., John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1956.]

¡Ah, pero un momento! En la capa entre las dos regiones tenemos electrones con espín hacia arriba junto a electrones con espín hacia abajo. Pero el ferromagnetismo aparece solamente en los materiales para los cuales la energía se *reduce* si los electrones están *paralelos* en lugar de opuestos. Así, tenemos que agregar cierta energía adicional a lo largo de la línea punteada de la figura 37-4(b). A veces se llama *energía de pared* a esta energía. Una región que solamente tenga una dirección de magnetización se llama *dominio*. En la superficie de separación —"la pared"— entre dos dominios, donde tenemos átomos en lados opuestos que tienen espines en direcciones diferentes, hay una energía por unidad de área de la pared. Lo hemos descrito como si dos átomos adyacentes tuvieran espines exactamente opuestos, pero resulta que la naturaleza ajusta las cosas de modo que la transición sea más gradual. Pero no necesitamos preocuparnos de estos detalles tan sutiles a estas alturas.

Ahora bien, la cuestión es: ¿cuándo es mejor o peor hacer una pared? La respuesta es que depende del *tamaño* de los dominios. Supongan que aumentáramos el bloque a escala de modo que todo fuese dos veces mayor. El volumen del espacio externo lleno de un fuerte campo magnético sería *ocho* veces mayor y la energía del campo magnético, que es proporcional al volumen, también sería ocho veces mayor. Pero la *superficie* entre los dos dominios, la cual dará la energía de la pared, será sólo *cuatro* veces mayor. Por lo tanto, si el pedazo de hierro es suficientemente grande, será mejor dividirlo en más dominios. Ésta es la razón de por qué únicamente los cristales pequeñísimos pueden tener sólo un dominio. Cualquier objeto grande —de tamaño mayor que alrededor de un centésimo de milímetro— tendrá por lo menos una pared de dominio; y cualquier objeto ordinario, del orden del centímetro, estará dividido en muchos dominios, como muestra la figura. La división en dominios continúa *hasta que la energía necesaria para poner una pared adicional sea tan grande como la disminución de energía del campo magnético fuera del cristal.*

En realidad, la naturaleza ha descubierto otra manera de bajar la energía: no es de ninguna manera necesario tener un campo por fuera si una región triangular pequeña se magnetiza *lateralmente*, como en la figura 37-4(d).* Luego, con el

* ¡Tal vez se pregunten cómo es que espines que deberían estar "hacia arriba" o "hacia abajo"

arreglo de la figura 37-4(d), vemos que *no* hay campo externo, sino únicamente unas pocas paredes más de dominio.

Pero esto introduce un nuevo tipo de problema. Resulta que cuando se magnetiza un cristal de hierro, cambia su longitud en la dirección de la magnetización, así que un cubo "ideal" con su magnetización "hacia arriba" digamos, ya no será un cubo perfecto. La dimensión "vertical" será diferente de la "horizontal". Este efecto se llama "*magnetostricción*". Debido a tales cambios geométricos, los trozos triangulares pequeños de la figura 37-4(b) ya no "encajan", por así decir, en el espacio disponible —el cristal se ha alargado demasiado en un sentido y acortado demasiado en el otro—. Por supuesto, *sí* encajan realmente, pero aplastándose; y esto implica cierto esfuerzo mecánico. Así, este arreglo *también* introduce una energía adicional. Es el balance de todas estas energías lo que establece cómo se disponen los dominios de manera complicada en un pedazo de hierro no imantado.

Ahora bien, ¿qué sucede cuando aplicamos un campo magnético externo? Para tomar un caso sencillo, consideren un cristal cuyos dominios sean como muestra la figura 37-4(d). Si aplicamos un campo magnético externo hacia arriba, ¿de qué manera se magnetiza el cristal? Primero, la pared de dominio que está en el medio se puede *deslizar hacia un lado* (hacia la derecha) y reducir la energía. Se desliza de modo que la región que está "hacia arriba" se vuelve más grande que la región que está "hacia abajo". Hay más imanes elementales alineados hacia arriba con el campo y esto da una energía más baja. Así, en un pedazo de hierro en campos débiles —al comienzo mismo de la magnetización— las paredes de dominio empiezan a moverse y se tragan las regiones que están magnetizadas en dirección opuesta al campo. A medida que el campo continúa aumentando, todo el cristal se convierte paulatinamente en un solo dominio grande que el campo externo ayuda a mantener alineado. En un campo fuerte, al cristal "le gusta" estar todo en un sentido *simplemente porque* se reduce su energía en el campo aplicado —lo que importa ya no es sólo el propio campo externo del cristal—.

¿Y si la geometría no es tan simple? ¿Y si los ejes del cristal y su magnetización espontánea están en una dirección, pero aplicamos el campo magnético en a*lguna otra dirección* —digamos que a 45°—? Se podría pensar que los dominios se volverían a formar con su magnetización paralela al campo y entonces, como antes, podrían transformarse todos en un solo dominio. Pero no es tan fácil que el hierro haga esto, pues *la energía necesaria para magnetizar un cristal depende de la dirección de magnetización respecto a los ejes del cristal.* Es relativamente fácil magnetizar hierro en una dirección paralela a los ejes del cristal, pero se gasta *más* energía magnetizarlo en alguna otra dirección —como a 45° respecto a uno de los ejes—. Por lo tanto, si aplicamos un campo magnético en esa dirección, lo que sucede primero es que los dominios que apuntan según una de las direcciones preferidas que esté *cerca* del campo aplicado, crecen hasta que toda la magnetización esté según una de estas direcciones. Entonces, *con campos mucho más fuertes*, la magnetización es forzada gradualmente a ser paralela al campo, como en el esquema de la figura 37-5.

La figura 37-6 muestra algunas medidas de las curvas de magnetización de monocristales de hierro. Para comprenderlas, primero debemos explicar algo sobre la notación que se usa para describir direcciones en un cristal. Hay muchas formas de cortar un cristal para producir una cara que sea un plano de átomos. Cualquiera que haya paseado en auto por un huerto o un viñedo lo sabe —es algo fascinante de observar—. Si miran en un sentido, ven filas de árboles —si miran en otro sentido, ven diferentes filas de árboles, etc.—. De manera similar, un cristal tiene familias de planos definidas que poseen muchos átomos y los planos tienen esta característica importante (consideramos un cristal cúbico para hacerlo más fácil): si observamos donde los planos cortan los tres ejes de

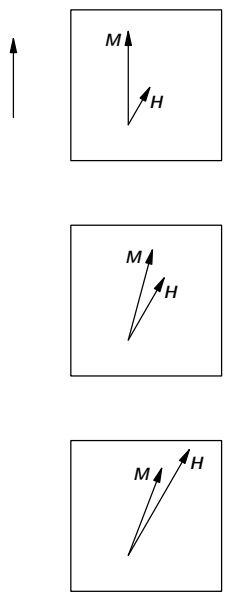


Figura 37-5. Un campo magnetizante ***H*** en ángulo respecto al eje del cristal eventualmente cambiará la dirección de magnetización sin cambiar su magnitud.

también pueden estar "hacia un lado"! Es una buena pregunta, pero no nos ocuparemos de ella en este momento. Simplemente adoptaremos el punto de vista clásico, pensar los imanes atómicos como dipolos clásicos que pueden ser polarizados lateralmente. La mecánica cuántica requiere experiencia considerable para entender cómo es que las cosas se cuantizan "hacia arriba y abajo" y "hacia la derecha e izquierda" al mismo tiempo.

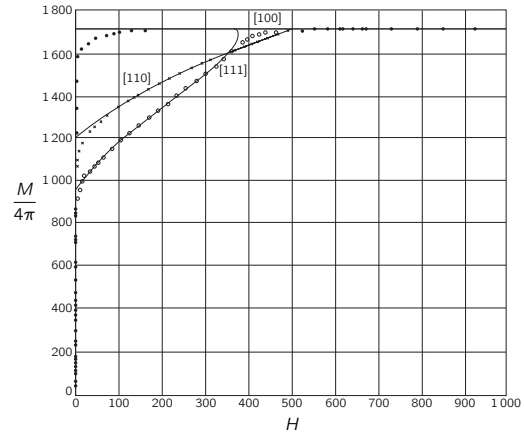


Figura 37-6. Las componentes de $\boldsymbol{M}$ paralelas a $\boldsymbol{H}$, para diferentes direcciones de $\boldsymbol{H}$ (respecto a los ejes del cristal). [De F. Bitter, *Introduction to Ferromagnetism*, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1937.]

coordenadas, encontramos que las *inversas* de las tres distancias al origen están en la proporción de números enteros simples. Se toman estos tres números enteros como la definición de los planos. Por ejemplo, la figura 37-7(a) muestra un plano paralelo al plano yz. Se le llama plano [100]: las inversas de sus intersecciones con los ejes y y z son cero. A la dirección perpendicular a tal plano (en un cristal cúbico) se le da el mismo conjunto de números. Es fácil entender la idea en un cristal cúbico, porque entonces los índices [100] representan un vector que tiene una componente unitaria en la dirección x y ninguna en las direcciones y y z. La dirección [110] está en una dirección a 45° respecto a los ejes x y y, como muestra la figura 37-7(b), y la dirección [111] está en la dirección de la diagonal del cubo, como en la figura 37-7(c).

Volviendo ahora a la figura 37-6, vemos las curvas de magnetización de un monocristal de hierro en diversas direcciones. Primero, observen que para campos muy diminutos —tan débiles que es difícil verlos en la escala— la magnetización aumenta extremadamente rápido hasta alcanzar valores muy grandes. Si el campo está en la dirección [100] —o sea según una de esas buenas y fáciles direcciones de magnetización— la curva sube hasta un valor alto, se curva un poco y luego se satura. Lo que sucede es que los dominios que ya había se eliminan muy fácilmente. Sólo se necesita un campo pequeño para correr las paredes de dominio y tragarse todos los dominios en "sentido equivocado". Los monocristales de hierro son enormemente permeables (en sentido magnético), mucho más que el hierro policristalino común. Un cristal perfecto se magnetiza con extrema facilidad. ¿Por qué la curva es redondeada? ¿Por qué no sube directamente hasta la saturación? No estamos seguros. Podrían estudiarlo ustedes algún día. Comprendemos por qué es horizontal para campos altos. Cuando todo el

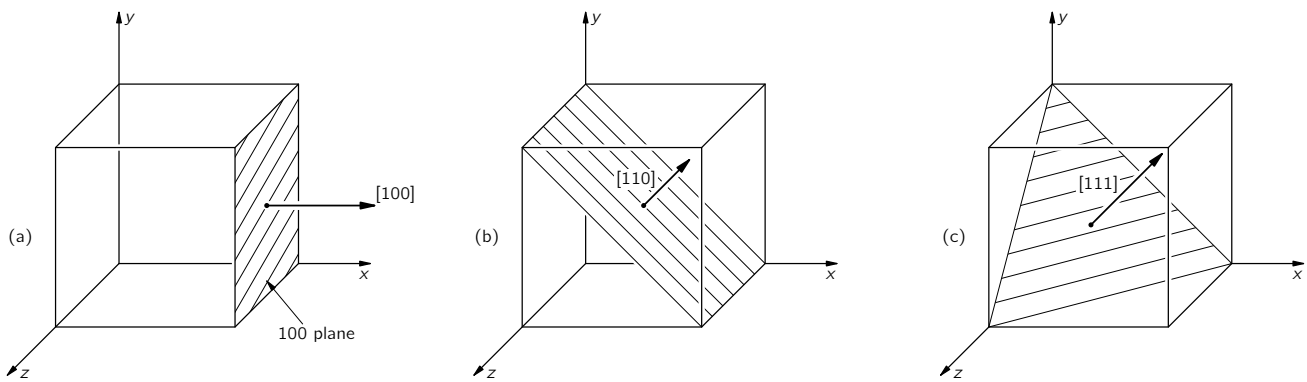


Figura 37-7. La forma de nombrar los planos de un cristal.

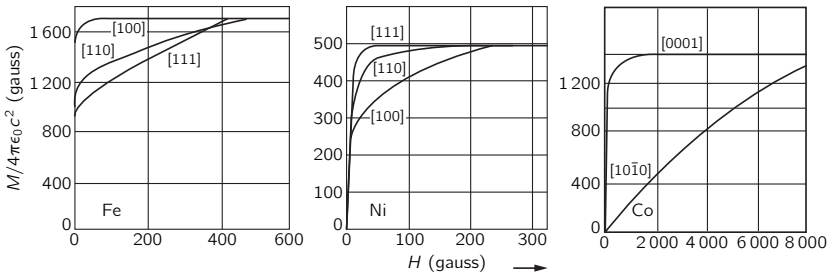


Figura 37-8. Curvas de magnetización para monocristales de hierro, níquel y cobalto. [De Charles Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 2ª ed., John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1956.]

bloque es un solo dominio, un campo magnético adicional no puede producir más magnetización —ya está en M_{sat}, con todos los electrones alineados—.

Ahora bien, si tratamos de hacer lo mismo en la dirección [110] —que está a 45° de los ejes del cristal— ¿qué sucederá? Aplicamos un campo pequeñísimo y la magnetización se eleva repentinamente a medida que crecen los dominios. A medida que seguimos aumentando el campo, encontramos que se necesita muchísimo campo para alcanzar la saturación, porque ahora la magnetización se está *apartando* de una dirección "fácil". Si esta explicación es correcta, el punto en el cual la curva [110] extrapolada hacia atrás corta el eje vertical sería $1/\sqrt{2}$ del valor de saturación. En efecto, resulta muy cercano a $1/\sqrt{2}$. Análogamente, en la dirección [111] —que está según la diagonal del cubo— hallamos, como es de esperar, que la curva extrapolada conduce a aproximadamente a $1/\sqrt{3}$ del valor de saturación.

La figura 37-8 muestra la situación correspondiente para otros dos materiales, níquel y cobalto. El níquel es diferente del hierro. En el níquel, resulta que la dirección [111] es la dirección fácil de magnetización. El cobalto tiene una forma cristalina hexagonal y en este caso se ha arruinado el sistema de nomenclatura. Se quiere tener tres ejes en la base del hexágono y uno perpendicular a ellos, así que se han usado cuatro índices. La dirección [0001] es la dirección del eje del hexágono y [1010] es perpendicular a ese eje. Vemos que los cristales de distintos metales se comportan en forma diferente.

Ahora debemos discutir un material policristalino, como un pedazo ordinario de hierro. Dentro de estos materiales hay muchísimos cristales pequeños con sus ejes cristalinos apuntando en todas direcciones. *Éstos no son lo mismo que los dominios*. Recuerden que los dominios eran todos parte de un *monocristal*, pero en un pedazo de hierro hay muchos *cristales diferentes* con sus ejes en distintas direcciones, como muestra la figura 37-9. Dentro de cada uno de estos cristales, por lo general, habrá también ciertos dominios. Cuando aplicamos un campo *pequeño* a un trozo de material policristalino, lo que ocurre es que las paredes de los dominios comienzan a desplazarse y crecen más los dominios que tienen una dirección favorable de magnetización fácil. Este crecimiento es reversible mientras el campo sea muy pequeño —si suprimimos el campo la magnetización vuelve a cero—. Esta parte de la curva de magnetización está indicada con a en la figura 37-10.

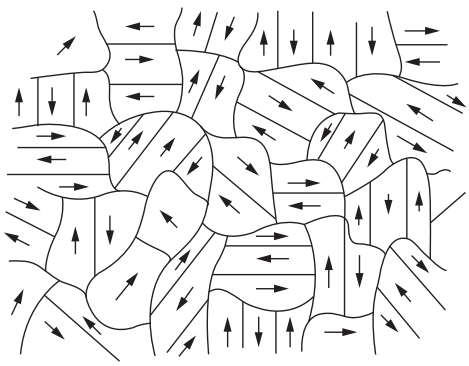


Figura 37-9. La estructura microscópica de un material ferromagnético no magnetizado. Cada grano de cristal tiene una dirección fácil de magnetización y se rompe en dominios que son magnetizados de manera espontánea (generalmente) paralelos a esta dirección.

Para campos mayores —en la región b de la curva de magnetización mostrada— las cosas se hacen mucho más complicadas. En cada cristal pequeño del material hay esfuerzos y dislocaciones; hay impurezas, suciedad e imperfecciones. Y en todo campo, excepto los más débiles, las paredes de dominio se pegan a ellas al desplazarse. Hay una energía de interacción entre la pared de dominio y la dislocación, el límite de un grano o una impureza. Así, cuando la pared llega a uno de ellos, se queda pegada; se queda allí mientras haya cierto campo. Pero cuando se aumenta el campo, la pared se zafa de repente y continúa desplazándose. Por lo tanto, el movimiento de las paredes de dominio no es suave como en un cristal perfecto —se para de vez en cuando y se desplaza a saltos—. Siempre que examinemos la magnetización en escala microscópica, veremos algo así como lo que muestra la figura 37-10.

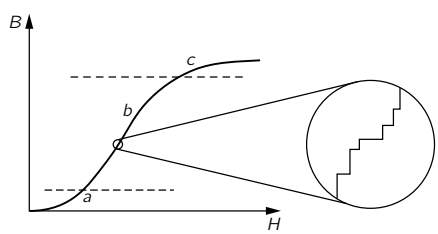


Figura 37-10. Curva de magnetización para hierro policristalino.

Ahora bien, lo importante es que estos saltos de magnetización pueden ocasionar una pérdida de energía. En primer lugar, cuando una pared logra zafarse de un impedimento, se mueve muy rápidamente hasta el siguiente, ya que el campo está por encima del que se necesitaría para el movimiento sin obstáculos. El movimiento rápido significa que hay campos magnéticos fuertemente variables que producen corrientes de Foucault en el cristal. Estas corrientes pierden energía al calentar el metal. Un segundo efecto es que cuando un dominio cambia de repente, parte del cristal cambia sus dimensiones debido a la magnetostricción. Cada cambio repentino de una pared de dominio origina una pequeña onda sonora que se lleva energía. Por causa de estos efectos, la segunda parte de la curva de magnetización es *irreversible* y *se pierde energía.* Éste es el origen del efecto de histéresis, porque hacer avanzar una pared de dominio —detención brusca— y luego hacerla volver hacia atrás —detención brusca— produce un resultado diferente. Es como fricción "a sacudidas" y se gasta energía.

Finalmente, para campos suficientemente altos, cuando hemos desplazado cada una de las paredes de dominio y magnetizado cada cristal en la mejor dirección, todavía quedan algunos cristales al azar cuyas direcciones de fácil magnetización no están en la dirección del campo magnético externo. Entonces se necesita mucho más campo para orientar esos momentos magnéticos. Por este motivo la magnetización aumenta lenta pero en forma pareja con campos altos —o sea en la región indicada con c en la figura—. La magnetización no llega abruptamente a su valor de saturación porque en la última parte de la curva los imanes atómicos están *dando vuelta* en el campo intenso. Vemos entonces por qué la curva de magnetización de un material policristalino ordinario, es como la mostrada en la figura 37-10, al principio sube poco y es *reversible*, luego sube de manera irreversible y al final se curva suavemente hacia la horizontal. Por supuesto, no hay una separación neta entre estas tres regiones —se pasa de una a otra suavemente—.

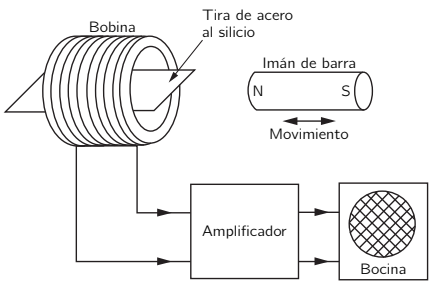


Figura 37-11. Los cambios repentinos en la magnetización de las tiras de acero se escuchan como clics en la bocina.

No es difícil demostrar que el proceso de magnetización en la parte media de la curva de magnetización es a saltos —que las paredes de dominio saltan y se detienen bruscamente a medida que se desplazan—. Todo lo que necesitan es una bobina de alambre —con muchas miles de vueltas— conectada a un amplificador y una bocina, como muestra la figura 37-11. Si ponen unas pocas hojas de acero al silicio (del tipo que se utiliza en los transformadores) en el centro de la bobina y acercan lentamente un imán a la pila de hojas, los cambios repentinos de magnetización producirán impulsos de fem en la bobina, que se oyen nítidamente como clics en la bocina. Al acercar más el imán al hierro oirán una ráfaga de clics que suenan algo así como el ruido de granos de arena que caen unos sobre otros al inclinar una lata de arena. Las paredes de dominio están saltando, deteniéndose y volviendo a saltar a medida que el campo aumenta. Este fenómeno se llama *efecto Barkhausen.*

Si acercan aún más el imán a las hojas de hierro, el ruido se hace más y más fuerte por unos instantes pero luego hay relativamente poco ruido cuando el imán está muy cerca. ¿Por qué? Porque casi todas las paredes de dominio se han desplazado todo lo que pueden. Lo que hace cualquier aumento de campo es simplemente *girar* la magnetización de cada dominio, lo cual es un proceso suave.

Si ahora retiran el imán, como para pasar a la rama descendente de la curva de histéresis, todos los dominios tratan de volver al estado de baja energía y oyen otra ráfaga de saltos hacia atrás. También pueden notar que si llevan el imán hasta cierta distancia y luego lo acercan y alejan muy poco, hay relativamente poco ruido. De nuevo es como inclinar una lata de arena; una vez que los granos se han desplazado hasta detenerse, no se los perturba con pequeños movimientos de la lata. En el hierro, las pequeñas variaciones de campo magnético no son suficientes para que ninguna pared transponga las "lomas".

37-4 Materiales ferromagnéticos

Querríamos hablar ahora de los diversos tipos de materiales magnéticos que hay en el mundo técnico y considerar algunos de los problemas que intervienen en

el diseño de materiales magnéticos para diferentes aplicaciones. En primer lugar, la expresión "propiedades magnéticas del hierro", que tanto se oye, es inapropiada —no hay tal cosa—. El "hierro" no es un material bien definido; las propiedades del hierro dependen en forma decisiva de la cantidad de impurezas y también de *cómo* está formado el hierro. Se darán cuenta de que las propiedades magnéticas dependerán de la facilidad de desplazamiento de las paredes de dominio y de que ésta es una propiedad *macroscópica* y no una propiedad de cada átomo. Así, el ferromagnetismo práctico no es realmente una propiedad de un *átomo* de hierro —es una propiedad de un *trozo de hierro* bajo *cierta forma*—. Por ejemplo, el hierro puede tener dos formas cristalinas. La forma común tiene una red cristalina cúbica de cuerpo centrado, pero también puede tener una red cúbica de caras centradas la cual, sin embargo, es estable sólo a temperaturas superiores a 900°C. Por supuesto, a esa temperatura la estructura cúbica de cuerpo centrado ya ha pasado el punto Curie. Sin embargo, aleando cromo y níquel con el hierro (una mezcla posible es 18 % de cromo y 8 % de níquel) podemos obtener lo que se llama acero inoxidable, el cual, aunque es principalmente hierro, retiene la red de caras centradas aun a bajas temperaturas. Debido a que su estructura cristalina es diferente, tiene propiedades magnéticas completamente distintas. La mayoría de los aceros inoxidables no son magnéticos en grado apreciable, aunque hay algunos tipos que lo son —depende de la composición de la aleación—. Aun cuando la aleación sea magnética, no es *ferro*magnética como el hierro común —aunque sea en su mayor parte sólo hierro—.

Querríamos describir algunos materiales especiales que han sido desarrollados con propiedades magnéticas especiales. En primer lugar, si queremos hacer un imán *permanente*, necesitamos un material con un lazo de histéresis enormemente *ancho*, de modo que al cortar la corriente y volver a un campo magnetizante nulo, quede una gran magnetización. En esos materiales las paredes de dominio deben estar "congeladas" en su lugar lo máximo posible. Uno de tales materiales es la notable aleación "alnico v" (51 % Fe, 8 % Al, 14 % Ni, 24 % Co, 3 % Cu). (La composición bastante compleja de esta aleación es una indicación del esfuerzo minucioso empleado en desarrollar buenos imanes. ¡Qué paciencia se necesita para mezclar cinco cosas y probarlas hasta encontrar la mejor sustancia!) Cuando el alnico solidifica, hay una "segunda fase" que precipita produciendo muchos granos minúsculos y esfuerzos internos muy grandes. En este material es muy difícil que los límites de dominio se muevan. Además de tener una composición precisa, el alnico se "trabaja" mecánicamente para que sus cristales adopten la forma de largos granos en la dirección en que va a ser la magnetización. Entonces, la magnetización tendrá una tendencia natural a estar alineada en estas direcciones y se quedará así debido a los efectos de anisotropía. Aún más, hasta se enfría el material en un campo magnético externo al fabricarlo, de modo que los granos crezcan con la dirección cristalina apropiada. La figura 37-12 muestra la curva de histéresis del alnico v. Pueden ver que es unas 700 veces más ancha que la curva de histéresis del hierro suave que mostramos en la figura 36-8 del capítulo anterior.

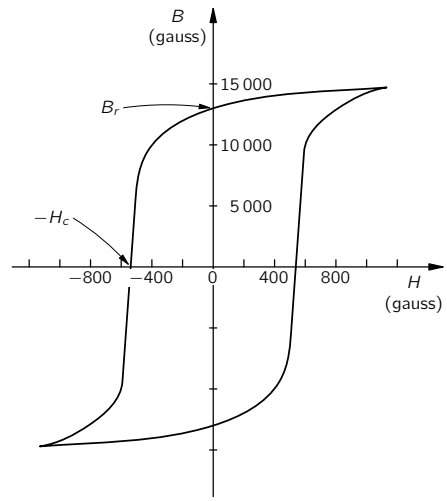


Figura 37-12. Curva de histéresis del alnico v.

Vayamos a otro tipo de material. Para construir transformadores y motores desearíamos un material que sea magnéticamente "blando" —un material en el que se pueda variar fácilmente la magnetización de modo que aplicando un campo muy pequeño se produzca una magnetización enorme—. Para conseguirlo, necesitamos material puro y bien recocido, el cual tendrá muy pocas dislocaciones e impurezas de modo que las paredes de dominio se puedan desplazar fácilmente. También sería bueno si pudiéramos lograr que la anisotropía fuese pequeña. De este modo, aunque un grano del material formara un ángulo inapropiado con el campo, se magnetizaría fácilmente. Ahora bien, hemos dicho que el hierro prefiere magnetizarse en la dirección [100], mientras que el níquel prefiere la dirección [111]; así, si mezclamos hierro y níquel en diversas proporciones, podríamos tener la esperanza de encontrar que en cierta proporción apropiada la aleación no prefiera *ninguna* dirección —las direcciones [100] y [111] serían equivalentes—. Resulta que esto ocurre con una mezcla de 70 % de níquel y 30 % de hierro. Además —posiblemente por casualidad o quizá por alguna relación física entre los

efectos de anisotropía y de magnetostricción— resulta que la *magnetostricción* del hierro y la del níquel tienen signos opuestos. Y en una aleación de los dos metales esta propiedad pasa por cero cuando contiene 80 % de níquel. Así, en algún punto entre 70 y 80 % de níquel obtenemos materiales magnéticos muy "blandos" —aleaciones que son muy fáciles de magnetizar—. Se las llama *permalloys*. Los permalloys son útiles para transformadores de alta calidad (a niveles de señal bajos), pero no servirían para imanes permanentes. Los permalloys deben ser fabricados y manipulados muy cuidadosamente. Las propiedades magnéticas de un pedazo de permalloy experimentan cambios radicales si se lo somete a esfuerzos superiores a su límite elástico —no se le debe doblar—. Entonces su permeabilidad se reduce debido a las dislocaciones, bandas de deslizamiento, etc., producidas por las deformaciones mecánicas. Los límites de dominio ya no pueden moverse fácilmente. Sin embargo, se puede recobrar la alta permeabilidad mediante el recocido a temperaturas altas.

A menudo es conveniente tener algunos números para caracterizar los diversos materiales magnéticos. Dos números útiles son las intersecciones de la curva de histéresis con los ejes B y H, como se indica en la figura 37-12. Estas intersecciones se llaman *campo magnético residual* B_r y *fuerza coercitiva* H_c. La tabla 37-1 da una lista de estos números en algunos materiales magnéticos.

Tabla 37-1

Propiedades de algunos materiales ferromagnéticos

Material	B_r Campo magnético residual (gauss)	H_c Fuerza coercitiva (gauss)
Supermalloy	(≈ 5 000)	0.004
Acero al silicio (transformador)	12 000	0.05
Hierro armco	4 000	0.6
Alnico V	13 000	550.

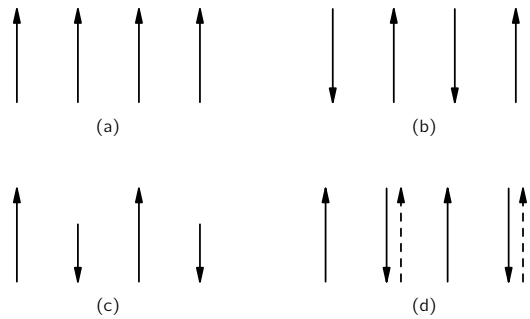


Figura 37-13. Orientación relativa de espines electrónicos en varios materiales: (a) ferromagnéticos, (b) antiferromagnéticos, (c) ferrita, (d) aleación de itrio con hierro. (Las flechas discontinuas muestran la dirección del momentum angular total, incluyendo el movimiento orbital.)

37-5 Materiales magnéticos fuera de lo común

Querríamos discutir ahora algunos de los materiales magnéticos más exóticos. En la tabla periódica hay muchos elementos que tienen capas electrónicas internas incompletas y que por lo tanto tienen momentos magnéticos atómicos. Por ejemplo, inmediatamente después de los elementos ferromagnéticos hierro, níquel y cobalto, encontrarán el cromo y el manganeso. ¿Por qué *no* son ferromagnéticos? La respuesta es que el término λ de la ecuación (37.1) tiene el *signo opuesto* en estos elementos. En la red del cromo, por ejemplo, los espines de los átomos de cromo se alternan de *átomo en átomo*, como muestra la figura 37-13(b). Así, el cromo *es* "magnético" desde su propio punto de vista, pero no es técnicamente interesante porque no hay efectos magnéticos *externos*. El cromo es entonces un ejemplo de material en el que los efectos cuánticos hacen que los espines sean alternos. Esta clase de material se llama *antiferromagnético*. En los materiales antiferromagnéticos el alineamiento también depende de la temperatura. Por debajo de una temperatura crítica, todos los espines están alineados alternadamente, pero cuando se calienta el material por encima de cierta temperatura —que también se llama temperatura de Curie— los espines se orientan repentinamente al azar. Internamente hay una transición repentina. Esta transición se puede ver en la curva del calor específico. También se manifiesta en ciertos efectos "magnéticos" especiales. Por ejemplo, se puede verificar la existencia de los espines alternados dispersando neutrones en un cristal de cromo. Como el neutrón mismo tiene espín (y momento magnético), tiene una amplitud de dispersión diferente según su espín sea paralelo u opuesto al espín del dispersor. Por lo tanto, cuando en un cristal los espines están alternos, obtenemos un diagrama de interferencia diferente de cuando tienen una distribución al azar.

Hay otra clase de sustancia en la que los efectos cuánticos hacen que los espines electrónicos se alternen, pero sin embargo es *ferromagnética* —es decir, que el cristal tiene una magnetización neta permanente—. La idea en que se basa el comportamiento de estos materiales está ilustrada en la figura 37-14. La figura muestra la estructura cristalina de la *espinela*, un óxido de magnesio y aluminio que —como se muestra— *no* es magnético. El óxido tiene dos clases de átomos metálicos: magnesio y aluminio. Ahora bien, si remplazamos el magnesio y el aluminio por dos elementos magnéticos como el hierro y el zinc, o por zinc y manganeso —en otras palabras, si introducimos átomos *magnéticos* en vez de los no magnéticos— ocurre algo interesante. Llamemos *a* a una clase de átomo metálico y *b* a la otra; entonces hay que considerar la siguiente combinación de fuerzas. Hay una interacción *a*-*b* que trata de hacer que los átomos *a* y los *b* tengan espines opuestos —porque la mecánica cuántica siempre da el signo opuesto (excepto en los cristales misteriosos de hierro, níquel y cobalto)—. Luego hay una interacción *a*-*a* directa que trata de hacer que los *a* estén opuestos y también una interacción *b*-*b* que trata de que los *b* estén opuestos. Ahora bien, por supuesto que no podemos hacer que todo esté opuesto a todo —*a* opuesto a *b*, *a* opuesto a *a* y *b* opuesto a *b*—. Posiblemente por las distancias entre los *a* y la presencia del oxígeno (aunque realmente no sabemos por qué), resulta que la interacción *a*-*b* es más intensa que la *a*-*a* o la *b*-*b*. Así, la solución que la naturaleza usa en este caso es hacer que todos los *a estén paralelos entre sí* y todos los *b paralelos entre sí*, pero que los dos sistemas estén *opuestos*. Esto da la más baja energía debido a la mayor intensidad de la interacción *a*-*b*. El resultado: todos los *a* tienen el espín hacia arriba y los *b* hacia abajo —o viceversa, por supuesto—. Pero si los *momentos magnéticos* del átomo tipo *a* y los del tipo *b* *no son iguales*, podemos obtener la situación mostrada en la figura 37-13(c) y puede haber una magnetización resultante en el material. El material será entonces ferromagnético —aunque algo débil—. Estos materiales se llaman *ferritas*. No tienen una magnetización de saturación tan alta como el hierro —por razones obvias— así que sólo son útiles para campos pequeños. Pero tienen una diferencia muy importante —son aislantes—; las ferritas son *aislantes ferromagnéticos*. Tendrán corrientes de Foucault muy pequeñas en campos de alta frecuencia, de modo que se los puede utilizar en sistemas de microondas, por ejemplo. Los campos de microondas podrán entrar en un material aislante de esta clase, mientras que en un conductor como el hierro las corrientes de Foucault se lo impedirían.

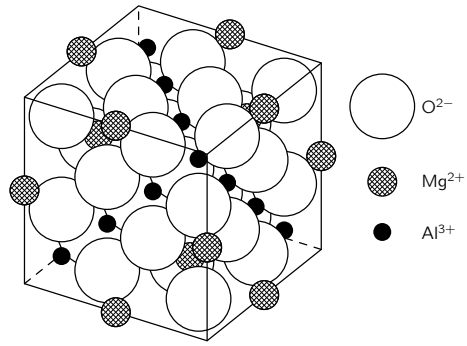


Figura 37-14. Estructura cristalina de la espinela ($MgAl_2O_4$); los iones Mg^{+2} ocupan sitios tetraédricos, cada uno rodeado por cuatro iones de oxígeno; los iones Al^{+3} ocupan sitios octaédricos, cada uno rodeado por seis iones de oxígeno. [De Charles Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 2ª ed., John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1956.]

Hay otra clase de materiales magnéticos que sólo recientemente han sido descubiertos —miembros de la familia de los ortosilicatos llamados *granates*—. También son cristales cuya red contiene dos clases de átomos metálicos y también tenemos una situación en la que podemos sustituir las dos clases de átomos casi a voluntad. Entre los muchos compuestos de interés hay uno que es completamente ferromagnético. Tiene hierro e itrio en la estructura del granate y la razón por la cual sea ferromagnético es muy curiosa. También aquí la mecánica cuántica hace que los espines vecinos sean opuestos, de modo que hay un sistema trabado de espines, con los espines electrónicos del hierro en un sentido y los del itrio en el opuesto. Pero el átomo de itrio es complicado. Es una tierra rara y su momento magnético es en gran parte contribución del movimiento *orbital* de los electrones. Esta contribución del movimiento orbital es *opuesta* en el itrio a la del espín y además es mayor. Por lo tanto, aun cuando la mecánica cuántica, actuando a través del principio de exclusión, haga que los *espines* del itrio sean opuestos a los del hierro, logra que el momento magnético *total* del átomo de itrio sea *paralelo* al hierro debido al efecto orbital —como se ha esquematizado en la figura 37-13(d)—. En consecuencia, el material es un compuesto ferromagnético normal.

En algunos de los elementos de las tierras raras aparece otro ejemplo interesante de ferromagnetismo. Tiene que ver con una disposición de los espines aún más curiosa. El material no es ferromagnético en el sentido de que todos los espines sean paralelos, ni es antiferromagnético en el sentido de que sus átomos sean opuestos. En estos cristales todos los espines que están *en una capa* son

paralelos y yacen en el plano de la capa. En la siguiente capa los espines también son paralelos entre sí pero apuntan en una dirección algo diferente. En la capa siguiente hay otra dirección y así sucesivamente. El resultado es que el vector de magnetización local varía en forma de espiral —los momentos magnéticos de capas sucesivas rotan a medida que avanzamos perpendicularmente a las capas—. Es interesante analizar lo que pasa cuando se aplica un campo a esa espiral —todas las torsiones y rotaciones que deben experimentar todos esos imanes atómicos—. (¡A algunos *les gusta* divertirse con la teoría de estas cosas!) No sólo están los casos de espirales "planas", sino también aquellos en que las direcciones de los momentos magnéticos de capas sucesivas describen un cono, de modo que tiene una componente en espiral y también ¡una componente ferromagnética uniforme en una dirección!

Las propiedades magnéticas de los materiales, estudiadas a un nivel más avanzado de lo que hemos podido hacer aquí, han fascinado a los físicos de todo tipo. En primer lugar, están los individuos prácticos que aman encontrar maneras de hacer las cosas mejor —aman diseñar materiales magnéticos mejores y más interesantes—. El descubrimiento de cosas como las ferritas, o su aplicación, al instante deslumbra a los que les gusta ver nuevas maneras de hacer las cosas. Están, además, los que encuentran fascinación en la terrible complejidad que puede producir la naturaleza, empleando unas pocas leyes básicas. De este modo, partiendo de una misma idea general, la naturaleza va del ferromagnetismo del hierro y sus dominios, al antiferromagnetismo del cromo, al magnetismo de ferritas y granates, a la estructura espiral de las tierras raras, y así sucesivamente. Es fascinante descubrir experimentalmente todas las cosas extrañas que pasan en estas sustancias especiales. Luego, para los físicos teóricos, el ferromagnetismo presenta el reto de una cantidad de bellos problemas, muy interesantes y no resueltos aún. Un reto es simplemente comprender por qué existen. Otro es predecir la estadística de los espines en interacción de una red ideal. Todavía dejando de lado cualquier complicación extrínseca posible, este problema ha desafiado hasta ahora toda comprensión. La razón de que sea tan interesante se debe a que es un problema de enunciación fácil: dado un montón de espines electrónicos en una red regular y que interactúan conforme a la ley tal y tal, ¿qué harán? El enunciado es simple, pero durante años ha resistido un análisis completo. Aunque ha sido analizado bastante cuidadosamente a temperaturas no muy cercanas al punto de Curie, todavía la teoría de la transición repentina en el punto de Curie necesita ser completada.

Finalmente, todo el tema de un sistema de espines e imanes atómicos —en materiales ferromagnéticos o paramagnéticos y en el magnetismo nuclear— también ha constituido algo fascinante para los estudiantes avanzados de física. Es posible alterar el sistema de espines con campos magnéticos externos, por lo que se pueden hacer muchos trucos con resonancias, efectos de relajamiento, ecos de espín y otros efectos. Sirve de prototipo de muchos sistemas termodinámicos complicados. Pero en los materiales paramagnéticos la situación es a menudo bastante simple, y muchos han gozado realizando experimentos o explicando teóricamente los fenómenos.

Cerramos ahora nuestro estudio de la electricidad y el magnetismo. En el primer capítulo hablamos de los pasos gigantescos dados desde las primeras observaciones de los griegos sobre el comportamiento extraño del ámbar y la piedra imán. No obstante, en nuestro largo e intrincado estudio ¡nunca hemos explicado ni *por qué cuando frotamos un pedazo de ámbar aparece carga sobre él*, ni tampoco *¡por qué una piedra imán está imantada!* Podrían decir, "bueno, simplemente no obtuvimos el signo correcto". No, la cosa es peor. Aunque *obtuviéramos* el signo correcto, nos quedaría esta pregunta: ¿por qué la piedra imán que se encuentra en el suelo está magnetizada? Claro que está el campo magnético terrestre, pero *¿de dónde proviene el campo terrestre?* Realmente nadie lo sabe —sólo ha habido algunas conjeturas buenas—. Como ven, nuestra física es un engaño —empezamos con los fenómenos de la piedra imán y del ámbar y terminamos no comprendiendo ninguno de los dos—. ¡Pero en el camino *hemos* obtenido una cantidad formidable de información muy interesante y útil!

38

Elasticidad

38-1 Ley de Hooke

38-2 Deformaciones específicas uniformes

38-3 La barra de torsión; ondas de cortes

38-4 La viga flexionada

38-5 Flexión lateral

38-1 Ley de Hooke

El tema de la elasticidad trata el comportamiento de las sustancias que tienen la propiedad de recuperar su tamaño y forma cuando se quitan las fuerzas que producen deformaciones. Encontramos esta propiedad elástica en cierta medida en todos los cuerpos sólidos. Si tuviéramos tiempo de tratar el tema extensamente, tendríamos que examinar muchas cosas: el comportamiento de materiales, las leyes generales de la elasticidad, la teoría general de la elasticidad, la maquinaria atómica que determina las propiedades elásticas y finalmente las limitaciones de las leyes elásticas cuando las fuerzas se vuelven tan grandes que hay flujo plástico y fracturas. Tardaría más tiempo del que tenemos para cubrir todos estos temas en detalle, así que tendremos que dejar de lado algunas cosas. Por ejemplo, no discutiremos la plasticidad o las limitaciones de las leyes elásticas. (Tocamos brevemente este tema al hablar de las dislocaciones en metales.) Tampoco podremos discutir los mecanismos internos de la elasticidad —así que nuestro tratamiento no tendrá la "complejidad" que hemos tratado de alcanzar en los primeros capítulos—. Nuestra principal intención es familiarizarlos con algunas de las maneras de tratar problemas prácticos como la flexión de vigas.

Revisar
Volumen I, capítulo 47,
Sonido. La ecuación de onda

Cuando presionan un trozo de material, "cede" —el material se deforma—. Si la fuerza es lo suficientemente pequeña, el desplazamiento relativo de los diversos puntos en el material es proporcional a la fuerza —decimos que el comportamiento es *elástico*—. Solamente discutiremos el comportamiento elástico. Primero escribiremos las leyes fundamentales de la elasticidad y luego las aplicaremos a un cierto número de situaciones diferentes.

Supongan que tomamos un bloque rectangular de material de longitud l, ancho w y altura h, como muestra la figura 38-1. Si tiramos de los extremos con una fuerza F, la longitud aumenta una cantidad Δl. Supondremos en todos los casos que la variación de longitud es una fracción pequeña de la longitud original. En efecto, para materiales como la madera y el acero, el material se romperá si la variación de longitud supera un porcentaje pequeño de la longitud original. Para una gran cantidad de materiales, los experimentos demuestran que para alargamientos suficientemente pequeños la fuerza es proporcional al alargamiento

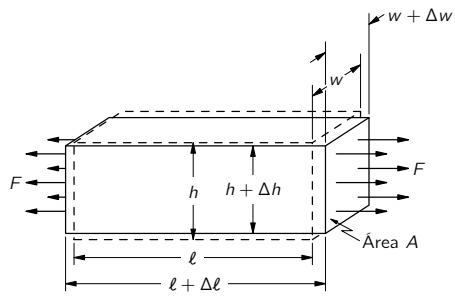


Figura 38-1. El estiramiento de una barra sometida a tensión uniforme.

$$F \propto \Delta l. \tag{38.1}$$

Esta relación se conoce como la *ley de Hooke*.

El alargamiento Δl de la barra también dependerá de su longitud. Podemos ver cómo por el siguiente razonamiento. Si pegamos dos bloques idénticos, extremo con extremo, las mismas fuerzas actúan sobre cada uno de los bloques; cada uno cederá Δl. Entonces, el estiramiento de un bloque de longitud $2l$ sería dos veces mayor que el de un bloque de igual sección transversal pero de longitud l. Para tener un número más característico del material y menos que de cualquier forma particular, escogemos el cociente $\Delta l/l$ entre el alargamiento y la longitud original. Este cociente es proporcional a la fuerza pero independiente de l:

$$F \propto \frac{\Delta l}{l}. \tag{38.2}$$

La fuerza F también dependerá del área del bloque. Supongan que ponemos dos bloques uno junto al otro. Entonces, para un estiramiento Δl dado tendríamos

la fuerza F sobre cada bloque, o el doble en la combinación de los dos bloques. Para un estiramiento dado la fuerza debe ser proporcional al área de la sección transversal A del bloque. Para obtener una ley en la cual el coeficiente de proporcionalidad sea independiente de las dimensiones del cuerpo, escribimos la ley de Hooke para un bloque rectangular en la forma

$$F = Y A \frac{\Delta l}{l}. \tag{38.3}$$

La constante Y es una propiedad de la naturaleza del material únicamente; se la conoce como *módulo de Young*. (Comúnmente verán que el módulo de Young es llamado E. Pero hemos usado E para campos eléctricos, energía y fem, así que preferimos usar una letra diferente.)

La *fuerza por unidad de área* se llama *esfuerzo* y el estiramiento por unidad de longitud —el estiramiento *fraccional*— se llama la *deformación específica*. En consecuencia, se puede escribir la ecuación (38.3) en la siguiente forma:

$$\frac{F}{A} = Y \times \frac{\Delta l}{l}, \tag{38.4}$$

Esfuerzo = (módulo de Young) × (deformación específica).

Existe una contraparte de la ley de Hooke: cuando *estiran* un bloque de material en una dirección se *contrae* perpendicularmente al estiramiento. La contracción en anchura es proporcional al ancho w y también a $\Delta l/l$. La contracción lateral está en la misma proporción para el ancho y el alto y comúnmente se escribe

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\sigma \frac{\Delta l}{l}, \tag{38.5}$$

donde la constante σ es otra propiedad del material llamado *razón de Poisson*. Siempre es de signo positivo y es un número menor que 1/2. (Es "razonable" que σ sea generalmente positiva, pero no está muy claro que *deba* ser así.)

Las dos constantes Y y σ especifican completamente las propiedades elásticas de un material *isótropo homogéneo* (esto es, no cristalino). En materiales cristalinos los estiramientos y contracciones pueden ser diferentes en distintas direcciones, así que puede haber más constantes elásticas. Restringiremos nuestra discusión por algún tiempo a materiales isótropos homogéneos cuyas propiedades se puedan representar con Y y σ. Por lo regular existen diversas formas de describir las cosas —a algunos les gusta describir con distintas constantes las propiedades elásticas de materiales—. Siempre se necesitan dos y se las puede relacionar con σ y Y.

La última ley general que necesitamos es el principio de superposición. Como las dos leyes (38.4) y (38.5) son lineales en las fuerzas y en los desplazamientos, funcionará la superposición. Si tienen un conjunto de fuerzas y obtienen ciertos desplazamientos y luego añaden un nuevo conjunto de fuerzas y obtienen ciertos desplazamientos adicionales, entonces el desplazamiento resultante será la suma de los que se obtendrían con los dos conjuntos de fuerzas actuando independientemente.

Ahora tenemos todos los principios generales —el principio de superposición y las ecuaciones (38.4) y (38.5)— y ésa es toda la elasticidad. Pero esto es como decir que una vez que tengan las leyes de Newton, eso es toda la mecánica. O dadas las ecuaciones de Maxwell, eso es toda la electricidad. Por supuesto, es cierto que con estos principios tienen mucho, porque con sus conocimientos matemáticos actuales pueden llegar muy lejos. Sin embargo, desarrollaremos unas pocas aplicaciones especiales.

38-2 Deformaciones específicas uniformes

Como primer ejemplo veamos qué le sucede a un bloque rectangular sometido a una presión hidrostática uniforme. Pongamos un bloque dentro del agua en un tanque de presión. Entonces habrá una fuerza actuando hacia el interior sobre

cada cara del bloque, proporcional al área (véase figura 38-2). Como la presión hidrostática es uniforme, el *esfuerzo* (fuerza por unidad de área) en cada cara del bloque es el mismo. Trataremos primero la variación de longitud. La variación de longitud del bloque se puede considerar como la suma de las variaciones de longitud que ocurren en los tres problemas independientes bosquejados en la figura 38-3.

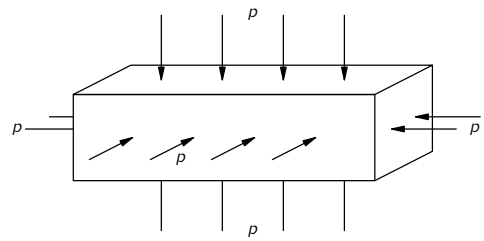


Figura 38-2. Una barra sometida a presión hidrostática uniforme.

Problema 1. Si presionamos sobre los extremos del bloque con una presión p, la deformación específica compresional es p/Y y es negativa:

$$\frac{\Delta l_1}{l} = -\frac{p}{Y}.$$

Problema 2. Si presionamos sobre los costados del bloque con la presión p, la deformación compresional es otra vez p/Y, pero ahora queremos la deformación longitudinal. Podemos obtenerla de la deformación específica lateral multiplicada por $-\sigma$. La deformación lateral es

$$\frac{\Delta w}{w} = -\frac{p}{Y};$$

así que

$$\frac{\Delta l_2}{l} = +\sigma\,\frac{p}{Y}.$$

Problema 3. Si presionamos verticalmente sobre el bloque, la deformación compresional es una vez más p/Y y la deformación correspondiente en la dirección lateral es otra vez $-\sigma p/Y$. Obtenemos

$$\frac{\Delta l_3}{l} = +\sigma\,\frac{p}{Y}.$$

Combinando estos resultados de los tres problemas —esto es, tomando $\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3$— obtenemos

$$\frac{\Delta l}{l} = -\frac{p}{Y}\,(1-2\sigma). \tag{38.6}$$

Por supuesto, el problema es simétrico en las tres direcciones, de lo cual se deduce que

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\frac{p}{Y}\,(1-2\sigma). \tag{38.7}$$

La variación de *volumen* bajo presión hidrostática también es de algún interés. Como $V = lwh$, podemos escribir, para desplazamientos pequeños,

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta l}{l} + \frac{\Delta w}{w} + \frac{\Delta h}{h}.$$

Usando (38.6) y (38.7), tenemos

$$\frac{\Delta V}{V} = -3\,\frac{p}{Y}\,(1-2\sigma). \tag{38.8}$$

A algunos les gusta llamar a $\Delta V/V$ la *deformación de volumen* y escriben

$$p = -K\,\frac{\Delta V}{V}.$$

El *esfuerzo de volumen* p es proporcional a la deformación de volumen —la ley de Hooke una vez más—. El coeficiente K se llama *módulo de compresibilidad*, está relacionado con las otras constantes

$$K = \frac{Y}{3(1-2\sigma)}. \tag{38.9}$$

Como K es de algún interés práctico, muchos manuales dan Y y K en lugar de Y y σ. Si buscan σ, siempre pueden obtenerla de la ecuación (38.9). También

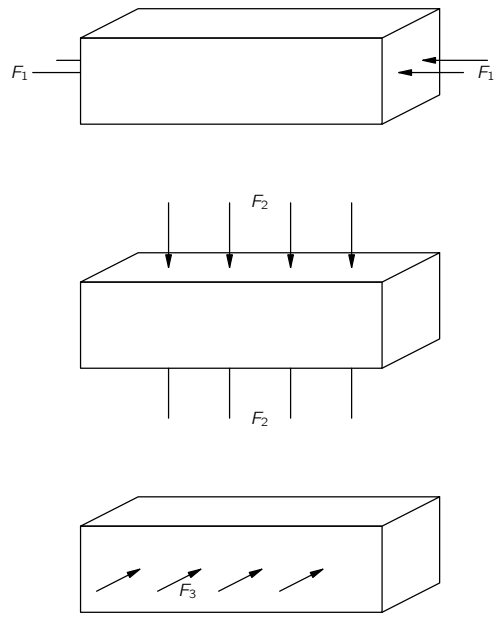


Figura 38-3. La presión hidrostática es la superposición de tres compresiones longitudinales.

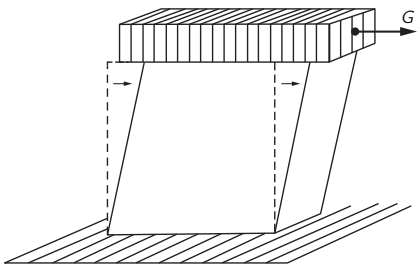


Figura 38-4. Deformación uniforme de corte en un cubo.

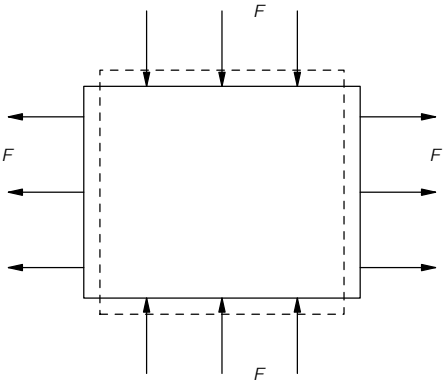


Figura 38-5. Un cubo con fuerzas de compresión en las caras superior e inferior, e iguales fuerzas de tracción en las laterales.

podemos ver que según la ecuación (38.9) la razón de Poisson σ debe ser menor que un medio. Si no fuera así, el módulo de compresibilidad sería negativo y el material se dilataría al aumentar la presión. Esto nos permitiría *extraer* energía mecánica de cualquier bloque que haya por ahí —significaría que el bloque está en equilibrio inestable—. Si empezara a dilatarse continuaría por sí mismo con una liberación de energía.

Ahora queremos considerar lo que sucede cuando aplican una deformación "de corte" sobre algo. Por deformación de corte entendemos la clase de distorsión mostrada en la figura 38-4. Examinemos previamente las deformaciones específicas en un *cubo* sujeto a las fuerzas mostradas en la figura 38-5. También aquí podemos dividir el problema en dos: las presiones verticales y las tracciones horizontales. Llamando A al área de la cara del cubo, tenemos para la variación de longitud en dirección horizontal

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{Y}\frac{F}{A} + \sigma\frac{1}{Y}\frac{F}{A} = \frac{1+\sigma}{Y}\frac{F}{A}. \tag{38.10}$$

La variación de altura es simplemente menos esta expresión.

Supongan ahora que tenemos el mismo cubo sujeto a la fuerza de corte mostrada en la figura 38-6(a). Noten que todas las fuerzas tienen que ser iguales si no debe haber torques resultantes y el cubo debe estar en equilibrio. (Fuerzas análogas deben existir también en la figura 38-4, puesto que el bloque está en equilibrio. Se producen por medio del "pegamento" que mantiene el bloque fijo a la mesa.) Se dice entonces que el cubo está en un estado de corte puro. Pero noten que si cortamos el cubo por un plano a 45° —digamos que según la diagonal A en la figura— la fuerza total actuante a través del plano es *normal* al plano e igual a $\sqrt{2}G$. El área sobre la cual actúa esta fuerza es $\sqrt{2}A$; por tanto, el esfuerzo normal a este plano es simplemente G/A. Análogamente, si examinamos un plano a 45° en el otro sentido —la diagonal B en la figura— observamos que existe un esfuerzo compresional $-G/A$ normal a este plano. Según esto, vemos que el *esfuerzo* en un "corte puro" es equivalente a una combinación de esfuerzos de tensión y compresión de igual intensidad y perpendiculares uno a otro, y formando un ángulo de 45° con las caras originales del cubo. Así, los esfuerzos y deformaciones internas son los mismos que hallaríamos en el bloque mayor de material con las fuerzas mostradas en la figura 38-6(b). Pero éste es el problema que ya resolvimos. La variación de longitud de la diagonal está dada por la ecuación (38.10),

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{1+\sigma}{Y}\frac{G}{A}. \tag{38.11}$$

(Una diagonal es acortada; la otra es alargada.)

A menudo conviene expresar un esfuerzo de corte en función del ángulo en que se tuerce el cubo —el ángulo θ en la figura 38-7—. Por la geometría de la

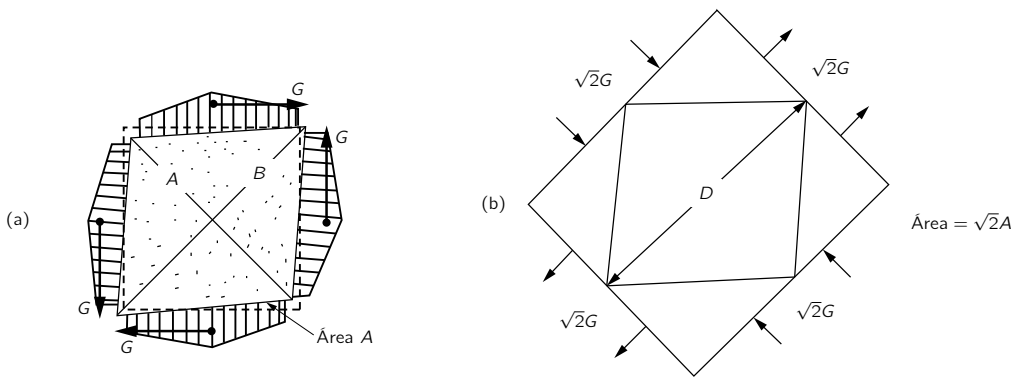


Figura 38-6. Los dos pares de fuerzas de corte en (a) producen el mismo esfuerzo que las fuerzas de compresión y de tracción en (b).

figura pueden ver que el desplazamiento horizontal δ del borde superior es igual a $\sqrt{2}\Delta D$. Así,

$$\theta = \frac{\delta}{l} = \frac{\sqrt{2}\,\Delta D}{l} = 2\,\frac{\Delta D}{D}. \tag{38.12}$$

El esfuerzo de corte g se define como la fuerza tangencial sobre una cara dividida entre el área, $g = G/A$. Usando la ecuación (38.11) en (38.12), obtenemos

$$\theta = 2\,\frac{1+\sigma}{Y}\,g.$$

O escribiendo esto en la forma de: "esfuerzo = constante por deformación específica",

$$g = \mu\theta. \tag{38.13}$$

El coeficiente de proporcionalidad μ se llama *módulo de corte* (o a veces, coeficiente de rigidez). Está dado en función de Y y σ por

$$\mu = \frac{Y}{2(1+\sigma)}. \tag{38.14}$$

A propósito, el módulo de torsión debe ser positivo —de otra manera podrían obtener trabajo de un bloque autocortante—. Según la ecuación (38.14), σ debe ser mayor que -1. Sabemos entonces que σ debe estar entre -1 y $+\frac{1}{2}$; en la práctica, no obstante, siempre es mayor que cero.

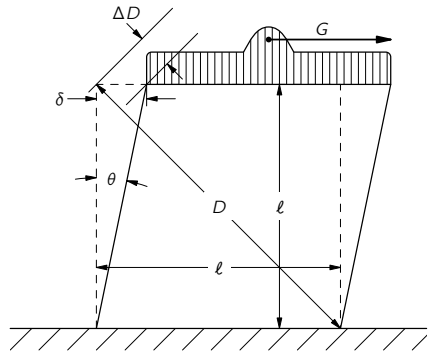


Figura 38-7. El esfuerzo de corte θ es $2\,\Delta D/D$.

Como último ejemplo del tipo de situación donde los esfuerzos son uniformes en todo el material, consideremos el problema de un bloque que se estira, mientras al mismo tiempo se lo *fuerza* de modo que no se produce ninguna contracción lateral. (Técnicamente, es un poco más fácil comprimirlo impidiendo que los costados se abulten —pero es el mismo problema—.) ¿Qué sucede? Bueno, debe haber fuerzas laterales que le impidan cambiar de espesor —fuerzas que no conocemos de antemano pero que tendremos que calcular—. Es la misma clase de problema que ya hemos resuelto, solamente que con un trabajo algebraico un poco diferente. Imaginemos fuerzas sobre los tres lados, como muestra la figura 38-8; calculemos los cambios de dimensiones y escojamos las fuerzas transversales que hacen que el ancho y la altura permanezcan constantes. Siguiendo el razonamiento habitual, obtenemos para las tres deformaciones:

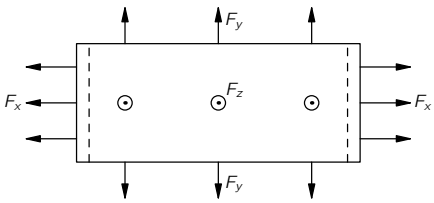


Figura 38-8. Alargamiento sin contracción lateral.

$$\frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{1}{Y}\,\frac{F_x}{A_x} - \frac{\sigma}{Y}\,\frac{F_y}{A_y} - \frac{\sigma}{Y}\,\frac{F_z}{A_z} = \frac{1}{Y}\left[\frac{F_x}{A_x} - \sigma\left(\frac{F_y}{A_y} + \frac{F_z}{A_z}\right)\right], \tag{38.15}$$

$$\frac{\Delta l_y}{l_y} = \frac{1}{Y}\left[\frac{F_y}{A_y} - \sigma\left(\frac{F_x}{A_x} + \frac{F_z}{A_z}\right)\right], \tag{38.16}$$

$$\frac{\Delta l_z}{l_z} = \frac{1}{Y}\left[\frac{F_z}{A_z} - \sigma\left(\frac{F_x}{A_x} + \frac{F_y}{A_y}\right)\right]. \tag{38.17}$$

Ahora bien, como se supone que Δl_y y Δl_z son cero, las ecuaciones (38.16) y (38.17) dan dos ecuaciones que relacionan F_y y F_z con F_x. Resolviéndolas conjuntamente, obtenemos que

$$\frac{F_y}{A_y} = \frac{F_z}{A_z} = \frac{\sigma}{1-\sigma}\,\frac{F_x}{A_x}. \tag{38.18}$$

Sustituyendo en (38.15), tenemos

$$\frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{1}{Y}\left(1 - \frac{2\sigma^2}{1-\sigma}\right)\frac{F_x}{A_x} = \frac{1}{Y}\left(\frac{1-\sigma-2\sigma^2}{1-\sigma}\right)\frac{F_x}{A_x}. \tag{38.19}$$

A menudo verán esto escrito al revés y con la expresión cuadrática en σ factorizada; entonces se escribe

$$\frac{F}{A} = \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\,Y\,\frac{\Delta l}{l}. \tag{38.20}$$

Cuando forzamos los lados, el módulo de Young se obtiene multiplicado por una función complicada de σ. Como pueden ver fácilmente en la ecuación (38.19), el factor delante de Y siempre es mayor que 1. Es más difícil estirar el bloque cuando se mantienen los lados firmes —lo que también significa que un bloque es *más resistente* cuando se mantienen los lados firmes que cuando no—.

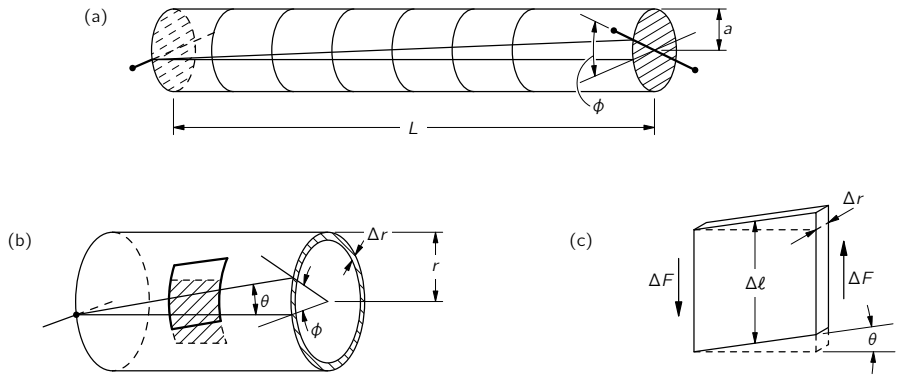


Figura 38-9. (a) Una barra cilíndrica en torsión. (b) Una capa cilíndrica en torsión. (c) Cada pedazo pequeño de la capa tiene una deformación de corte.

38-3 La barra de torsión; ondas de cortes

Volvamos ahora nuestra atención a un ejemplo que es más complicado porque partes diferentes del material son sometidas a esfuerzos distintos. Consideremos una varilla retorcida como podrían encontrar en un árbol de transmisión de alguna maquinaria, o en una fibra de suspensión de cuarzo usada en un instrumento delicado. Como probablemente sabrán por experimentos con el péndulo de torsión, el *torque* sobre una varilla retorcida es proporcional al *ángulo* —la constante de proporcionalidad depende evidentemente de la longitud de la varilla, del radio de la varilla y de las propiedades del material—. La pregunta es: ¿de qué manera? Ahora estamos en condiciones de contestar esta pregunta; simplemente, es cuestión de hacer un poco de geometría.

La figura 38-9(a) muestra una varilla cilíndrica de longitud L y radio a, con un extremo retorcido un ángulo ϕ respecto al otro. Si queremos relacionar las deformaciones con lo que ya conocemos, podemos considerar la varilla como formada por muchas capas cilíndricas y determinar lo que le sucede a cada capa por separado. Empecemos examinando un cilindro corto y delgado de radio r (menor que a) y espesor Δr —como muestra la figura 38-9(b)—. Ahora bien, si examinamos un pedazo de este cilindro que originalmente era un cuadrado pequeño, vemos que se ha deformado en un paralelogramo. Cada elemento del cilindro sufre una deformación de corte y el ángulo de deformación θ es

$$\theta = \frac{r\phi}{L}.$$

El esfuerzo de corte g en el material es por lo tanto [según la ecuación (38.13)],

$$g = \mu\theta = \mu\,\frac{r\phi}{L}. \tag{38.21}$$

El esfuerzo de corte es la fuerza tangencial ΔF sobre el extremo del cuadrado dividida entre el área al $\Delta l \Delta r$ del extremo [véase figura 38-9(c)]:

$$g = \frac{\Delta F}{\Delta l\,\Delta r}.$$

La fuerza ΔF sobre el extremo de tal cuadrado produce un torque $\Delta\tau$ respecto al eje de la varilla igual a

$$\Delta\tau = r\,\Delta F = rg\,\Delta l\,\Delta r. \tag{38.22}$$

El torque total τ es la suma de tales torques extendida a una circunferencia completa del cilindro. Así, juntando suficientes pedazos de modo que la suma de los Δl resulte $2\pi r$, hallamos que el torque total para un *tubo hueco* es

$$rg(2\pi r)\,\Delta r. \tag{38.23}$$

O sea, usando (38.21),

$$\tau = 2\pi\mu \frac{r^3 \Delta r \phi}{L}. \tag{38.24}$$

Obtenemos que la rigidez rotacional, τ/ϕ de un tubo hueco es proporcional al cubo del radio r y al espesor Δr e inversamente proporcional a la longitud L.

Ahora podemos imaginarnos una varilla sólida formada por una serie de tubos concéntricos, cada uno retorcido el mismo ángulo ϕ (aunque los *esfuerzos* internos son diferentes para cada tubo). El torque total es la suma de los torques necesarios para rotar cada capa; para la varilla *sólida* se tendrá

$$\tau = 2\pi\mu \frac{\phi}{L} \int r^3 \, dr,$$

donde la integral va de $r = 0$ a $r = a$, el radio de la varilla. Integrando, tenemos

$$\tau = \mu \frac{\pi a^4}{2L} \phi. \tag{38.25}$$

Para una varilla en torsión, el torque es proporcional al ángulo y es proporcional a la *cuarta potencia* del diámetro —una varilla de espesor doble es 16 veces más resistente a la torsión—.

Antes de abandonar el tema de la torsión, apliquemos lo que hemos aprendido a un problema interesante: ondas de torsión. Si toman una varilla larga y de repente retuercen un extremo, una onda de torsión corre a lo largo de la varilla, como se ha dibujado esquemáticamente en la figura 38-10(a). Esto es algo más interesante que una torsión uniforme —veamos si podemos analizar lo que sucede—.

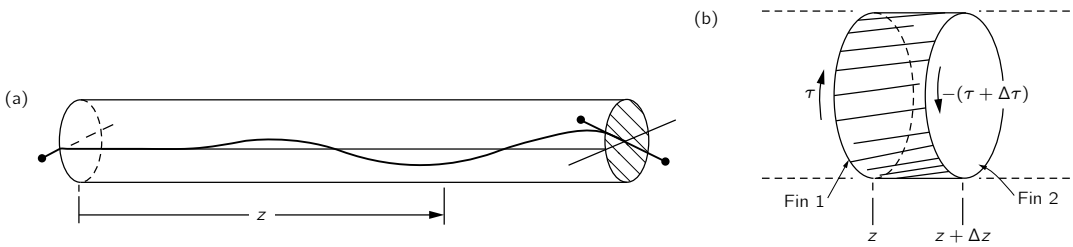


Figura 38-10. (a) Onda de torsión en una varilla. (b) Un elemento de volumen de la varilla.

Sea z la distancia desde algún punto dado en la varilla. Para una torsión estática, el torque es el mismo a todo lo largo de la varilla y es proporcional a ϕ/L, el ángulo total de torsión sobre la longitud total. Lo que interesa es la deformación de torsión local que es, como se darán cuenta, $\partial\phi/\partial z$. Así, cuando la torsión a lo largo de la varilla no es uniforme, debemos sustituir la ecuación (38.25) por

$$\tau(z) = \mu \frac{\pi a^4}{2} \frac{\partial \phi}{\partial z}. \tag{38.26}$$

Veamos ahora qué le sucede a un elemento de longitud Δz que la figura 38-10(b) muestra aumentado. Hay un torque $\tau(z)$ en el extremo 1 del pedazo pequeño de varilla y un torque diferente $\tau(z + \Delta z)$ en el extremo 2. Si Δz es suficientemente pequeño, podemos usar un desarrollo de Taylor y escribir

$$\tau(z + \Delta z) = \tau(z) + \left(\frac{\partial \tau}{\partial z}\right) \Delta z. \tag{38.27}$$

El torque resultante $\Delta\tau$ que actúa *sobre* el pedazo pequeño de varilla entre z y $z + \Delta z$ es evidentemente la diferencia entre $\tau(z)$ y $\tau(z + \Delta z)$, o sea $\Delta\tau = (\partial\tau/\partial z)\Delta z$. Derivando la ecuación (38.26), obtenemos

$$\Delta\tau = \mu \frac{\pi a^4}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Delta z. \tag{38.28}$$

El efecto de este torque resultante es dar una aceleración angular a la pequeña rebanada de varilla. La masa de la rebanada es

$$\Delta M = (\pi a^2\,\Delta z)\rho,$$

donde ρ es la densidad del material. Obtuvimos en el capítulo 19 del volumen I que el momento de inercia de un cilindro circular es $mr^2/2$; llamando ΔI al momento de inercia de nuestro pedazo, tenemos

$$\Delta I = \frac{\pi}{2}\,\rho a^4\,\Delta z. \tag{38.29}$$

Las leyes de Newton dicen que el torque es igual al momento de inercia por la aceleración angular, o sea

$$\Delta\tau = \Delta I\,\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}. \tag{38.30}$$

Juntando todo, obtenemos

$$\mu\,\frac{\pi a^4}{2}\,\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\,\Delta z = \frac{\pi}{2}\,\rho a^4\,\Delta z\,\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2},$$

o sea

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \frac{\rho}{\mu}\,\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = 0. \tag{38.31}$$

Reconocerán en esta expresión la ecuación de onda unidimensional. Hemos encontrado que las ondas de torsión se propagarán a lo largo de la varilla con la velocidad

$$C_{\text{corte}} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \tag{38.32}$$

Cuanto *más densa* es la varilla —a rigidez constante— *más lentas* son las ondas; y cuanto *más rígida* es la varilla, más rápido se propagan las ondas. La velocidad *no* depende del diámetro de la varilla.

Las ondas de torsión son un ejemplo especial de *ondas de corte*. En general, las ondas de corte son aquellas en que las deformaciones no cambian el *volumen* de ninguna parte del material. En las ondas de torsión, tenemos una distribución particular de tales esfuerzos de corte —están distribuidos en círculo—. Pero para cualquier disposición de esfuerzos de corte, las ondas se propagarán con la misma velocidad —la que da la ecuación (38.32)—. Por ejemplo, los sismólogos han encontrado esas ondas de corte propagándose en el interior de la Tierra.

Podemos tener otro tipo de onda en el mundo elástico dentro de un material sólido. Si presionan algo, pueden provocar ondas "longitudinales" —también llamadas ondas "compresionales"—. Son como las ondas sonoras en el aire o en el agua —los desplazamientos están en la misma dirección que la propagación de las ondas—. (En la superficie de un cuerpo elástico también puede haber otros tipos de ondas —llamadas "ondas de Rayleigh" u "ondas de Love"—. En ellas, las deformaciones no son ni puramente longitudinales ni puramente transversales. No tendremos tiempo de estudiarlas.)

Y ya que estamos en el tema de las ondas, ¿cuál es la velocidad de las ondas compresionales puras en un cuerpo sólido *grande* como la Tierra? Decimos "grande" porque la velocidad del sonido en un cuerpo grueso no es la misma que, por ejemplo, a lo largo de una varilla delgada. Por cuerpo "grueso" entendemos que las dimensiones transversales son mucho mayores que la longitud de onda del sonido. Luego, cuando presionamos el objeto, no se puede expandir lateralmente —sólo se puede comprimir en una dimensión—. Afortunadamente ya hemos estudiado el caso especial de la compresión de un material elástico forzado. También hemos estudiado en el capítulo 47 del volumen I, la velocidad de las ondas sonoras en un gas. Siguiendo el mismo razonamiento pueden ver que la velocidad del sonido en un sólido es igual a $\sqrt{Y'/\rho}$, donde Y' es el "módulo longitudinal" —o presión dividida entre la variación relativa de la longitud— para el caso de constricción. Es precisamente el cociente entre $\Delta l/l$ y F/A obtenido

en la ecuación (38.20). Así, la velocidad de las ondas longitudinales está dada por

$$C_{\text{long}}^2 = \frac{Y'}{\rho} = \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\,\frac{Y}{\rho}. \tag{38.33}$$

Mientras σ esté entre cero y $1/2$, el módulo de torsión μ es menor que el módulo de Young Y y además, Y' es mayor que Y, así que

$$\mu < Y < Y'.$$

Esto significa que las ondas longitudinales viajan más rápido que las ondas de corte. Una de las formas más precisas de medir las constantes elásticas de una sustancia es midiendo la densidad del material y las velocidades de los dos tipos de ondas. De esta información se puede obtener Y y σ. A propósito, midiendo la diferencia en el tiempo de llegada de las dos clases de ondas provenientes de un terremoto el sismólogo puede estimar —aun sólo con las señales recibidas en una sola estación— la distancia al temblor.

38-4 La viga flexionada

Ahora examinaremos otro tema práctico —la *flexión* de una barra o una viga—. ¿Cuáles son las fuerzas cuando flexionamos una barra de sección transversal arbitraria? Lo estudiaremos pensando en una barra de sección circular, pero nuestra respuesta servirá para cualquier forma. Sin embargo, para ahorrar tiempo, recortaremos un poco de modo que nuestra teoría será sólo aproximada. Nuestros resultados serán correctos únicamente cuando el radio de flexión sea mucho mayor que el espesor de la viga.

Supongan que toman los dos extremos de una barra recta y la doblan según alguna curva como la que se observa en la figura 38-11. ¿Qué acontece a dentro de la barra? Bien, el que esté curvada significa que el material en la parte interna de la curva está comprimido y el material en la parte externa está estirado. Hay cierta superficie más o menos paralela al eje de la barra que no está ni comprimida ni estirada. Se llama superficie *neutra*. Sería de esperar que esta superficie esté cerca de la "mitad" de la sección transversal. Se puede demostrar (pero no lo haremos aquí) que para pequeñas flexiones de vigas simples, la superficie neutra va a lo largo del "centro de gravedad" de la sección transversal. Esto es cierto solamente para flexión "pura" —si no se está estirando o comprimiendo la viga al mismo tiempo—.

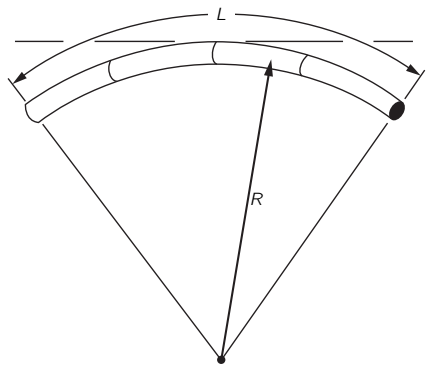


Figura 38-11. Una viga flexionada.

Para flexión pura, entonces, una rebanada delgada de la barra se deforma como muestra la figura 38-12(a). El material por debajo de la superficie neutra tiene una deformación compresional que es *proporcional a la distancia* a la superficie neutra; y el material por encima está estirado, también en proporción a su distancia a la superficie neutra. Así, el *estiramiento* longitudinal Δl es proporcional a la altura y. La constante de proporcionalidad es precisamente l sobre el radio de curvatura de la barra; véase figura 38-12:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{y}{R}.$$

Luego, la fuerza por unidad de área —el esfuerzo— sobre una tira pequeña en y también es proporcional a la distancia a la superficie neutra.

$$\frac{\Delta F}{\Delta A} = Y\,\frac{y}{R}. \tag{38.34}$$

Examinemos ahora las *fuerzas* que podrían producir tales deformaciones. Las fuerzas que actúan sobre el pequeño segmento dibujado en la figura 38-12 están indicadas en la misma. Si consideramos cualquier corte transversal, las fuerzas actúan a través de él, en un sentido por encima de la superficie neutra y en el otro por debajo. Vienen en pares para formar un "momento de flexión" $\mathfrak{M}$ —con lo cual entendemos el torque respecto a la línea neutra—. Podemos calcular el

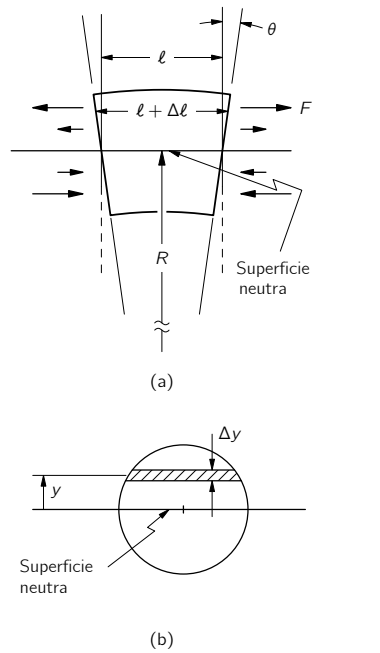


Figura 38-12. (a) Segmento pequeño de una viga flexionada. (b) Sección transversal de la viga.

momento total integrando la fuerza multiplicada por la distancia a la superficie neutra en una de las caras del segmento de la figura 38-12:

$$\mathfrak{M} = \int_{\substack{\text{sec}\\ \text{trans}}} y\, dF. \tag{38.35}$$

Según la ecuación (38.34), $dF = Yy/R\, dA$, así que

$$\mathfrak{M} = \frac{Y}{R}\int y^2\, dA.$$

La integral de $y^2\, dA$ es lo que podemos llamar el "momento de inercia" de la sección transversal respecto a un eje horizontal que pasa por su "centro de masa";* lo llamaremos I:

$$\mathfrak{M} = \frac{YI}{R} \tag{38.36}$$

$$I = \int y^2\, dA. \tag{38.37}$$

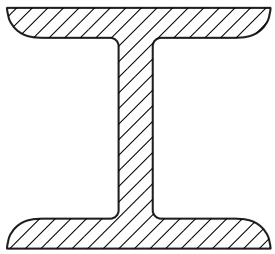


Figura 38-13. Una viga "I".

Entonces la ecuación (38.36) nos da la relación entre el momento de flexión $\mathfrak{M}$ y la curvatura $1/R$ de la viga. La "rigidez" de la viga es proporcional a Y y al momento de inercia I. En otras palabras, si quieren la viga más rígida posible con una cantidad dada de aluminio, digamos, deben poner lo que más puedan de él tan lejos de la superficie neutra como sea posible, para formar un momento de inercia grande. Sin embargo, no pueden llevar esto al extremo, porque entonces la viga no se flexionará como lo hemos supuesto —se pandeará o retorcerá volviéndose débil otra vez—. Ahora pueden ver por qué las vigas estructurales se hacen en forma de I o de H —como muestra la figura 38-13—.

Como ejemplo del uso de nuestra ecuación de viga (38.36), calculemos la flexión de una viga voladiza con una fuerza concentrada W que actúa en el extremo libre, como muestra la figura 38-14. (Por "voladiza" entendemos simplemente que la viga está soportada de tal forma que la posición y la pendiente están fijas en un extremo —está empotrada en una pared de cemento—.) ¿Cuál es la forma de la viga? Llamemos z a la deflexión a la distancia x desde el extremo fijo; queremos conocer $z(x)$. Lo calcularemos solamente para flexiones pequeñas. También supondremos que la viga es larga en comparación con su sección transversal. Ahora bien, como saben de sus cursos de matemáticas, la curvatura $1/R$ de cualquier curva $z(x)$ está dada por

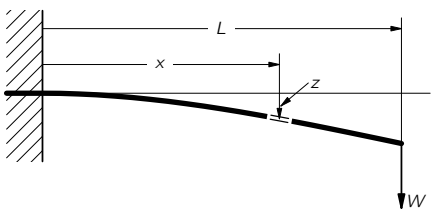


Figura 38-14. Una viga voladiza con un peso en un extremo.

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2z/dx^2}{[1+(dz/dx)^2]^{3/2}}. \tag{38.38}$$

Como solamente estamos interesados en pendientes pequeñas —generalmente éste es el caso en estructuras de ingeniería— despreciamos $(dz/dx)^2$ en comparación con 1 y tomamos

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2z}{dx^2}. \tag{38.39}$$

También necesitamos conocer el momento de flexión $\mathfrak{M}$. Es una función de x porque es igual al torque respecto al eje neutro de cualquier sección. Despreciemos el peso de la viga y tomemos solamente la fuerza hacia abajo W en el extremo de la viga. (Pueden incluir el peso de la viga ustedes mismos, si quieren.) Luego, el momento de flexión en x es

$$\mathfrak{M}(x) = W(L-x),$$

* Es, por supuesto, realmente el momento de inercia de una sección con unidad de masa por unidad de área.

porque éste es el torque ejercido por el peso W respecto al punto x —el torque que la viga debe soportar en x—. Obtenemos

$$W(L-x) = \frac{YI}{R} = YI\,\frac{d^2z}{dx^2}$$

o sea

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{W}{YI}\,(L-x). \tag{38.40}$$

La podemos integrar sin ningún truco; obtenemos

$$z = \frac{W}{YI}\left(\frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right), \tag{38.41}$$

usando nuestra suposición de que $z(0) = 0$ y que dz/dx también es cero en $x = 0$. Ésta es la forma de la viga. El desplazamiento del extremo es

$$z(L) = \frac{W}{YI}\,\frac{L^3}{3}; \tag{38.42}$$

el desplazamiento del extremo de una viga aumenta con el cubo de la longitud.

Al desarrollar nuestra teoría aproximada de la viga, hemos supuesto que la sección de la viga no cambia cuando la doblamos. Cuando el espesor de la viga es pequeño comparado con el radio de curvatura, la sección transversal cambia muy poco y nuestro resultado va bien. Sin embargo, en general este efecto no se puede despreciar, como pueden demostrar fácilmente doblando una goma de borrar blanda entre los dedos. Si la sección era originalmente rectangular, encontrarán que al doblarla, la base se achata (véase figura 38-15). Esto sucede porque cuando comprimimos la base, el material se expande lateralmente —en la medida que indica la relación de Poisson—. La goma es fácil de doblar o estirar, pero se parece a un líquido en que es difícil cambiar el *volumen* —como se manifiesta claramente cuando doblan la goma—. Para un material incompresible, la relación de Poisson debe ser exactamente 1/2 —para la goma es aproximadamente esto—.

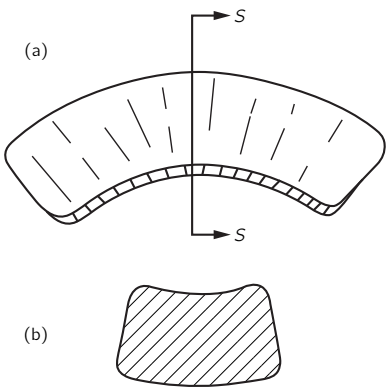


Figura 38-15. (a) Una goma de borrar doblada; (b) sección transversal.

38-5 Flexión lateral

Queremos ahora usar nuestra teoría de la viga para comprender la teoría de la flexión lateral, o pandeo, de vigas, columnas o varillas. Consideremos la situación representada en la figura 38-16 en la que una varilla que normalmente debe ser recta es mantenida en flexión mediante dos fuerzas opuestas que presionan en los extremos de la misma. Querríamos calcular la forma de la varilla y la *magnitud de las fuerzas* en los extremos.

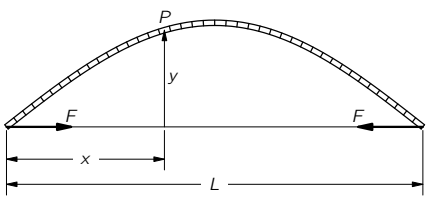


Figura 38-16. Una viga flexionada.

Sea $y(x)$ la deflexión de la varilla respecto de la línea recta entre los extremos, donde x es la distancia a uno de los extremos. El momento de flexión $\mathfrak{M}$ en el punto P de la figura es igual a la fuerza F multiplicada por el brazo del momento, que es la distancia perpendicular y,

$$\mathfrak{M}(x) = Fy. \tag{38.43}$$

Usando la ecuación de la viga (38.36), tenemos

$$\frac{YI}{R} = Fy. \tag{38.44}$$

Para deflexiones pequeñas, podemos tomar $1/R = -d^2y/dx^2$ (el signo menos es porque la curvatura es hacia abajo). Obtenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F}{YI}\,y, \tag{38.45}$$

que es la ecuación diferencial de una onda sinusoidal. Así, para deflexiones *pequeñas*, la curva de tal viga flexionada es una curva sinusoidal. La "longitud de onda" λ de la onda sinusoidal es dos veces la distancia L entre los extremos.

Si la curvatura es pequeña, ésta no es sino el doble de la longitud de la varilla sin flexión. Así, la curva es

$$y = K \operatorname{sen} \pi x/L.$$

Tomando la segunda derivada, tenemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{L^2}\, y.$$

Comparando ésta con la ecuación (38.45), vemos que la fuerza es

$$F = \pi^2 \frac{YI}{L^2}. \tag{38.46}$$

¡Para flexiones pequeñas, la fuerza es *independiente del desplazamiento y producido por la flexión*!

Tenemos entonces lo siguiente desde el punto de vista físico. Si la fuerza es menor que la F dada en la ecuación (38.46), entonces no habrá flexión alguna. Pero si es ligeramente *mayor* que esta fuerza, el material se flexionará mucho de repente —esto es, para fuerzas mayores que la fuerza crítica $\pi^2 YI/L^2$ (a menudo llamada "fuerza de Euler") la viga se pandeará—. Si la carga sobre el segundo piso de un edificio excede de la fuerza de Euler que pueden soportar las columnas, el edificio se desplomará. Otro lugar en donde la fuerza de pandeo tiene importancia capital es en los cohetes espaciales. Por un lado, el cohete debe ser capaz de mantener su propio peso en la rampa de lanzamiento y resistir los esfuerzos durante la aceleración; y por otro lado, es importante limitar el peso de la estructura a un mínimo, de modo que la carga útil y la capacidad del combustible puedan ser lo más grande posible.

En realidad una viga no se desplomará necesariamente del todo cuando la fuerza exceda la fuerza de Euler. Así, cuando los desplazamientos se hacen grandes la fuerza es mayor que la que hemos encontrado, debido a los términos en $1/R$ de la ecuación (38.38), que hemos despreciado. Para hallar las fuerzas correspondientes a una flexión grande de la viga, tenemos que volver a la ecuación exacta, ecuación (38.44) que teníamos antes de usar la relación aproximada de R con y. La ecuación (38.44) tiene una propiedad geométrica bastante simple.* Es un poco complicada de encontrar, pero es interesante. En lugar de describir la curva en función de x y y, podemos usar dos nuevas variables: la distancia S a lo largo de la curva; y la pendiente θ de la tangente a la curva. Véase figura 38-17. La curvatura es la variación del ángulo por unidad de distancia:

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dS}.$$

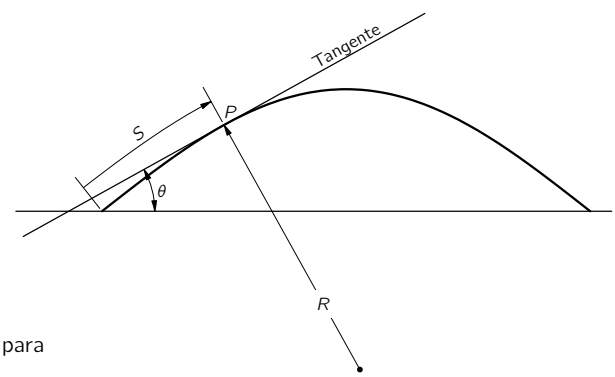


Figura 38-17. Las coordenadas S y θ para la curva de una viga flexionada.

* La misma ecuación aparece, por cierto, en otras situaciones físicas —por ejemplo, el menisco en la superficie de un líquido contenido entre planos paralelos— y la misma solución geométrica puede ser utilizada.

Por lo tanto, podemos escribir la ecuación exacta (38.44) en la forma

$$\frac{d\theta}{dS} = -\frac{F}{YI}\, y.$$

Si derivamos esta ecuación respecto a S y remplazamos dy/dS por $\operatorname{sen}\theta$, obtenemos

$$\frac{d^2\theta}{dS^2} = -\frac{F}{YI}\operatorname{sen}\theta. \tag{38.47}$$

[Si θ es pequeño, volvemos a obtener la ecuación (38.45). Todo marcha bien.]

Ahora bien, puede ser que les cause satisfacción, o no, saber que la ecuación (38.47) es exactamente la misma que se obtiene para las oscilaciones de gran amplitud de un péndulo —con F/YI remplazada por otra constante, naturalmente—. Aprendimos allá en el capítulo 9 del volumen I, cómo hallar numéricamente la solución de tal ecuación.* Las respuestas que obtendrán son ciertas curvas fascinantes —conocidas como curvas de la "Elástica"—. La figura 38-18 muestra tres curvas para valores diferentes de F/YI.

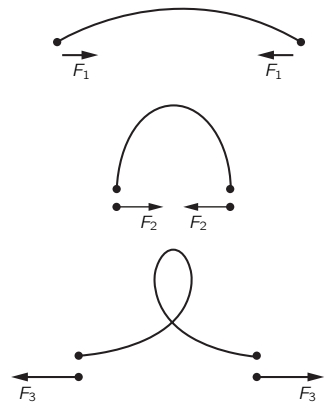


Figura 38-18. Curvas de una varilla flexionada.

* Las soluciones también se pueden expresar en términos de algunas funciones, denominadas "funciones elípticas jacobianas", que otra persona ya ha calculado.

39

Materiales elásticos

39-1 El tensor de deformación específica

39-2 El tensor de elasticidad

39-3 Los movimientos dentro de un cuerpo elástico

39-4 Comportamiento no elástico

39-5 Cálculo de las constantes elásticas

Revisar

C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 2ª ed., John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1956.

39-1 El tensor de deformación específica

En el capítulo anterior hablamos de la distorsión de ciertos objetos elásticos particulares. En este capítulo queremos ver lo que sucede *en general* dentro de un material elástico. Nos gustaría describir las condiciones de esfuerzo y deformación específica dentro de algún bloque grande de gelatina al retorcerlo y comprimirlo en cualquier forma complicada. Para hacerlo, necesitamos describir la *deformación específica local* en cada punto en un cuerpo elástico; podemos hacerlo dando un conjunto de seis números —que son las componentes de un tensor simétrico— para cada punto. Anteriormente hablamos del tensor esfuerzo (capítulo 31); ahora necesitamos el tensor de deformación específica.

Imaginen que empezamos con el material inicialmente sin deformación y observamos el movimiento de una partícula pequeña de "suciedad" empotrada dentro del material cuando se le aplica una deformación. Una partícula que estaba en el punto P localizado en $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ se mueve a una nueva posición P' en $\boldsymbol{r}' = (x', y', z')$ como se muestra en la figura 39-1. Llamaremos $\boldsymbol{u}$ al vector desplazamiento de P a P'. Entonces

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}. \tag{39.1}$$

El desplazamiento $\boldsymbol{u}$ depende, por supuesto, del punto P de partida, de modo que $\boldsymbol{u}$ es una función vectorial de $\boldsymbol{r}$ —o si prefieren, de (x, y, z)—.

Veamos primero una situación sencilla en la cual la deformación es constante en todo el material —así que tenemos lo que se llama una *deformación homogénea*—. Supongan, por ejemplo, que tenemos un bloque de material y lo estiramos de manera uniforme. Simplemente cambiamos sus dimensiones de modo uniforme en una dirección —digamos que en la dirección x, como muestra la figura 39-2—. El desplazamiento u_x de una partícula en la dirección x es proporcional a x. De hecho,

$$\frac{u_x}{x} = \frac{\Delta l}{l}.$$

Escribiremos u_x en esta forma:

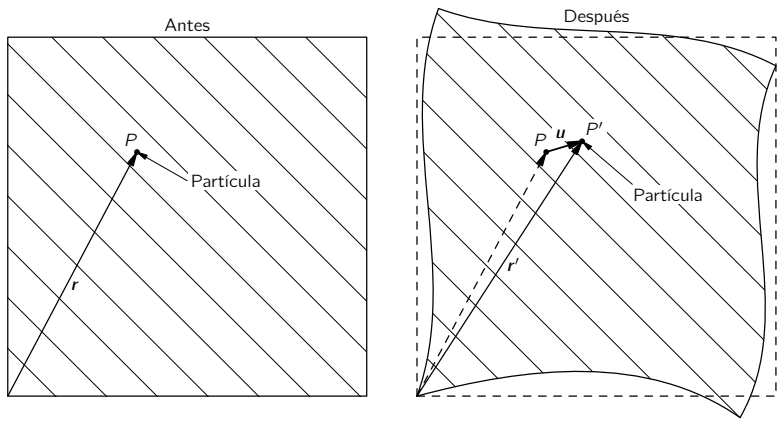


Figura 39-1. Una partícula en el material en el punto P en un bloque sin deformar se mueve a P' cuando el bloque se deforma.

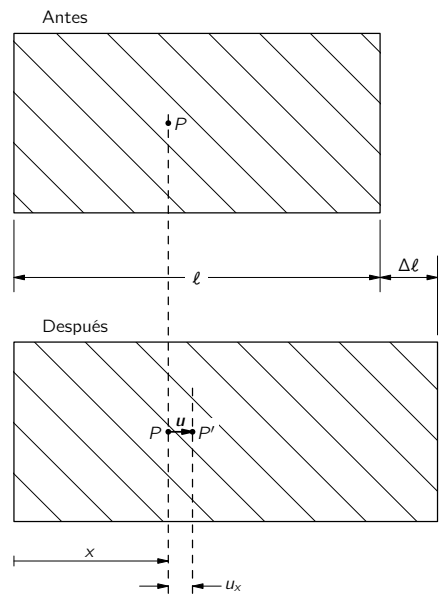


Figura 39-2. Una deformación homogénea del tipo estire.

$$u_x = e_{xx}x.$$

La constante de proporcionalidad e_{xx} es, por supuesto, igual a $\Delta l/l$. (Pronto verán por qué usamos un subíndice doble.)

Si la deformación no es uniforme, la relación entre u_x y x variará de un lugar a otro en el material. En el caso general definimos e_{xx} por medio de una especie de $\Delta l/l$ local, es decir, por

$$e_{xx} = \partial u_x/\partial x. \tag{39.2}$$

Este número —que ahora es una función de x, y y z— describe la magnitud del alargamiento en la dirección x en todo el pedazo de gelatina. Por supuesto, también puede haber alargamientos en las direcciones y y z. Los describimos con los números

$$e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \qquad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \tag{39.3}$$

También necesitamos poder describir las deformaciones tipo corte. Imaginemos un cubo pequeño delimitado dentro de la gelatina inicialmente no perturbada. Cuando la gelatina se deforma, este cubo puede transformarse en un paralelogramo, como se ve en la figura 39-3.* En esta clase de deformación, el movimiento según x de cada partícula es proporcional a su coordenada y,

$$u_x = \frac{\theta}{2}\, y. \tag{39.4}$$

Y también hay un movimiento según y proporcional a x,

$$u_y = \frac{\theta}{2}\, x. \tag{39.5}$$

Así, podemos describir tal deformación de corte escribiendo

$$u_x = e_{xy}y, \qquad u_y = e_{yx}x$$

con

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{\theta}{2}.$$

Ahora bien, se podría pensar que cuando las deformaciones no son homogéneas podríamos describir las deformaciones de corte generalizadas definiendo las cantidades e_{xy} y e_{yx} mediante

$$e_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y}, \qquad e_{yx} = \frac{\partial u_y}{\partial x}. \tag{39.6}$$

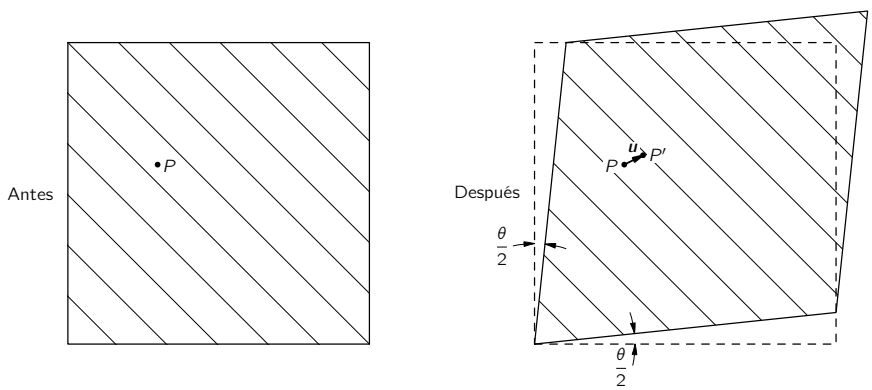


Figura 39-3. Deformación de corte homogénea.

* Escogemos el momento para dividir el ángulo total de corte θ en dos partes iguales y hacer la deformación simétrica respecto a x y y.

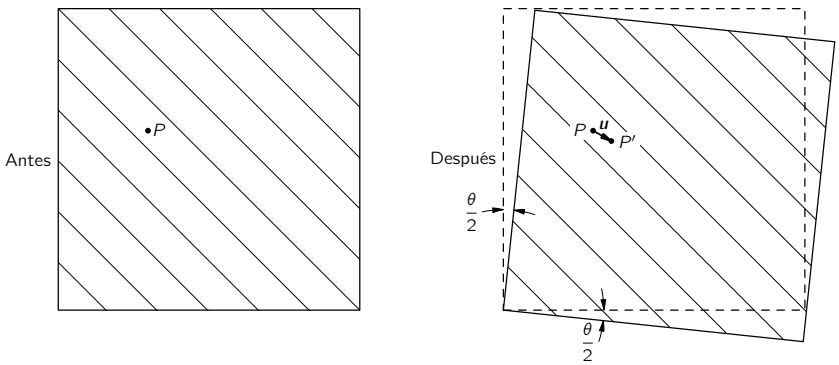


Figura 39-4. Rotación homogénea —no hay deformación—.

Pero hay una dificultad. Supongan que los desplazamientos u_x y u_y estuvieran dados por

$$u_x = \frac{\theta}{2}\,y, \qquad u_y = -\frac{\theta}{2}\,x.$$

Son como las ecuaciones (39.4) y (39.5) excepto que el signo de u_y está invertido. Con estos desplazamientos un cubo pequeño en la gelatina simplemente se corre un ángulo $\theta/2$, como muestra la figura 39-4. No hay ninguna deformación —sólo una rotación en el espacio—. No hay distorsión del material; las posiciones *relativas* de todos los átomos no han variado. Debemos de alguna manera hacer nuestras definiciones de modo que las rotaciones puras no estén incluidas en las deformaciones de corte. El punto clave es que si $\partial u_y/\partial x$ y $\partial u_x/\partial y$ son iguales y opuestas, no hay deformación; así que podemos arreglar las cosas *definiendo*

$$e_{xy} = e_{yx} = \tfrac{1}{2}(\partial u_y/\partial x + \partial u_x/\partial y).$$

Para una rotación pura ambos son cero, pero para un corte puro obtenemos que e_{xy} es igual a e_{yx} como queríamos.

En la distorsión más general —que puede incluir alargamiento o compresión además de corte— *definimos* el estado de deformación dando los nueve números

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x},\\ e_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y},\\ &\vdots\\ e_{xy} &= \tfrac{1}{2}(\partial u_y/\partial x + \partial u_x/\partial y),\\ &\vdots \end{aligned} \tag{39.7}$$

Éstos son los términos de un *tensor de deformación específica.* Como es un *tensor simétrico* —nuestras definiciones hacen $e_{xy} = e_{yx}$, siempre— realmente hay sólo seis números diferentes. Recordarán (véase el capítulo 31) que la característica general de un tensor es que los términos se transforman como los productos de las componentes de dos vectores. (Si $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son vectores, $C_{ij} = A_iB_j$ es un tensor.) Cada término de e_{ij} es un producto (o la suma de tales productos) de las componentes del vector $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y, u_z)$ y del operador $\boldsymbol{\nabla} = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$, que sabemos se transforma como un vector. Llamemos x_1, x_2 y x_3 a x, y y z, y u_1, u_2 y u_3 a u_x, u_y y u_z. Luego podemos escribir el término general e_{ij} del tensor de deformación específica en la forma

$$e_{ij} = \tfrac{1}{2}(\partial u_j/\partial x_i + \partial u_i/\partial x_j), \tag{39.8}$$

donde i y j pueden ser 1, 2 y 3.

Cuando tenemos una deformación homogénea —que puede incluir tanto alargamiento como corte— todas las e_{ij} son constantes y podemos escribir

$$u_x = e_{xx}x + e_{xy}y + e_{xz}z. \tag{39.9}$$

(Escogemos nuestro origen de x, y y z en el punto donde $\boldsymbol{u}$ es cero.) En este caso el tensor deformación e_{ij} da la relación entre dos vectores: el vector posición $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ y el vector desplazamiento $\boldsymbol{u} = (u_x, u_y, u_z)$.

Cuando las deformaciones no son homogéneas, cualquier pedazo de la gelatina también puede sufrir una torsión —habrá una rotación local—. Si las distorsiones son todas pequeñas, tendremos

$$\Delta u_i = \sum_j (e_{ij} - \omega_{ij})\,\Delta x_j, \tag{39.10}$$

donde ω_{ij} es un tensor *antisimétrico*,

$$\omega_{ij} = \tfrac{1}{2}(\partial u_j/\partial x_i - \partial u_i/\partial x_j), \tag{39.11}$$

que describe la rotación. Sin embargo, no nos preocuparemos más de las rotaciones, únicamente de las deformaciones descritas por el tensor simétrico e_{ij}.

39-2 El tensor de elasticidad

Ahora que hemos descrito las deformaciones específicas, queremos relacionarlas con las fuerzas internas —los esfuerzos en el material—. Para cada pedazo pequeño del material suponemos que la ley ley de es válida y escribimos que los esfuerzos son proporcionales a las deformaciones específicas. En el capítulo 31 definimos el tensor de esfuerzos S_{ij} como la componente i de la fuerza a través de un área unitaria perpendicular al eje j. La ley de Hooke dice que cada componente de S_{ij} está linealmente relacionada con *cada* una de las componentes de la deformación específica. Como S y e tienen nueve componentes, hay $9 \times 9 = 81$ coeficientes posibles que describen las propiedades elásticas del material. Son constantes si el material es homogéneo. Indicamos estos coeficientes con C_{ijkl} y los definimos mediante la ecuación

$$S_{ij} = \sum_{k,l} C_{ijkl} e_{kl}, \tag{39.12}$$

donde i, j, k y l toman los valores 1, 2 o 3. Como los coeficientes C_{ijkl} relacionan un tensor con otro, también forman un tensor —un tensor de *orden cuatro*—. Podemos llamarlo *tensor de elasticidad*.

Supongan que todas las C son conocidas y que aplican una fuerza complicada a un objeto de una forma peculiar. Habrá toda clase de distorsiones y el objeto quedará finalmente con alguna forma retorcida. ¿Cuáles son los desplazamientos? Pueden ver que es un problema complicado. Si conocieran las deformaciones específicas, podrían hallar los esfuerzos empleando la ecuación (39.12) —o viceversa—. Pero los esfuerzos y deformaciones que hay finalmente en un punto dependen de lo que sucede en todo el resto del material.

La manera más fácil de atacar el problema es considerar la energía. Cuando hay una fuerza F proporcional a un desplazamiento x, digamos que $F = kx$, el trabajo requerido para cualquier desplazamiento x es $kx^2/2$. En forma similar, el trabajo w que se realiza dentro de *cada unidad de volumen* de un material distorsionado resulta ser

$$w = \tfrac{1}{2} \sum_{ijkl} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl}. \tag{39.13}$$

El trabajo total W realizado al deformar el cuerpo es la integral de w sobre su volumen:

$$W = \int \tfrac{1}{2} \sum_{ijkl} C_{ijkl} e_{ij} e_{kl}\, dV \tag{39.14}$$

Entonces ésta es la energía potencial almacenada en los esfuerzos internos del material. Ahora bien, cuando un cuerpo está en equilibrio, esta energía interna debe ser *mínima*. El problema de hallar las deformaciones en un cuerpo puede ser resuelto hallando el conjunto de desplazamientos $\boldsymbol{u}$ en todo el cuerpo que hagan W mínimo. En el capítulo 19 dimos algunas ideas generales del cálculo de variaciones usadas para atacar problemas de minimización como éste. Aquí no podemos entrar en más detalles sobre el problema.

En concreto, en lo que estamos interesados ahora es en lo que se pueda señalar de las propiedades generales del tensor de elasticidad. Primero, está claro que realmente *no* hay 81 términos *diferentes* en C_{ijkl}. Como S_{ij} y e_{ij} son ambos tensores simétricos, cada uno con sólo seis términos diferentes, puede haber cuando mucho 36 términos distintos en C_{ijkl}. Sin embargo, hay generalmente muchos menos.

Examinemos el caso especial de un cristal cúbico. En él, la densidad de energía w empieza xasí:

$$\begin{aligned} w = \tfrac{1}{2}\{&C_{xxxx}e_{xx}^2 + C_{xxxy}e_{xx}e_{xy} + C_{xxxz}e_{xx}e_{xz} \\ &+ C_{xxyx}e_{xx}e_{xy} + C_{xxyy}e_{xx}e_{yy}\ldots \text{ etc}\ldots \\ &+ C_{yyyy}e_{yy}^2 + \ldots \text{ etc}\ldots \text{ etc}\ldots\}, \end{aligned} \tag{39.15}$$

¡con un total de 81 términos! Ahora bien, un cristal cúbico tiene cierta simetría. En particular, si se gira el cristal 90°, tiene las mismas propiedades físicas. Tiene la misma rigidez tanto para alargamientos en la dirección y como para alargamientos en la dirección x. Por lo tanto, si cambiamos nuestra definición de las direcciones de las coordenadas x y y en la ecuación (39.15), la energía no debe cambiar. Para un cristal cúbico debe ser

$$C_{xxxx} = C_{yyyy} = C_{zzzz}. \tag{39.16}$$

Luego podemos demostrar que los términos como C_{xxxy} deben ser cero. Un cristal cúbico tiene la propiedad de ser simétrico bajo una *reflexión* respecto a cualquier plano perpendicular a uno de los ejes. Si remplazamos y en vez de $-y$, nada es diferente. Pero cambiando de y a $-y$, e_{xy} se transforma en $-e_{xy}$ —un desplazamiento que iba hacia $+y$ ahora es hacia $-y$—. Para que la energía no cambie, C_{xxxy} debe transformarse en $-C_{xxxy}$, cuando hacemos una reflexión. Pero un cristal reflejado es el mismo que antes, así que C_{xxxy} debe ser *igual* a $-C_{xxxy}$. Esto puede suceder solamente si ambos son cero.

Ustedes dirán, "¡pero el mismo razonamiento dará $C_{yyyy} = 0$!" No, porque hay *cuatro* y. El signo cambia una vez por cada y y cuatro menos dan un más. Si hay *dos* o *cuatro* y, el término no tiene por qué ser cero. Es cero solamente cuando hay *una* o *tres*. Así, para un cristal cúbico, cualquier término no nulo de C tendrá solamente un *número par* de subíndices idénticos. (Evidentemente, el razonamiento que hemos hecho para y también sirve para x y z.) Entonces se pueden tener términos como $C_{xxyy}, C_{xyxy}, C_{xyyx}$, y cosas así. Sin embargo, ya hemos demostrado que si cambiamos todas las x por y y *viceversa* (o todas las z y x, etc.) debemos obtener —con un cristal cúbico— el mismo número. Esto significa que hay *solamente tres* posibilidades no nulas *diferentes*:

$$\begin{aligned} &C_{xxxx}\ (= C_{yyyy} = C_{zzzz}), \\ &C_{xxyy}\ (= C_{yyxx} = C_{xxzz},\ \text{etc.}), \\ &C_{xyxy}\ (= C_{yxyx} = C_{xzxz},\ \text{etc.}). \end{aligned} \tag{39.17}$$

Para un cristal cúbico, entonces, la densidad de energía tendrá este aspecto:

$$\begin{aligned} w = \tfrac{1}{2}\{&C_{xxxx}(e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) \\ &+ 2C_{xxyy}(e_{xx}e_{yy} + e_{yy}e_{zz} + e_{zz}e_{xx}) \\ &+ 4C_{xyxy}(e_{xy}^2 + e_{yz}^2 + e_{zx}^2)\}. \end{aligned} \tag{39.18}$$

Para un material isotrópico —esto es, no cristalino— la simetría es aún más alta. Las C deben ser las mismas para *cualquier* sistema de coordenadas que se escoja. Resulta entonces que hay otra relación entre las C, a saber,

$$C_{xxxx} = C_{xxyy} + 2C_{xyxy}. \tag{39.19}$$

Podemos ver que esto es así, por el siguiente razonamiento. El tensor de esfuerzos S_{ij} tiene que estar relacionado con e_{ij} en una forma que no dependa de las direcciones de las coordenadas —debe estar relacionado solamente mediante cantidades *escalares*—. "Eso es fácil", dirán. "La única forma de obtener S_{ij} de e_{ij} es multiplicando por una constante escalar. Es precisamente la ley de Hooke. Debe ser que $S_{ij} = (\text{constante})e_{ij}$." Pero eso no es del todo correcto; también podría estar el *tensor unitario* δ_{ij} multiplicado por algún escalar, linealmente relacionado con e_{ij}. El único invariante lineal en las e que pueden hacer es $\sum e_{ii}$. (Se transforma como $x^2 + y^2 + z^2$, que es un escalar.) Así, la forma más general —para materiales isotrópicos— de la ecuación que relaciona S_{ij}, con e_{ij} es

$$S_{ij} = 2\mu e_{ij} + \lambda\Big(\sum_k e_{kk}\Big)\delta_{ij}. \tag{39.20}$$

(La primera constante se escribe de ordinario como *dos* por μ; entonces el coeficiente μ es igual al módulo de corte que definimos en el capítulo anterior.) Las constantes μ y λ se llaman constantes elásticas de Lamé. Comparando la ecuación (39.20) con la ecuación (39.12) se ve que

$$\begin{aligned} C_{xxyy} &= \lambda,\\ C_{xyxy} &= \mu,\\ C_{xxxx} &= 2\mu + \lambda. \end{aligned} \tag{39.21}$$

Así, hemos demostrado que la ecuación (39.19) realmente es verdadera. También ven que las propiedades elásticas de un material isotrópico están dadas completamente por dos constantes, como dijimos en el capítulo anterior.

Las C se pueden poner en función de dos cualesquiera de las constantes elásticas que hemos usado anteriormente —por ejemplo, en función del módulo de Young Y y de la razón de Poisson σ—. Dejaremos que demuestren

$$\begin{aligned} C_{xxxx} &= \frac{Y}{1+\sigma}\left(1 + \frac{\sigma}{1-2\sigma}\right),\\ C_{xxyy} &= \frac{Y}{1+\sigma}\left(\frac{\sigma}{1-2\sigma}\right),\\ C_{xyxy} &= \frac{Y}{2(1+\sigma)}. \end{aligned} \tag{39.22}$$

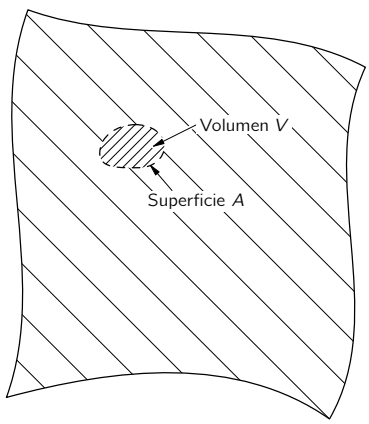


Figura 39-5. Un pequeño elemento de volumen V dentro de una superficie A.

39-3 Los movimientos dentro de un cuerpo elástico

Hemos visto que en un cuerpo elástico *en equilibrio* los esfuerzos internos se ajustan para hacer mínima la energía. Ahora veamos lo que sucede cuando las fuerzas internas *no* están en equilibrio. Digamos que tenemos un trozo pequeño de material dentro de cierta superficie A. Véase la figura 39-5. Si el trozo está en equilibrio, la fuerza total $\boldsymbol{F}$ que actúa sobre él debe ser cero. Podemos considerar que esta fuerza está formada por dos partes. Podría haber una parte debida a fuerzas "externas" como la gravedad, las cuales actúan a distancia sobre la materia en el pedazo produciendo una *fuerza por unidad* de volumen $\boldsymbol{f}_{\text{ext}}$. La fuerza externa total $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ es la integral de $\boldsymbol{f}_{\text{ext}}$ sobre el volumen del pedazo:

$$\boldsymbol{F}_{\text{ext}} = \int \boldsymbol{f}_{\text{ext}}\, dV. \tag{39.23}$$

En el equilibrio, esta fuerza estaría equilibrada por la fuerza total $\boldsymbol{F}_{\text{int}}$ proveniente del material cercano que actúa a través de la superficie A. Cuando el pedazo *no* está en equilibrio —se está moviendo— la suma de las fuerzas internas y externas es igual a la masa por la aceleración. Tendríamos

$$\boldsymbol{F}_{\text{ext}} + \boldsymbol{F}_{\text{int}} = \int \rho\ddot{\boldsymbol{r}}\, dV, \tag{39.24}$$

donde ρ es la densidad del material y $\ddot{\boldsymbol{r}}$ su aceleración. Ahora podemos combinar las ecuaciones (39.23) y (39.24), escribiendo

$$\boldsymbol{F}_{\text{int}} = \int_v (-\boldsymbol{f}_{\text{ext}} + \rho\ddot{\boldsymbol{r}})\, dV. \tag{39.25}$$

Simplificaremos la escritura definiendo

$$\boldsymbol{f} = -\boldsymbol{f}_{\text{ext}} + \rho\ddot{\boldsymbol{r}}. \tag{39.26}$$

Luego la ecuación (39.25) se convierte en

$$\boldsymbol{F}_{\text{int}} = \int_v \boldsymbol{f}\, dV. \tag{39.27}$$

Lo que hemos llamado $\boldsymbol{F}_{\text{int}}$ está relacionado con los esfuerzos en el material. El tensor de esfuerzos S_{ij} fue definido (capítulo 31) de modo que la componente x de la fuerza dF a través del elemento de superficie da, de vector normal $\boldsymbol{n}$, está dada por

$$dF_x = (S_{xx}n_x + S_{xy}n_y + S_{xz}n_z)\, da. \tag{39.28}$$

La componente x de $\boldsymbol{F}_{\text{int}}$ sobre nuestro pequeño pedazo es entonces la integral de dF_x sobre la superficie. Sustituyendo esto en la componente x de la ecuación (39.27), obtenemos

$$\int_A (S_{xx}n_x + S_{xy}n_y + S_{xz}n_z)\, da = \int_v f_x\, dV. \tag{39.29}$$

Tenemos una integral de superficie relacionada con una integral de volumen y esto nos recuerda algo que aprendimos en electricidad. Noten que si ignoran el primer subíndice x en cada una de las S del primer miembro de la ecuación (39.29), ésta tiene precisamente el aspecto de la integral de una cantidad "$\boldsymbol{S}$" $\cdot\, \boldsymbol{n}$ —esto es, la componente normal de un vector— sobre la superficie. Sería el flujo de "$\boldsymbol{S}$" que sale del volumen. Y se podría escribir esto, usando la ley de Gauss, como la integral de volumen de la divergencia de "$\boldsymbol{S}$". En realidad, esto es válido haya o no subíndice x —es simplemente un teorema matemático que se obtiene integrando por partes—. En otras palabras, podemos poner la ecuación (39.29) en la forma

$$\int_v \left(\frac{\partial S_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial S_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial S_{xz}}{\partial z}\right) dV = \int_v f_x\, dV. \tag{39.30}$$

Ahora podemos suprimir las integrales de volumen y escribir la ecuación diferencial para la componente general de $\boldsymbol{f}$ en la forma

$$f_i = \sum_j \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}. \tag{39.31}$$

Esta expresión dice cómo está relacionada la fuerza por unidad de volumen con el tensor de esfuerzo S_{ij}.

La teoría de los movimientos dentro de un sólido procede de esta manera. Si empezamos conociendo el desplazamiento inicial —dado por $\boldsymbol{u}$, digamos— podemos obtener las deformaciones e_{ij}. A partir de las deformaciones podemos obtener los esfuerzos usando la ecuación (39.12). A partir de los esfuerzos podemos obtener la densidad de fuerza $\boldsymbol{f}$ en la ecuación (39.31). Conociendo $\boldsymbol{f}$, podemos obtener de la ecuación (39.26), la aceleración $\ddot{\boldsymbol{r}}$ del material, que nos dice cómo están variando los desplazamientos. Juntando todo obtenemos

la horrible ecuación de movimiento para un sólido elástico. Sólo escribiremos a continuación el resultado que se obtiene para un material isotrópico. Si usan la ecuación (39.20) para S_{ij} y escriben la e_{ij} como $\frac{1}{2}(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i)$, llegan a la ecuación vectorial

$$\boldsymbol{f} = (\lambda+\mu)\,\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}) + \mu\,\nabla^2\boldsymbol{u}. \tag{39.32}$$

En realidad, pueden ver que la ecuación que relaciona $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{u}$ *debe* tener esta forma. La fuerza debe depender de la segunda derivada del desplazamiento $\boldsymbol{u}$. ¿Qué segundas derivadas de $\boldsymbol{u}$ hay que constituyan vectores? Una es $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})$; es un vector verdadero. La otra es $\nabla^2\boldsymbol{u}$. Así que la forma más general es

$$\boldsymbol{f} = a\,\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}) + b\,\nabla^2\boldsymbol{u},$$

la ecuación anterior es precisamente (39.32) con una definición diferente de las constantes. Puede que se estén preguntando por qué no tenemos un tercer término usando $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}$, que también es un vector. Pero recuerden que $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}$ es lo mismo que $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})-\nabla^2\boldsymbol{u}$, así que es una combinación lineal de los dos términos que tenemos. Agregándolo no incluimos nada nuevo. Hemos demostrado una vez más que los materiales isotrópicos tienen solamente dos constantes elásticas.

Para la ecuación de movimiento del material, podemos hacer (39.32) igual a $\rho\partial^2\boldsymbol{u}/\partial t^2$ —despreciando por ahora cualquier fuerza de volumen como la gravedad— y obtener

$$\rho\,\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2} = (\lambda+\mu)\,\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}) + \mu\,\nabla^2\boldsymbol{u}. \tag{39.33}$$

Se parece un poco a la ecuación de onda que teníamos en el electromagnetismo, excepto que hay un término adicional complicado. Para materiales cuyas propiedades elásticas son las mismas en cualquier parte, podemos ver cuál es el aspecto de la solución general como sigue. Recordarán que se puede escribir cualquier campo vectorial como la suma de dos vectores: uno cuya divergencia es cero y el otro cuyo rotacional es cero. En otras palabras, podemos poner

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \tag{39.34}$$

donde

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}_1 = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}_2 = 0. \tag{39.35}$$

Sustituyendo $\boldsymbol{u}$ por $\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2$ en (39.33), obtenemos

$$\rho\,\partial^2/\partial t^2[\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2] = (\lambda+\mu)\,\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}_2) + \mu\,\nabla^2(\boldsymbol{u}_1+\boldsymbol{u}_2). \tag{39.36}$$

Podemos eliminar $\boldsymbol{u}_1$ tomando la divergencia de esta ecuación,

$$\rho\,\partial^2/\partial t^2(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}_2) = (\lambda+\mu)\,\nabla^2(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}_2) + \mu\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\nabla^2(\boldsymbol{u}_2).$$

Como se puede intercambiar los operadores (∇^2) y $(\boldsymbol{\nabla}\cdot)$, podemos sacar la divergencia factor común y obtener

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\{\rho\,\partial^2\boldsymbol{u}_2/\partial t^2 - (\lambda+2\mu)\,\nabla^2\boldsymbol{u}_2\} = 0. \tag{39.37}$$

Como $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{u}_2$ es cero por definición, el rotacional del corchete $\{\}$ también es cero, así que el corchete mismo es idénticamente cero y

$$\rho\,\partial^2\boldsymbol{u}_2/\partial t^2 = (\lambda+2\mu)\,\nabla^2\boldsymbol{u}_2. \tag{39.38}$$

Ésta es la ecuación de onda vectorial para ondas que se mueven a la velocidad $C_2 = \sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$. Como el rotacional de $\boldsymbol{u}_2$ es cero, no hay deformaciones de corte asociadas con esta onda; esta onda es justamente la onda compresional —tipo sonora— discutida en el capítulo anterior y la velocidad es precisamente la que encontramos para C_{long}.

De una manera similar —tomando el rotacional de la ecuación (39.36)— podemos demostrar que $\boldsymbol{u}_1$ satisface la ecuación

$$\rho\,\partial^2\boldsymbol{u}_1/\partial t^2 = \mu\,\nabla^2\boldsymbol{u}_1. \tag{39.39}$$

Otra vez es una ecuación de onda vectorial para ondas con la velocidad $C_2 = \sqrt{\mu/\rho}$. Como $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}_1$ es cero, $\boldsymbol{u}_1$ no produce variaciones de densidad; el vector $\boldsymbol{u}_1$ corresponde a la onda transversal o tipo de corte que estudiamos en el capítulo anterior y $C_2 = C_{\text{corte}}$.

Si queremos conocer los esfuerzos estáticos en un material isotrópico, en principio podríamos hallarlos resolviendo la ecuación (39.32) con $\boldsymbol{f}$ igual a cero —o igual a las fuerzas estáticas de volumen debidas a la gravedad, como $\rho\boldsymbol{g}$— bajo ciertas condiciones que están relacionadas con las fuerzas que actúan sobre la superficie de nuestro bloque grande de material. Esto es algo más difícil de hacer que los problemas correspondientes del electromagnetismo. Es más difícil, primero, porque las ecuaciones son un poco más difíciles de manejar; y segundo, porque las formas de los cuerpos elásticos en los que más interesados estamos generalmente son mucho más complicadas. En electromagnetismo, a menudo estamos interesados en resolver las ecuaciones de Maxwell alrededor de formas geométricas relativamente simples, como cilindros, esferas, etc., puesto que éstas son formas convenientes para dispositivos eléctricos. En elasticidad, los objetos que quisiéramos analizar pueden tener formas muy complicadas —como un gancho de grúa, un cigüeñal de automóvil, o el rotor de una turbina de gas—. A veces se pueden resolver aproximadamente estos problemas con métodos numéricos, usando el principio de mínima energía mencionado anteriormente. Otra forma es usar un modelo del objeto y medir los esfuerzos internos experimentalmente, usando luz polarizada.

El método funciona así: cuando se somete a tensión un material isotrópico transparente —por ejemplo, un plástico transparente como la lucita— se vuelve birrefringente. Si se envía luz polarizada a través de él, el plano de polarización rota cierto ángulo en relación con el esfuerzo: midiendo la rotación, se puede medir el esfuerzo. La figura 39-6 muestra el aspecto que podría tener el dispositivo experimental. La figura 39-7 es una fotografía de un modelo fotoelástico de una forma complicada sometida a esfuerzo.

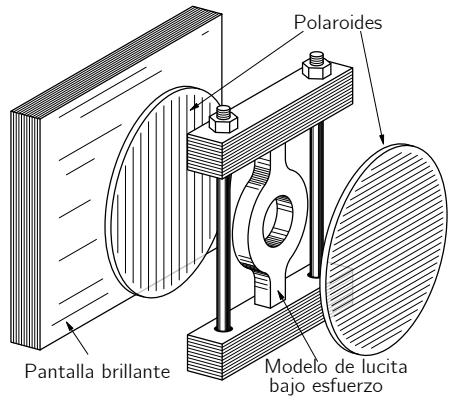


Figura 39-6. Midiendo esfuerzos internos con luz polarizada.

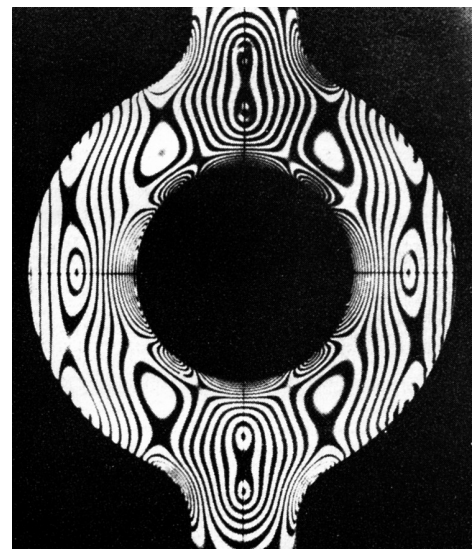


Figura 39-7. Un modelo plástico sometido a esfuerzos visto entre polaroides cruzados. [De F. W. Sears, *Optics*, Addison-Wesley Publishing Co., Mass., 1949.]

39-4 Comportamiento no elástico

En lo que hemos dicho hasta ahora, hemos supuesto que el esfuerzo es proporcional a la deformación; en general esto *no* es cierto. La figura 39-8 muestra una curva típica de esfuerzo de un material dúctil. Para deformaciones pequeñas, el esfuerzo es proporcional a la deformación específica. A la larga, sin embargo, después de un punto determinado, la relación entre esfuerzo y deformación empieza a desviarse de la línea recta. En muchos materiales —los que llamaríamos "frágiles"— los objetos se rompen con deformaciones un poco por encima del punto donde la curva empieza a doblarse. En general, hay otras complicaciones en la relación esfuerzo-deformación específica. Por ejemplo, si deforman un objeto, los esfuerzos pueden ser altos al principio, pero decrecen lentamente con el tiempo. Además, si van a esfuerzos altos, pero no hasta el punto de "rotura", cuando bajan la deformación el esfuerzo retornará siguiendo una curva diferente. Hay un pequeño efecto de histéresis (como el que vimos entre B y H en materiales magnéticos).

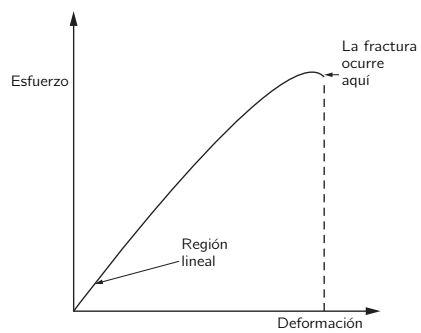
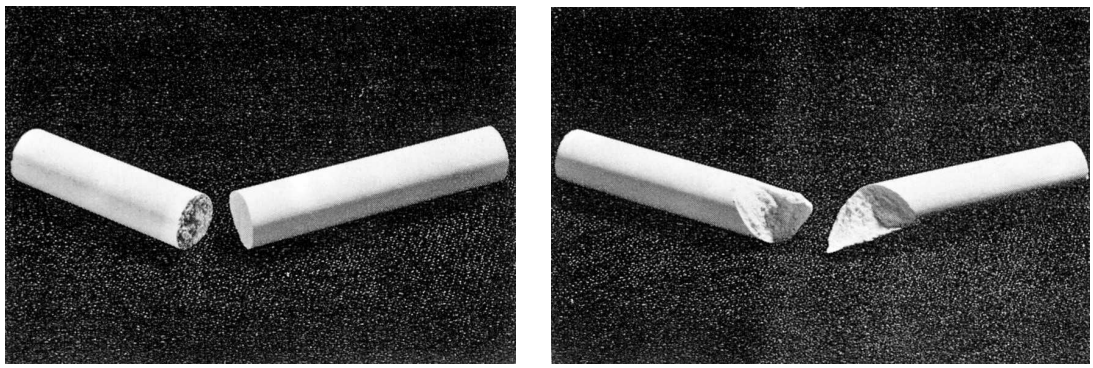


Figura 39-8. Relación típica de esfuerzo deformación para deformaciones grandes.

El esfuerzo al cual un material se rompe varía ampliamente de un material a otro. Algunos materiales se romperán cuando el esfuerzo *de tensión* máximo alcance un valor determinado. Otros materiales cederán cuando el esfuerzo *de corte* máximo alcance un cierto valor. El gis es un ejemplo de un material que es mucho más débil en tensión que en corte. Si se jala de los extremos de un pedazo de gis, éste se rompe perpendicularmente a la dirección de los esfuerzos aplicados, como muestra la figura 39-9(a). Se rompe perpendicularmente a la fuerza aplicada porque es sólo un conglomerado de partículas fácilmente separables. Sin embargo,

el material es mucho más resistente al esfuerzo de corte, porque las partículas se obstaculizan entre sí. Recordarán que cuando teníamos una varilla sometida a torsión había un esfuerzo de corte en toda ella. También demostramos que un esfuerzo de corte era equivalente a una combinación de una tensión y una compresión a 45°. Por estas razones, si se *tuerce* un pedazo de gis, se romperá a lo largo de una superficie complicada que empezará formando 45° con el eje. La figura 39-9(b) muestra una fotografía de un pedazo de gis roto de esta manera. El gis se rompe donde el material está en tensión máxima.



(a) (b)

Figura 39-9. (a) Un gis roto jalando los extremos; (b) un gis roto torciendo.

Otros materiales se comportan de una manera extraña y complicada. Cuanto más complicados son los materiales, más interesante es su comportamiento. Si tomamos una hoja de plástico "Saran-Wrap", la hacemos una bola y la arrojamos sobre una mesa, se desdobla lentamente y vuelve a su forma original. A primera vista, estaríamos tentados a pensar que es la inercia la que hace que vuelva a su forma original plana. Sin embargo, un cálculo sencillo demuestra que la inercia es muy pequeña, varios órdenes de magnitud, para producir el efecto. Parece que hay dos efectos importantes compitiendo: "algo" dentro del material "recuerda" la forma que tenía inicialmente y "trata" de volver a ella, sin embargo algo más "prefiere" la nueva forma y "se resiste" a volver a la primera.

No intentaremos describir el mecanismo puesto en juego en el plástico Saran, pero pueden darse una idea de cómo se puede producir tal efecto por medio del *modelo* siguiente. Imaginen un material hecho de fibras largas, flexibles pero fuertes, mezcladas con algunas celdas huecas llenas de un líquido viscoso. Imaginen también que hay caminos delgados de una celda a la siguiente de modo que el líquido puede filtrarse lentamente de una celda a su vecina. Cuando arrugamos en la mano una hoja de este material, distorsionamos las fibras largas, exprimiendo el líquido de las celdas en un lugar y forzándolo dentro de otras celdas que se han alargado. Al soltarlo, las fibras largas tratan de volver a su forma original. Pero para hacerlo deben obligar al líquido a volver a su ubicación original —lo que sucederá en forma relativamente lenta debido a la viscosidad—. Las fuerzas que aplicamos al arrugar la hoja son mayores que las fuerzas producidas por las fibras. Podemos arrugarla rápidamente, pero se recuperará más despacio. Es claro que una combinación de grandes moléculas rígidas y pequeñas moléculas móviles en el plástico Saran causa su comportamiento. Esta idea también concuerda con el hecho de que el material vuelve más rápido a su forma original cuando está caliente que cuando está frío —el calor aumenta la movilidad (disminuye la viscosidad) de las moléculas pequeñas—.

Aunque hemos estado discutiendo cómo pierde su validez la ley de Hooke, quizá lo notable no es que la ley de Hooke deje de valer para deformaciones grandes sino que sea de validez tan general. Podemos hacernos una idea de por qué es así, observando la energía de deformación de un material. Decir que el

esfuerzo es proporcional a la deformación específica, es lo mismo que decir que la energía de deformación varía como el cuadrado de la deformación específica. Supongan que tenemos una varilla y que la torcemos en un ángulo pequeño θ. Si vale la ley de Hooke, la energía de deformación debería ser proporcional al cuadrado de θ. Supongan que la energía sea una función arbitraria del ángulo; podríamos escribirla en la forma de un desarrollo de Taylor alrededor de un ángulo cero:

$$U(\theta) = U(0) + U'(0)\theta + \tfrac{1}{2}U''(0)\theta^2 + \tfrac{1}{6}U'''(0)\theta^3 + \cdots \tag{39.40}$$

El torque τ es la derivada de U respecto al ángulo; tendríamos entonces

$$\tau(\theta) = U'(0) + U''(0)\theta + \tfrac{1}{2}U'''(0)\theta^2 + \cdots \tag{39.41}$$

Si medimos los ángulos desde la posición de *equilibrio*, el primer término es cero, así que el primero de los términos restantes es proporcional a θ; y para ángulos suficientemente pequeños, dominará sobre el término en θ^2. [En realidad, los materiales son suficientemente simétricos internamente de modo que $\tau(\theta) = -\tau(-\theta)$; el término en θ^2 será cero y la desviación de la linearidad provendría únicamente del término en θ^3. Sin embargo, no hay razón para que esto sea cierto para compresiones y tensiones.] Lo que no hemos explicado es por qué los materiales comúnmente se rompen poco después de que los términos de orden superior se tornan significativos.

39-5 Cálculo de las constantes elásticas

Como último tema de elasticidad querríamos mostrar cómo se podría tratar de calcular las constantes elásticas de un material, empezando con algún conocimiento de las propiedades de los átomos que forman el material. Tomaremos solamente el caso sencillo de un cristal cúbico *iónico* como el cloruro de sodio. Cuando se deforma un cristal, varían su volumen o su forma. Tales variaciones dan lugar a un aumento de la energía potencial del cristal. Para calcular la variación de la energía de formación, tenemos que saber adónde va cada átomo. En cristales complicados, los átomos se redistribuyen en la red de maneras muy complicadas para hacer que la energía total sea lo más pequeña posible. Esto hace que el cálculo de la energía de deformación sea bastante difícil. Sin embargo, en el caso de un cristal cúbico sencillo es fácil ver lo que sucederá. La distorsión dentro del cristal será geométricamente similar a la distorsión de las paredes externas del cristal.

Podemos calcular las constantes elásticas de un cristal cúbico en la forma siguiente. Supongamos primero alguna ley de fuerza entre cada par de átomos del cristal. Calculemos la variación de la energía interna del cristal cuando se lo aparta de su forma de equilibrio. Esto nos da una relación entre la energía y la deformación específica, que es cuadrática en todas las deformaciones específicas. Comparando la energía obtenida de esta manera con la ecuación (39.13), podemos identificar el coeficiente de cada término con las constantes elásticas C_{ijkl}.

Para nuestro ejemplo supondremos una ley de fuerza simple: que la fuerza entre átomos vecinos es una fuerza *central*, con lo cual entendemos que actúa según la recta que une los dos átomos. Es de esperar que las fuerzas en cristales iónicos sean como ésta, puesto que son principalmente fuerzas de Coulomb. (Las fuerzas de los enlaces covalentes generalmente son más complicadas, puesto que pueden ejercer un empuje lateral sobre un átomo vecino; dejaremos de lado esta complicación.) Además vamos a incluir sólo las fuerzas entre cada átomo y su vecino *más cercano* y el *siguiente más cercano*. Es decir, haremos una aproximación que desprecia todas las fuerzas provenientes de más allá del segundo vecino. La figura 39-10(a) muestra las fuerzas que incluiremos, en el plano xy. También hay que incluir las fuerzas correspondientes en los planos yz y zx.

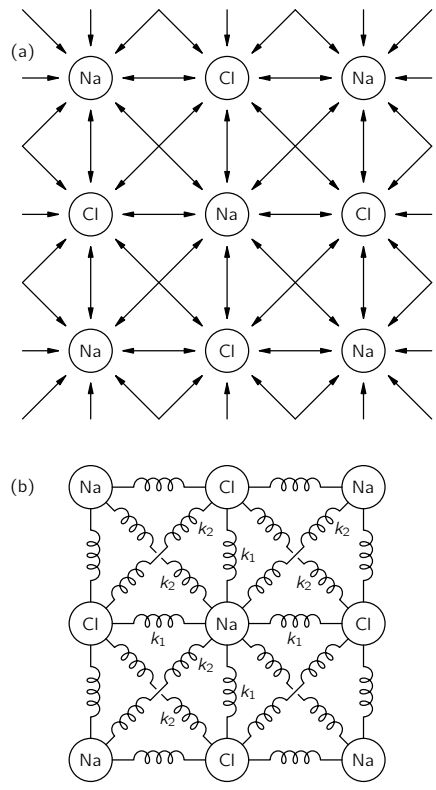


Figura 39-10. (a) Fuerzas entre átomos que estamos tomando en cuenta; (b) un modelo en el que los átomos están conectados con resortes.

Como sólo estamos interesados en los coeficientes elásticos que corresponden a deformaciones específicas pequeñas, y en consecuencia queremos que la energía

Tabla 39-1

Átomo	Localización x, y	u_x	u_y	k
1	$0, 0$	0	0	—
2	$a, 0$	$e_{xx}a$	$e_{yx}a$	k_1
3	a, a	$(e_{xx} + e_{xy})a$	$(e_{yx} + e_{yy})a$	k_2
4	$0, a$	$e_{xy}a$	$e_{yy}a$	k_1
5	$-a, a$	$(-e_{xx} + e_{xy})a$	$(-e_{yx} + e_{yy})a$	k_2
6	$-a, 0$	$-e_{xx}a$	$-e_{yx}a$	k_1
7	$-a, -a$	$-(e_{xx} + e_{xy})a$	$-(e_{yx} + e_{yy})a$	k_2
8	$0, -a$	$-e_{xy}a$	$-e_{yy}a$	k_1
9	$a, -a$	$(e_{xx} - e_{xy})a$	$(e_{yx} - e_{yy})a$	k_2

sólo contenga términos cuadráticos en las deformaciones, podemos imaginar que la fuerza entre cada par de átomos varía linealmente con el desplazamiento. Entonces podemos imaginarnos que cada par de átomos está unido por un resorte lineal, como se ha representado en la figura 39-10(b). Todos los resortes entre un átomo de sodio y un átomo de cloro deben tener la misma constante elástica k_1, digamos. Los resortes entre dos sodios y entre dos cloros deben tener diferentes constantes, pero haremos nuestra discusión tomándolas iguales; las llamaremos k_2. (Podríamos volver luego y hacerlas diferentes después que hayamos visto cómo hacer los cálculos.)

Supongan ahora que se distorsiona el cristal con una deformación uniforme descrita por el tensor de deformación específica e_{ij}. En general, tendrá componentes en las que intervienen x, y y z; pero ahora solamente consideraremos una deformación específica con las tres componentes e_{xx}, e_{xy} y e_{yy} para que sea más fácil de visualizar. Si elegimos un átomo como origen, el desplazamiento de cualquier otro átomo estará dado por ecuaciones como la ecuación (39.9):

$$\begin{aligned} u_x &= e_{xx}x + e_{xy}y, \\ u_y &= e_{xy}x + e_{yy}y. \end{aligned} \tag{39.42}$$

Supongan que llamamos "átomo 1" al átomo en $x = y = 0$ y numeramos sus vecinos en el plano xy como muestra la figura 39-11. Llamando a a la constante de la red, obtenemos los desplazamientos u_x y u_y según x y y, listados en la tabla 39-1.

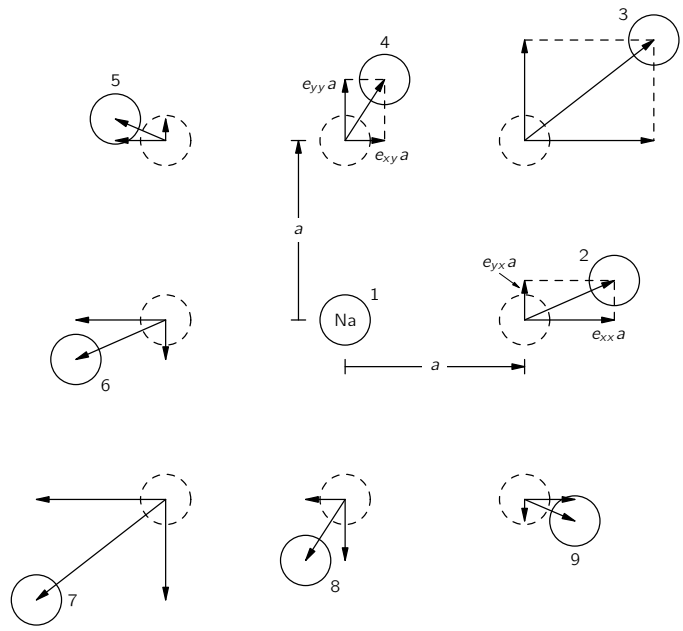


Figura 39-11. Los desplazamientos del vecino más cercano y el siguiente más cercano del átomo 1 (exagerado).

Ahora podemos calcular la energía almacenada en los resortes, que es $k/2$ por el cuadrado del alargamiento de cada resorte. Por ejemplo, la energía del resorte horizontal entre el átomo 1 y el átomo 2 es

$$\frac{k_1(e_{xx}a)^2}{2}. \tag{39.43}$$

Noten que en primer orden, el desplazamiento según y del átomo 2 no varía la longitud del resorte entre el átomo 1 y el átomo 2. Sin embargo, para obtener la energía de deformación de un resorte diagonal, como el que va al átomo 3, necesitamos calcular la variación de longitud debida a los desplazamientos horizontal y vertical. Para desplazamientos pequeños respecto al cubo original, podemos escribir la variación de distancia al átomo 3 como la suma de las componentes de u_x y u_y en la dirección diagonal, es decir

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,(u_x + u_y).$$

Usando los valores de u_x y u_y de la tabla, obtenemos la energía

$$\frac{k_2}{2}\left(\frac{u_x + u_y}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{k_2 a^2}{4}\,(e_{xx} + e_{yx} + e_{xy} + e_{yy})^2. \tag{39.44}$$

Para la energía total de todos los resortes en el plano xy, necesitamos la suma de ocho términos como (39.43) y (39.44). Llamando U_0 a esta energía obtenemos

$$\begin{aligned} U_0 = \frac{a^2}{2}\Big\{ & k_1 e_{xx}^2 + \frac{k_2}{2}\,(e_{xx} + e_{yx} + e_{xy} + e_{yy})^2 \\ & + k_1 e_{yy}^2 + \frac{k_2}{2}\,(e_{xx} - e_{yx} - e_{xy} + e_{yy})^2 \\ & + k_1 e_{xx}^2 + \frac{k_2}{2}\,(e_{xx} + e_{yx} + e_{xy} + e_{yy})^2 \\ & + k_1 e_{yy}^2 + \frac{k_2}{2}\,(e_{xx} - e_{yx} - e_{xy} + e_{yy})^2 \Big\}. \end{aligned} \tag{39.45}$$

Para obtener la energía total de todos los resortes unidos al átomo 1, debemos agregar algo a la energía dada por la ecuación (39.45). Aunque tengamos únicamente componentes x y y de la deformación específica, hay además cierta energía asociada con los segundos vecinos fuera del plano xy. Esta energía adicional es

$$k_2(e_{xx}^2 a^2 + e_{yy}^2 a^2). \tag{39.46}$$

Las constantes elásticas están relacionadas con la densidad de energía w por la ecuación (39.13). La energía que hemos calculado es la energía asociada con un átomo, o más bien, es *dos veces* la energía por átomo, pues se debe asignar la mitad de la energía de cada resorte a cada uno de los dos átomos que une. Como hay $1/a^3$ átomos por unidad de volumen, w y U_0 están relacionados por

$$w = \frac{U_0}{2a^3}.$$

Para hallar las constantes elásticas C_{ijkl}, sólo necesitamos desarrollar los cuadrados que aparecen en la ecuación (39.45) —agregando los términos de (39.46)— y comparar los coeficientes de $e_{ij}e_{kl}$ con los coeficientes correspondientes en la ecuación (39.13). Por ejemplo, reuniendo los términos con e_{xx}^2 y con e_{yy}^2, obtenemos el factor

$$(k_1 + 2k_2)a^2,$$

así que

$$C_{xxxx} = C_{yyyy} = \frac{k_1 + 2k_2}{a}.$$

Para los términos restantes hay una ligera complicación. Como no podemos distinguir el producto de dos términos como $e_{xx}e_{yy}$ de $e_{yy}e_{xx}$, el coeficiente de esos términos en nuestra expresión de la energía es igual a la suma de dos términos de la ecuación (39.13). El coeficiente de $e_{xx}e_{yy}$ en la ecuación (39.45) es $2k_2$, así que tenemos

$$(C_{xxyy} + C_{yyxx}) = \frac{2k_2}{a}.$$

Pero debido a la simetría de nuestro cristal, $C_{xxyy} = C_{yyxx}$, así que tenemos

$$C_{xxyy} = C_{yyxx} = \frac{k_2}{a}.$$

Por un proceso similar, también podemos obtener

$$C_{xyxy} = C_{yxyx} = \frac{k_2}{a}.$$

Finalmente, notarán que cualquier término que contenga x o y una sola vez es cero —como concluimos antes por argumentos de simetría—. Resumiendo nuestros resultados:

$$\begin{aligned} C_{xxxx} &= C_{yyyy} = \frac{k_1 + 2k_2}{a}, \\ C_{xyxy} &= C_{yxyx} = \frac{k_2}{a}, \\ C_{xxyy} &= C_{yyxx} = C_{xyyx} = C_{yxxy} = \frac{k_2}{a}, \\ C_{xxxy} &= C_{xyyy} = \text{etc.} = 0. \end{aligned} \tag{39.47}$$

Hemos podido relacionar las constantes elásticas de volumen con las propiedades atómicas que aparecen en las constantes k_1 y k_2. En nuestro caso particular, $C_{xyxy} = C_{xxyy}$. Resulta —como quizá puedan ver por la manera de hacer los cálculos— que estos términos *siempre* son iguales para un cristal cúbico, cualquiera que sea el número de términos de fuerza que se tome en cuenta, *siempre* que las fuerzas actúen solamente según la recta que une cada par de átomos —esto es, en tanto las fuerzas entre átomos sean como resortes y no tengan una parte lateral como la que hay en una viga voladiza (y que realmente hay en enlaces covalentes).

Podemos comprobar esta conclusión con las mediciones experimentales de las constantes elásticas. En la tabla 39-2 damos los valores observados de los tres coeficientes elásticos de varios cristales cúbicos.† Notarán que C_{xxyy} y C_{xyxy}, en general no son iguales. La razón es que en los metales como el sodio y el potasio las fuerzas interatómicas no están según la recta que une los átomos, como supusimos en nuestro modelo. El diamante tampoco obedece la ley, debido a que en el mismo las fuerzas son covalentes y tienen propiedades direccionales —los enlaces preferirían formar ángulos tetraédricos—. Los cristales iónicos como el fluoruro de litio, el cloruro de sodio, etc., tienen casi todas las propiedades físicas supuestas en nuestro modelo y la tabla demuestra que las constantes C_{xxyy} y C_{xyxy} son casi iguales. No está claro por qué el cloruro de plata no satisface la condición $C_{xxyy} = C_{xyxy}$.

Tabla 39-2

Módulos elásticos de cristales cúbicos en 10^{12} dinas · cm^{2*}

	C_{xxxx}	C_{xxyy}	C_{xyxy}
Na	0.055	0.042	0.049
K	0.046	0.037	0.026
Fe	2.37	1.41	1.16
Diamante	10.76	1.25	5.76
Al	1.08	0.62	0.28
LiF	1.19	0.54	0.53
NaCl	0.486	0.127	0.128
KCl	0.40	0.062	0.062
NaBr	0.33	0.13	0.13
KI	0.27	0.043	0.042
AgCl	0.60	0.36	0.062

* De: C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics*, 2ª ed., John Wiley and Sons, Inc., Nueva York, 1956, p. 93.

† En la literatura encontrarán que se usa una notación diferente. Por ejemplo, comúnmente se escribe $C_{xxxx} = C_{11}$, $C_{xxyy} = C_{12}$ y $C_{xyxy} = C_{44}$.

40

El flujo del agua seca

40-1 Hidrostática
40-2 Las ecuaciones de movimiento
40-3 Flujo estacionario; teorema de Bernoulli
40-4 Circulación
40-5 Líneas de vórtice

40-1 Hidrostática

El tema flujo de fluidos y particularmente del agua, fascina a todo el mundo. Todos podemos recordar cómo, siendo niños, jugábamos con esa cosa extraña en la bañera o en charcos fangosos. Ya mayores, observamos arroyos, cascadas y remolinos y quedamos fascinados por esta sustancia que parece casi viva en comparación con los sólidos. El comportamiento de los fluidos es en muchos aspectos altamente inesperado e interesante —es el tema de este capítulo y del siguiente—. El empeño de un niño tratando de represar una pequeña corriente de agua que corre por la calle y su asombro frente a la manera extraña en que el agua se vuelve a abrir camino, tiene su analogía en nuestras tentativas durante años para comprender el flujo de fluidos. Tratamos de represar el agua —en nuestro intelecto— obteniendo las leyes y ecuaciones que describen el flujo. Describiremos estas tentativas en este capítulo. En el capítulo siguiente, describiremos la manera singular en que el agua ha roto la represa y escapado a nuestras tentativas de comprenderla.

Suponemos que ya conocen las propiedades elementales del agua. La principal propiedad que distingue un fluido de un sólido es que un fluido no puede *mantener* un esfuerzo de corte durante ningún intervalo de tiempo. Si se aplica un esfuerzo de corte a un fluido, éste se moverá por efecto de dicho esfuerzo. Los líquidos espesos como la miel se mueven más lentamente que los fluidos como el aire o el agua. La medida de la facilidad con la que un fluido cede al esfuerzo es su viscosidad. En este capítulo consideraremos sólo situaciones en las que se puede ignorar los efectos de viscosidad, los cuales serán considerados en el capítulo siguiente.

Empezaremos considerando la *hidrostática*, dicho de otro modo, la teoría de líquidos en reposo. Cuando los líquidos están en reposo, no hay fuerzas de corte (aun en líquidos viscosos). Por lo tanto, la ley de la hidrostática es que los esfuerzos siempre son normales a cualquier superficie dentro del fluido. La fuerza normal por unidad de área se llama *presión*. El que no haya esfuerzo de corte en un fluido estático implica que el esfuerzo de la presión es el mismo en todas direcciones (figura 40-1). Dejaremos que se entretengan demostrando que si no hay esfuerzo de corte en ningún plano de un fluido, la presión debe ser la misma en cualquier dirección.

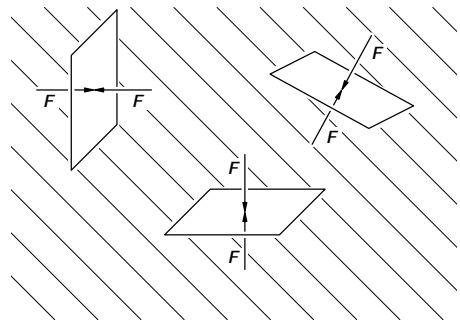


Figura 40-1. En un fluido estático la fuerza por unidad de área en cualquier superficie es normal a ésta y es la misma para cualquier orientación de la superficie.

La presión en un fluido puede variar de un lugar a otro. Por ejemplo, en un fluido estático en la superficie de la Tierra, la presión variará con la altura debido al peso del fluido. Si se considera constante la densidad ρ del fluido y si la presión en cualquier nivel arbitrario cero es p_0 (figura 40-2), la presión a una altura h por encima de este punto se escribe $p = p_0 - \rho gh$, donde g es la fuerza gravitacional por unidad de masa. La combinación

$$p + \rho gh$$

es, por tanto, una constante en el fluido estático. Esta relación nos es conocida, pero ahora derivaremos un resultado más general del que es un caso especial.

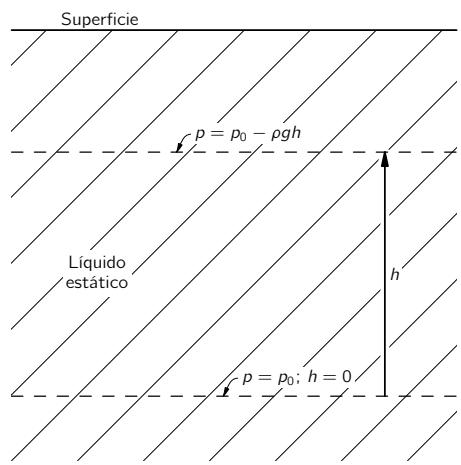


Figura 40-2. Presión en un líquido estático.

Si tomamos un cubo pequeño de agua, ¿cuál es la fuerza resultante sobre él debida a la presión? Como la presión en cualquier lugar es la misma en todas direcciones, puede haber una fuerza resultante por unidad de volumen solamente debido a que la presión varía de un punto a otro. Supongan que la presión está variando en la dirección x —y tomemos las direcciones de las

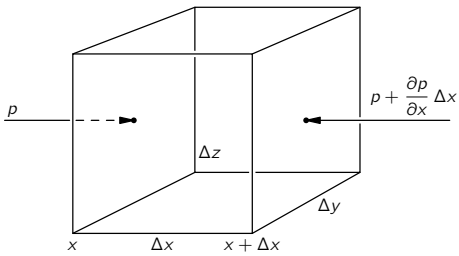


Figura 40-3. La fuerza de presión neta sobre un cubo es $-\boldsymbol{\nabla} p$ por unidad de volumen.

coordenadas paralelas a las aristas del cubo—. La presión sobre la cara en x da la fuerza $p\,\Delta y\,\Delta z$ (figura 40-3), y la presión sobre la cara en $x + \Delta x$ da la fuerza $-[p + (\partial p/\partial x)\,\Delta x]\,\Delta y\,\Delta z$, así que la fuerza resultante es $-(\partial p/\partial x)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$. Si tomamos los otros pares de caras del cubo, vemos fácilmente que la fuerza de presión por unidad de volumen es $-\boldsymbol{\nabla} p$. Si no hay otras fuerzas —como la gravedad— la presión se debe compensar para que haya equilibrio.

Tomemos una circunstancia en la que tales fuerzas adicionales pueden estar descritas por una energía potencial, como podría ser en el caso de la gravitación; representemos con ϕ la energía potencial por unidad de masa. (Por ejemplo, para la gravedad, ϕ es simplemente gz.) La fuerza por unidad de masa está dada en términos del potencial por $-\boldsymbol{\nabla}\phi$, y si ρ es la densidad del fluido, la fuerza por unidad de volumen es $-\rho\boldsymbol{\nabla}\phi$. Para que haya equilibrio, esta fuerza por unidad de volumen sumada a la fuerza de presión por unidad de volumen debe dar cero:

$$-\boldsymbol{\nabla} p - \rho\,\boldsymbol{\nabla}\phi = 0. \tag{40.1}$$

La ecuación (40.1) es la ecuación de la hidrostática. En *general*, *no tiene solución*. Si la densidad varía en el espacio en una forma arbitraria, no hay manera de que las fuerzas estén equilibradas y el fluido no puede estar en equilibrio estático. Se establecerán corrientes de convección. Podemos ver esto en la ecuación, ya que el término de presión es un gradiente puro, mientras que para ρ variable el otro término no lo es. Sólo cuando ρ es constante el término potencial es un gradiente puro. Entonces la ecuación tiene una solución

$$p + \rho\phi = \text{constante}.$$

Otra posibilidad que permite el equilibrio hidrostático es cuando ρ es función de p únicamente. Sin embargo, dejaremos el tema de la hidrostática porque está lejos de ser tan interesante como lo que ocurre cuando los fluidos están en movimiento.

40-2 Las ecuaciones de movimiento

Primero discutiremos movimientos de fluidos en una forma teórica puramente abstracta y luego consideraremos ejemplos especiales. Para describir el movimiento de fluidos, debemos dar sus propiedades en cada punto. Por ejemplo, en distintos lugares, el agua (llamemos "agua" al fluido) se está moviendo con *velocidades* diferentes. Por lo tanto, para especificar el carácter del flujo debemos dar las tres componentes de la velocidad en cada punto y para cualquier instante. Si podemos hallar las ecuaciones que determinan la velocidad, podremos saber cómo se mueve el líquido en todo instante. Pero la velocidad no es la única propiedad del fluido que varía de un punto a otro. Acabamos de discutir la variación de la *presión* de un punto a otro. Y hay aún otras variables. También puede haber una variación de *densidad* de un punto a otro. Además, el fluido podría ser un conductor y conducir una *corriente* eléctrica cuya densidad $\boldsymbol{j}$ tiene módulo y dirección que varían de un punto a otro. Puede haber una *temperatura* que varía de un punto a otro, o un *campo magnético*, etc. Así, el número de campos necesarios para describir la situación completa depende de lo complicado que sea el problema. Hay fenómenos interesantes cuando las corrientes y el magnetismo desempeñan un papel importante en la determinación del comportamiento del fluido; el tema se llama *magnetohidrodinámica* y está siendo objeto de gran atención en la actualidad. Sin embargo, no vamos a considerar estas situaciones difíciles debido a que ya hay fenómenos interesantes a un bajo nivel de complejidad y aún el nivel más elemental será suficientemente complicado.

Consideraremos la situación donde no hay campo magnético ni conductividad y no nos preocuparemos de la temperatura debido a que supondremos que la densidad y la presión determinan de manera única la temperatura en cualquier punto. De hecho, reduciremos la complejidad de nuestro trabajo suponiendo que la densidad es constante —imaginamos que el fluido es esencialmente incompresible—. Dicho de otra manera, estamos suponiendo que las variaciones de presión son tan pequeñas que las variaciones de densidad producidas por ellas

son despreciables. Si éste no es el caso, encontraremos fenómenos adicionales a los que hemos estado discutiendo aquí —por ejemplo, la propagación del sonido y de ondas de choque—. Ya hemos discutido la propagación del sonido y de ondas de choque con cierta extensión, así que ahora aislaremos de estos otros fenómenos nuestra consideración de la hidrodinámica, haciendo la aproximación de que la densidad ρ es una constante. Es fácil determinar cuando la aproximación constante ρ es buena. Podemos decir que si las velocidades de flujo son mucho menores que la velocidad de una onda sonora en el fluido, no tenemos que preocuparnos de variaciones en la densidad. El hecho de que el agua eluda nuestras tentativas de comprenderla no está relacionado con la aproximación de densidad constante. Las complicaciones que permiten que el agua eluda nuestra comprensión serán discutidas en el siguiente capítulo.

En la teoría general de fluidos se debe empezar con una *ecuación de estado* para el fluido, que conecte la presión con la densidad. En nuestra aproximación, esta ecuación de estado es simplemente

$$\rho = \text{constante}.$$

Ésta es entonces la primera relación entre nuestras variables. La relación siguiente expresa la conservación de la materia —si la materia fluye hacia afuera desde un punto, debe haber una disminución de la que queda—. Si la velocidad del fluido es $\boldsymbol{v}$, la masa que fluye por unidad de tiempo a través de un área unitaria de superficie es la componente de $\rho\boldsymbol{v}$ normal a la superficie. Hemos tenido una relación parecida en electricidad. También sabemos por la electricidad que la divergencia de tal cantidad da la disminución de la densidad por unidad de tiempo. Análogamente, la ecuación

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = -\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{40.2}$$

expresa la conservación de la masa en un fluido; es la *ecuación de continuidad* de la hidrodinámica. En nuestra aproximación, que es la aproximación de fluido incompresible, ρ es constante y la ecuación de continuidad es simplemente

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0. \tag{40.3}$$

La velocidad del fluido $\boldsymbol{v}$ —como el campo magnético $\boldsymbol{B}$— tiene divergencia nula. (A menudo las ecuaciones hidrodinámicas son muy análogas a las ecuaciones electrodinámicas; por esto estudiamos primero la electrodinámica. Hay quienes sostienen lo contrario; piensan que se debería estudiar primero la hidrodinámica para que sea más fácil comprender la electricidad después. Pero realmente la electrodinámica es mucho más fácil que la hidrodinámica.)

Obtendremos nuestra próxima ecuación de las leyes de Newton, que nos dicen cómo varía la velocidad debido a las fuerzas. La masa de un elemento de volumen del fluido por su aceleración debe ser igual a la fuerza sobre el elemento. Tomando un elemento de volumen unitario y llamando $\boldsymbol{f}$ a la fuerza por unidad de volumen, tenemos

$$\rho\times(\text{aceleración}) = \boldsymbol{f}.$$

Escribiremos la densidad de fuerza como la suma de tres términos. Ya hemos considerado la fuerza de presión por unidad de volumen, $-\boldsymbol{\nabla}p$. Luego están las fuerzas "externas" que actúan a distancia —como la gravedad o la electricidad—. Cuando hay fuerzas conservativas con un potencial ϕ por unidad de masa, dan una densidad de fuerza $-\rho\boldsymbol{\nabla}\phi$. (Si las fuerzas externas no fueran conservativas, tendríamos que escribir $\boldsymbol{f}_{\text{ext}}$ para la fuerza externa por unidad de volumen.) Luego hay otra fuerza "interna" por unidad de volumen, que se debe a que en un fluido que *fluye* también puede haber un esfuerzo de corte. Ésta se llama fuerza de viscosidad, que escribiremos $\boldsymbol{f}_{\text{visc}}$. Nuestra ecuación de movimiento es

$$\rho\times(\text{aceleración}) = -\boldsymbol{\nabla}p - \rho\,\boldsymbol{\nabla}\phi + \boldsymbol{f}_{\text{visc}}. \tag{40.4}$$

En este capítulo supondremos que el líquido es "delgado" en el sentido de que la viscosidad no es importante, así que omitiremos $\boldsymbol{f}_{\text{visc}}$. Al eliminar los

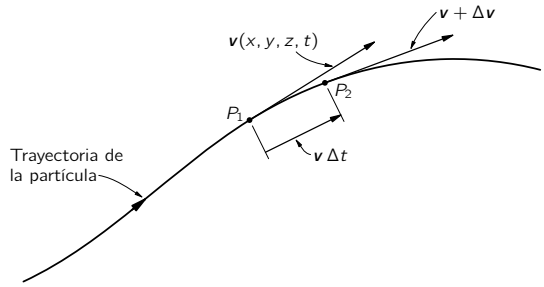


Figura 40-4. La aceleración de una partícula en el fluido.

términos de viscosidad, estamos haciendo una aproximación que describe cierta materia ideal en lugar del agua real. John von Neumann estaba perfectamente consciente de la gran diferencia entre lo que sucede cuando no se tienen los términos de viscosidad y cuando sí se tienen, y también estaba consciente de que durante la mayor parte del desarrollo de la hidrodinámica hasta alrededor de 1900, casi todo el interés estuvo en resolver bonitos problemas *matemáticos* con esta aproximación que no tiene casi nada que ver con los fluidos reales. Caracterizó al teórico que hacía tales análisis como un hombre que estudiaba el "agua seca". Tales análisis dejan de lado una propiedad *esencial* del fluido. Y puesto que estamos dejando de lado esta propiedad en nuestros cálculos en este capítulo, hemos dado el título de "El flujo del agua seca". Estamos posponiendo la discusión del agua *real* para el próximo capítulo.

Si eliminamos $\boldsymbol{f}_{\text{visc}}$, tenemos en la ecuación (40.4) todo lo que necesitamos excepto una expresión para la aceleración. Se podría pensar que la fórmula para la aceleración de una partícula del fluido es muy sencilla, ya que parece evidente que si $\boldsymbol{v}$ es la velocidad de una partícula del fluido en algún lugar del mismo, la aceleración sería simplemente $\partial\boldsymbol{v}/\partial t$. *No lo es* —y por una razón bastante sutil—. La derivada $\partial\boldsymbol{v}/\partial t$ es la rapidez con que la velocidad $\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$ varía en un *punto fijo* del espacio. Lo que necesitamos es la rapidez con que varía la velocidad de un *pedazo particular* del fluido. Imaginen que marcamos una de las gotas de agua con una mancha coloreada de modo que podamos observarla. En un intervalo de tiempo pequeño Δt, esta gota se moverá a una posición diferente. Si la gota se está moviendo según cierta trayectoria, como muestra la figura 40-4, durante Δt se podría mover desde P_1 hasta P_2. En realidad, se moverá en la dirección x una cantidad $v_x\Delta t$, en la dirección y, la cantidad $v_y\Delta t$, y en la dirección z la cantidad $v_z\Delta t$. Si $\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$ es la velocidad de la partícula del fluido que está en (x,y,z) en el instante t, la velocidad de la *misma* partícula en el instante $t+\Delta t$ está dada por $\boldsymbol{v}(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, t+\Delta t)$, con

$$\Delta x = v_x\,\Delta t, \qquad \Delta y = v_y\,\Delta t \qquad \text{y} \qquad \Delta z = v_z\,\Delta t.$$

Según la definición de las derivadas parciales —recuerden la ecuación (2.7)— tenemos, en primer orden, que

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&(x+v_x\,\Delta t, y+v_y\,\Delta t, z+v_z\,\Delta t, t+\Delta t)\\ &= \boldsymbol{v}(x,y,z,t) + \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\,v_x\,\Delta t + \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial y}\,v_y\,\Delta t + \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z}\,v_z\,\Delta t + \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}\,\Delta t.\end{aligned}$$

La aceleración $\Delta\boldsymbol{v}/\Delta t$ es

$$v_x\,\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x} + v_y\,\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial y} + v_z\,\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z} + \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}.$$

Podemos escribir esto simbólicamente —tratando $\boldsymbol{\nabla}$ como un vector— como

$$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} + \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}. \tag{40.5}$$

Noten que puede haber una aceleración aunque $\partial\boldsymbol{v}/\partial t = 0$, de modo que la velocidad *en un punto dado* no esté variando. Por ejemplo, el agua que fluye

en círculo a una velocidad constante se está acelerando aunque la velocidad en un punto dado no esté cambiando. Por supuesto, la razón es que la velocidad de una porción particular de agua que está inicialmente en un punto sobre el círculo tiene una dirección diferente un momento después; hay una aceleración centrípeta.

El resto de nuestra teoría es sólo matemática —encontrar soluciones de la ecuación de movimiento que se obtiene introduciendo la aceleración de (40.5) en la ecuación (40.4)—. Obtenemos

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = -\frac{\boldsymbol{\nabla} p}{\rho} - \boldsymbol{\nabla}\phi, \tag{40.6}$$

donde se ha omitido la viscosidad. Podemos escribir esta ecuación en otra forma usando la siguiente identidad de análisis vectorial:

$$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{v} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}).$$

Si *definimos* un nuevo *campo vectorial* $\boldsymbol{\Omega}$ como el rotacional de $\boldsymbol{v}$,

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}, \tag{40.7}$$

se puede escribir la identidad vectorial en la forma

$$(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\nabla}v^2,$$

y nuestra ecuación de movimiento (40.6) se transforma en

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\nabla}v^2 = -\frac{\boldsymbol{\nabla} p}{\rho} - \boldsymbol{\nabla}\phi. \tag{40.8}$$

Pueden comprobar que las ecuaciones (40.6) y (40.8) son equivalentes verificando que las componentes de los dos miembros son iguales —y haciendo uso de (40.7)—.

El campo vectorial $\boldsymbol{\Omega}$ se llama *vorticidad*. Si la vorticidad es cero en cualquier lugar, decimos que el flujo es *irrotacional*. Ya definimos en la sección 3-5 algo llamado *circulación* de un campo vectorial. La circulación a lo largo de cualquier camino cerrado en un fluido es la integral de línea de la velocidad del fluido, en un momento dado, alrededor de ese camino:

$$(\text{Circulación}) = \oint \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s}.$$

La circulación *por unidad de área* para un camino infinitesimal es entonces —usando el teorema de Stokes— igual a $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}$. Así, la vorticidad $\boldsymbol{\Omega}$ es la circulación alrededor de un área unitaria (perpendicular a la dirección de $\boldsymbol{\Omega}$). También se deduce que si ponen una pequeña impureza —*no* un punto infinitesimal— en cualquier lugar del líquido, rotará con velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}/2$. Traten de ver si pueden demostrarlo. También pueden comprobar que para un balde de agua en una mesa giratoria, $\boldsymbol{\Omega}$ es igual al doble de la velocidad angular local del agua.

Si estamos interesados únicamente en el campo de velocidades, es posible eliminar la presión de nuestras ecuaciones. Tomando el rotacional de ambos miembros de la ecuación (40.8), recordando que ρ es constante y que el rotor de cualquier gradiente es cero, y usando la ecuación (40.3), obtenemos

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}) = 0. \tag{40.9}$$

Esta ecuación, junto con las ecuaciones

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v} \tag{40.10}$$

y

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0, \tag{40.11}$$

describe completamente el campo de velocidades $\boldsymbol{v}$. Matemáticamente hablando, si conocemos $\boldsymbol{\Omega}$ en cierto instante, tenemos el rotacional del vector velocidad

y también sabemos que su divergencia es cero, así que dada la situación física tenemos todo lo que necesitamos para determinar $\boldsymbol{v}$ en cualquier lugar. (Es como en el magnetismo donde teníamos $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0$ y $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{j}/\epsilon_0 c^2$.) Entonces, una $\boldsymbol{\Omega}$ dada determina $\boldsymbol{v}$ como una $\boldsymbol{j}$ dada determina $\boldsymbol{B}$. Luego, conociendo $\boldsymbol{v}$, la ecuación (40.9) da la derivada de $\boldsymbol{\Omega}$ respecto al tiempo, de la que podemos obtener la nueva $\boldsymbol{\Omega}$ para el instante siguiente. Volviendo a usar la ecuación (40.10), hallamos la nueva $\boldsymbol{v}$, y así sucesivamente. Ven cómo estas ecuaciones contienen todo el mecanismo para calcular el flujo. Noten, sin embargo, que este procedimiento da la velocidad del campo solamente; hemos perdido toda información sobre la presión.

Señalemos una consecuencia especial de nuestra ecuación. Si $\boldsymbol{\Omega}=0$ en cualquier lugar y en cualquier instante t, entonces $\partial\boldsymbol{\Omega}/\partial t$ también es cero, así que $\boldsymbol{\Omega}$ es cero en cualquier lugar en $t+\Delta t$. Por lo que tenemos una solución de la ecuación; el flujo es permanentemente irrotacional. Si un flujo empieza con una rotación cero, podría tener siempre rotación cero. Las ecuaciones a resolver son entonces

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=0,\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}=0.$$

Son precisamente como las ecuaciones para los campos electrostático y magnetostático en el espacio libre. Más tarde volveremos a ellas y observaremos algunos problemas especiales.

40-3 Flujo estacionario; teorema de Bernoulli

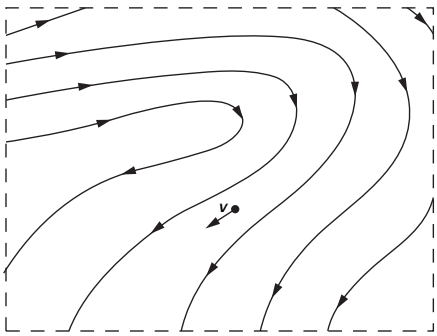


Figura 40-5. Líneas de corriente en un fluido con flujo estacionario.

Volvamos ahora a la ecuación de movimiento (40.8), pero limitándonos a situaciones en que el flujo es "estacionario". Por flujo estacionario entendemos que en cualquier punto del fluido la velocidad nunca varía. El fluido en cualquier punto siempre es remplazado por nuevo fluido que se mueve exactamente en la misma forma. La distribución de velocidades es siempre igual —$\boldsymbol{v}$ es un campo vectorial estático—. Del mismo modo como representamos "líneas de campo" en la magnetostática, ahora podemos dibujar líneas que siempre son tangentes a la velocidad del fluido, como muestra la figura 40-5. Estas líneas se llaman *líneas de corriente*. En el flujo estacionario son evidentemente las trayectorias reales de las partículas del fluido. (En el flujo no estacionario el diagrama de líneas de corriente varía con el tiempo y en cualquier instante no representa la trayectoria de partícula alguna del fluido.)

Un flujo estacionario no significa que no esté sucediendo nada —los átomos del fluido están en movimiento y cambiando sus velocidades—. Sólo significa que $\partial\boldsymbol{v}/\partial t=0$. Luego, si tomamos el producto punto de $\boldsymbol{v}$ en la ecuación de movimiento, el término $\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v})$ se elimina y nos queda

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\left\{\frac{p}{\rho}+\phi+\frac{1}{2}v^2\right\}=0. \tag{40.12}$$

Esta ecuación dice que *para un desplazamiento pequeño en la dirección de la velocidad del fluido* la cantidad entre los corchetes no cambia. Ahora bien, en un flujo estacionario todos los desplazamientos son a lo largo de las líneas de corriente, así que la ecuación (40.12) nos dice que *para todos los puntos a lo largo de una línea de corriente*, podemos escribir

$$\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}v^2+\phi=\text{constante (línea de corriente)}. \tag{40.13}$$

Éste es el *teorema de Bernoulli*. En general, la constante puede ser diferente para distintas líneas de corriente; todo lo que sabemos es que el primer miembro de la ecuación (40.13) es el mismo a todo lo largo de una *línea de corriente dada*. A propósito, notemos que para un movimiento *irrotacional* estacionario para el cual $\boldsymbol{\Omega}=0$, la ecuación de movimiento (40.8) nos da la relación

$$\boldsymbol{\nabla}\left\{\frac{p}{\rho}+\frac{1}{2}v^2+\phi\right\}=0,$$

de modo que

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\,v^2 + \phi = \text{constante (en todas partes)}. \tag{40.14}$$

Es precisamente como la ecuación (40.13) *excepto* que *ahora* la constante tiene el *mismo valor en todo el fluido.*

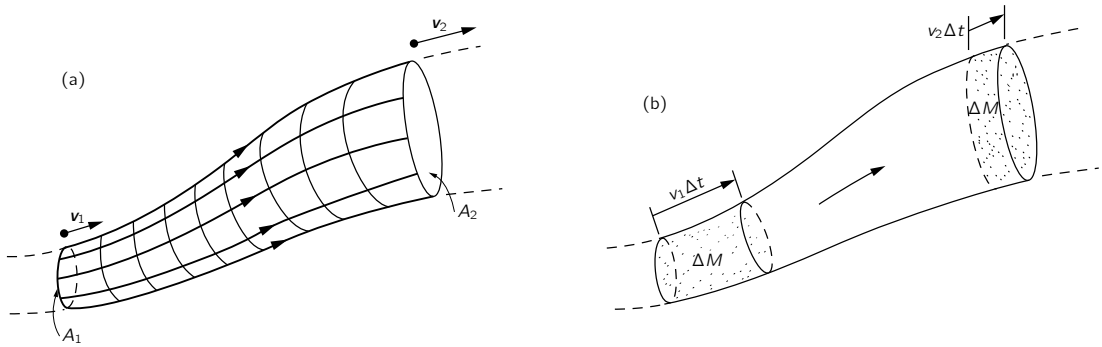


Figura 40-6. Movimiento de un fluido en un tubo de flujo.

El teorema de Bernoulli no es en esencia nada más que una manifestación de la conservación de la energía. Un teorema de conservación como éste nos da mucha información sobre un flujo sin tener que resolver de hecho las ecuaciones detalladas. El teorema de Bernouilli es tan importante y tan sencillo que nos gustaría demostrarles cómo se puede deducir en una forma diferente de los cálculos formales que hemos estado empleando. Imaginen un haz de líneas de corriente adyacentes que formen un tubo de flujo como el esquema de la figura 40-6. Como las paredes del tubo están hechas de líneas de corriente, ningún fluido fluirá a través de las mismas. Llamemos A_1 al área del tubo de corriente en un extremo, v_1 a la velocidad del fluido allí, ρ_1 a la densidad del fluido y ϕ_1 a la energía potencial. En el otro extremo del tubo tenemos las cantidades correspondientes A_2, v_2, ρ_2 y ϕ_2. Ahora bien, después de un corto intervalo de tiempo Δt, el fluido que estaba en A_1 se ha movido una distancia $v_1\Delta t$ y el fluido en A_2 se ha movido una distancia $v_2\Delta t$ [figura 40-6(b)]. Por lo que la conservación de *masa* exige que la masa que entra a través de A_1 sea igual a la masa que sale a través de A_2. Estas masas en estos dos extremos deben ser iguales:

$$\Delta M = \rho_1 A_1 v_1\,\Delta t = \rho_2 A_2 v_2\,\Delta t.$$

Así, tenemos la igualdad

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2. \tag{40.15}$$

Esta ecuación nos dice que la velocidad varía inversamente al área del tubo de corriente si ρ es constante.

Calculemos ahora el trabajo realizado por la presión del fluido. El trabajo realizado sobre el fluido que entra por A_1 es $p_1A_1v_1\Delta t$ y el entregado en A_2 es $p_2A_2v_2\Delta t$. El trabajo total realizado por el fluido entre A_1 y A_2 es, por lo tanto,

$$p_1 A_1 v_1\,\Delta t - p_2 A_2 v_2\,\Delta t,$$

que debe ser igual al aumento de energía de una masa ΔM del fluido cuando va desde A_1 hasta A_2. En otras palabras,

$$p_1 A_1 v_1\,\Delta t - p_2 A_2 v_2\,\Delta t = \Delta M(E_2 - E_1), \tag{40.16}$$

donde E_1 es la energía por unidad de masa del fluido en A_1, y E_2 es la energía por unidad de masa en A_2. Se puede escribir la energía por unidad de masa del fluido en la forma

$$E = \tfrac{1}{2}v^2 + \phi + U,$$

donde $\frac{1}{2}v^2$ es la energía cinética por unidad de masa, ϕ es la energía potencial por unidad de masa y, además, U es un término adicional que representa la energía interna por unidad de masa del fluido. La energía interna puede corresponder, por ejemplo, a la energía térmica de un fluido compresible, o a la energía química. Todas estas cantidades pueden variar de un punto a otro. Usando esta forma para las energías que aparecen en (40.16), tenemos

$$\frac{p_1 A_1 v_1\,\Delta t}{\Delta M} - \frac{p_2 A_2 v_2\,\Delta t}{\Delta M} = \frac{1}{2}\,v_2^2 + \phi_2 + U_2 - \frac{1}{2}\,v_1^2 - \phi_1 - U_1.$$

Pero hemos visto que $\Delta M = \rho A v \Delta t$, así que obtenemos

$$\frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2}\,v_1^2 + \phi_1 + U_1 = \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2}\,v_2^2 + \phi_2 + U_2, \tag{40.17}$$

que es el resultado de Bernoulli con un término adicional para la energía interna. Si el fluido es incompresible, el término de energía interna es el mismo en ambos miembros y obtenemos otra vez que la ecuación (40.14) es válida a lo largo de cualquier línea de corriente.

Consideremos ahora algunos ejemplos simples en los que la integral de Bernoulli nos da una descripción del flujo. Supongan que tenemos agua que está fluyendo de un agujero cerca del fondo de un tanque, como muestra la figura 40-7. Tomemos una situación en la que la velocidad del flujo v_{sal} en el agujero es mucho mayor que la velocidad del flujo cerca de la parte superior del tanque; en otras palabras, imaginemos que el diámetro del tanque es tan grande que podemos despreciar el descenso del nivel del líquido. (Podríamos hacer cálculos más exactos si quisiéramos.) En la parte superior del tanque, la presión es p_0, la presión atmosférica, y la presión a los lados del chorro también es p_0. Escribamos ahora nuestra ecuación de Bernoulli para una línea de corriente, como la que muestra la figura. En la parte superior del tanque tenemos que v es igual a cero y también que el potencial gravitacional ϕ es cero. En el agujero la velocidad es v_{sal} y $\phi = -gh$, de modo que

$$p_0 = p_0 + \tfrac{1}{2}\rho v_{\text{sal}}^2 - \rho g h,$$

o sea

$$v_{\text{sal}} = \sqrt{2gh}. \tag{40.18}$$

Esta velocidad es precisamente la que hemos obtenido para algo que cae la distancia h. Esto no es muy sorprendente, puesto que el agua gana energía

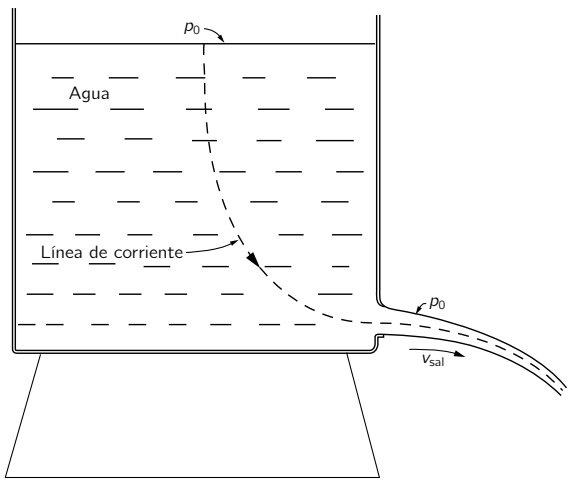


Figura 40-7. Flujo de un tanque.

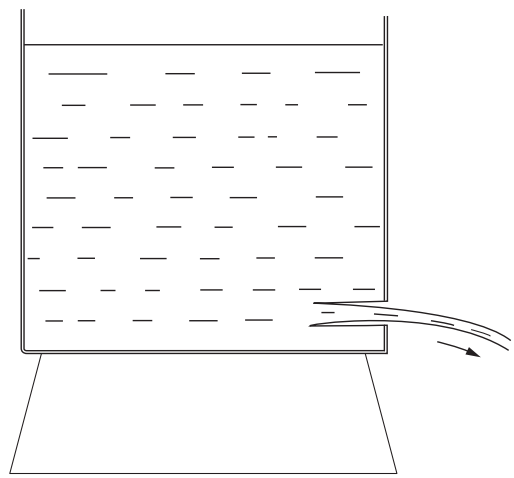


Figura 40-8. Con un tubo de descarga reentrante, el flujo se contrae a la mitad del área de la abertura.

cinética en la salida a expensas de la energía potencial del agua de la parte superior del tanque. Sin embargo, no crean que pueden calcular la velocidad con que el fluido sale del tanque multiplicando esta velocidad por la sección del agujero. Las velocidades del fluido en el chorro que abandona el agujero no son todas paralelas entre sí, sino que tienen componentes dirigidas internamente hacia el centro del flujo —el chorro es convergente—. Después que el chorro ha recorrido un camino corto, no hay más contracción y las velocidades se vuelven paralelas. Así, el flujo total es la velocidad por el área *en ese punto*. De hecho, si tenemos una abertura de descarga en forma de agujero redondo con un borde afilado, el chorro se contrae al 62 % del área del agujero. El área efectiva reducida de la descarga varía para formas diferentes de tubos de descarga y las contracciones experimentales están disponibles en tablas de *coeficientes de descarga*.

Si el tubo de descarga es reentrante, como muestra la figura 40-8, se puede demostrar en una forma sumamente elegante que el coeficiente de descarga es exactamente 50 %. Sugeriremos cómo demostrarlo. Hemos usado la conservación de energía para obtener la velocidad, ecuación (40.18), pero también hay que considerar la conservación del momentum. Como hay un flujo hacia afuera de momentum en el chorro de descarga, debe haber una fuerza aplicada sobre la sección transversal del tubo de descarga. ¿De dónde proviene la fuerza? La fuerza debe provenir de la presión en las paredes. Mientras el agujero de descarga sea pequeño y esté lejos de las paredes, la velocidad del fluido cerca de las paredes del tanque será muy pequeña. Por lo tanto, la presión sobre cada cara es casi exactamente la presión estática en un fluido en reposo —según la ecuación (40.14)—. Luego, la presión estática en cualquier punto de la pared del tanque debe ser equilibrada por una presión igual en un punto situado en la pared opuesta, *excepto* en los puntos de la pared opuestos al tubo de descarga. Si calculamos el momentum que esta presión hace que se vierta por el chorro, podemos demostrar que el coeficiente de descarga es 1/2. No podemos usar este método para un agujero de descarga como el mostrado en la figura 40-7, sin embargo, porque el aumento de velocidad a lo largo de la pared cerca del área de descarga da una caída de presión que no estamos en condiciones de calcular.

Veamos otro ejemplo —un tubo horizontal de sección variable, como muestra la figura 40-9, con agua que entra por un extremo y sale por el otro—. La conservación de energía, o sea la fórmula de Bernoulli, dice que la presión es baja en la región estrecha, donde la velocidad es alta. Podemos demostrar fácilmente este efecto midiendo la presión en diferentes secciones transversales con pequeñas columnas verticales de agua anexadas al tubo de flujo por medio de agujeros suficientemente pequeños para que no afecten el flujo. Entonces se mide la presión por la altura del agua en estas columnas verticales. Se encuentra que la presión es menor en la región estrecha que a ambos lados. Si más allá del estrechamiento la sección vuelve al mismo valor que tenía antes del mismo, la presión sube otra vez. La fórmula de Bernoulli predice que la presión antes del estrechamiento debe ser igual a la que hay después, pero en realidad es apreciablemente menor. La razón de que nuestra predicción sea errada es que hemos despreciado las fuerzas de fricción debidas a la viscosidad, que ocasionan una pérdida de presión a lo largo del tubo. A pesar de esta caída de presión, la presión es definitivamente menor en el estrechamiento (debido a la mayor velocidad) que a ambos lados —como predijo Bernoulli—. La velocidad v_2 debe superar ciertamente a v_1 para que pase la misma cantidad de agua a través del tubo angosto. Así, el agua se acelera al ir de la parte ancha a la angosta. La fuerza que da esta aceleración proviene de la caída de la presión.

Podemos comprobar nuestros resultados con otra demostración simple. Supongan que tenemos un tanque con un tubo de descarga que lanza un chorro de agua hacia arriba como muestra la figura 40-10. Si la velocidad de descarga fuera exactamente $\sqrt{2gh}$, el agua de descarga alcanzaría un nivel igual a la superficie del agua en el tanque. Experimentalmente, es más bajo. Nuestra predicción es aproximadamente correcta, pero otra vez la fricción viscosa que no ha sido incluida en nuestra fórmula de conservación de la energía ha dado lugar a una pérdida de energía.

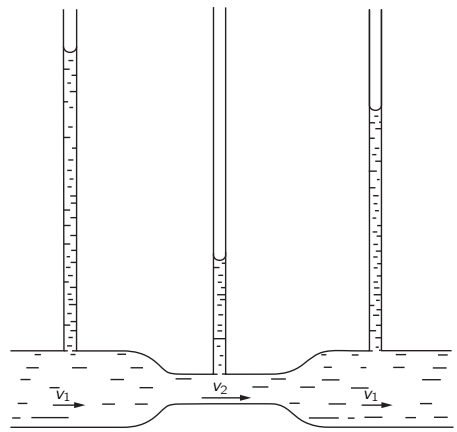


Figura 40-9. La presión es menor donde la velocidad es mayor.

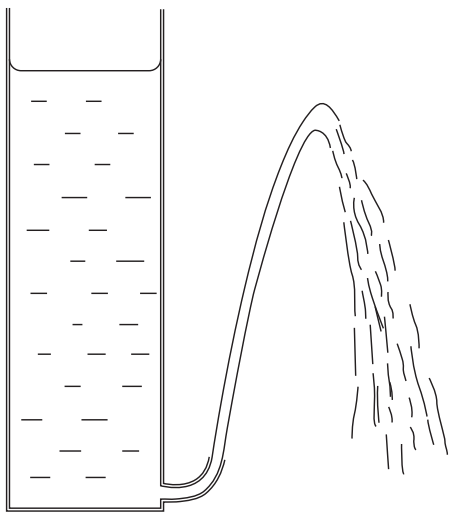


Figura 40-10. Demostración de que v no es igual a $\sqrt{2gh}$.

¿Han tenido dos pedazos de papel casi juntos y tratado de separarlos soplando? Traten. Se *juntan*. Por supuesto, la razón es que el aire tiene una velocidad mayor yendo por el espacio estrecho entre las hojas que yendo por afuera. La presión entre las hojas es *menor* que la presión atmosférica, de modo que se juntan en lugar de separarse.

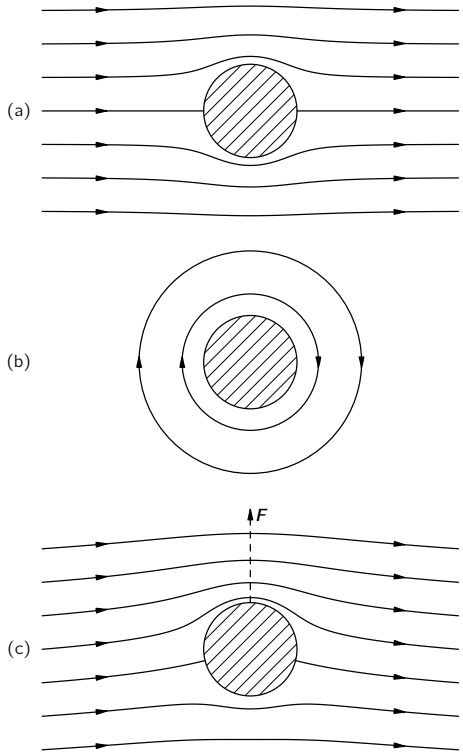


Figura 40-11. (a) Fluido ideal fluyendo en torno a un cilindro. (b) Circulación alrededor de un cilindro. (c) La superposición de (a) y (b).

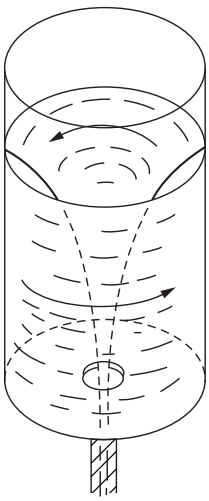


Figura 40-12. Agua con circulación saliendo de un tanque.

40-4 Circulación

Vimos al comienzo de la sección anterior que si tenemos un fluido incompresible sin circulación, el flujo satisface las dos ecuaciones siguientes:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=0, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}=0. \tag{40.19}$$

Son iguales a las ecuaciones de la electrostática o de la magnetostática en el espacio vacío. La divergencia del campo eléctrico es cero cuando no hay cargas y el rotacional del campo electrostático siempre es cero. El rotacional del campo magnetostático es cero si no hay corrientes y la divergencia del campo magnético siempre es cero. Por lo tanto, las ecuaciones (40.19) tienen la misma solución que las ecuaciones para $\boldsymbol{E}$ en electrostática o para $\boldsymbol{B}$ en magnetostática. A decir verdad, ya hemos resuelto en la sección 12-5 el problema del flujo de un fluido que pasa en torno a una esfera como una analogía electrostática. La analogía electrostática es un campo eléctrico uniforme más un campo dipolar. El campo dipolar se ajusta de modo que la velocidad de flujo normal a la superficie de la esfera sea cero. El mismo problema para el flujo transversal en torno a un cilindro se puede resolver de manera similar usando una línea dipolar conveniente con un campo de flujo uniforme. Esta solución es válida para una situación en la que la velocidad del fluido a grandes distancias es constante —tanto en módulo como en dirección—. La solución está representada en la figura 40-11(a).

Hay otra solución para el flujo en torno a un cilindro cuando las condiciones son tales que el fluido a grandes distancias se mueve en círculo alrededor del cilindro. Entonces el flujo es circular en cualquier parte, como en la figura 40-11(b). Tal flujo tiene una circulación alrededor del cilindro, aunque $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}$ sea aún cero *en el fluido*. ¿Cómo puede haber circulación sin rotacional? Tenemos una circulación alrededor del cilindro debido a que la integral de línea de $\boldsymbol{v}$ alrededor de cualquier lazo que *encierre* al cilindro no es cero. Al mismo tiempo, la integral de línea de $\boldsymbol{v}$ alrededor de cualquier trayectoria cerrada que *no* incluya al cilindro es cero. Vimos lo mismo cuando encontramos el campo magnético alrededor de un alambre. El rotacional de $\boldsymbol{B}$ era cero fuera del alambre, aunque la integral de línea de $\boldsymbol{B}$ alrededor de una trayectoria que encerraba el alambre no era cero. El campo de velocidad en una circulación irrotacional alrededor de un cilindro es precisamente lo mismo que el campo magnético alrededor del alambre. Para una trayectoria circular en torno al centro del cilindro, la integral de línea de la velocidad es

$$\oint \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{s}=2\pi r v.$$

En el flujo irrotacional la integral debe ser independiente de r. Llamando C al valor constante, tenemos que

$$v=\frac{C}{2\pi r}, \tag{40.20}$$

donde v es la velocidad tangencial y r es la distancia al eje.

Hay una bonita demostración de un fluido que circula alrededor de un agujero. Tomen un tanque cilíndrico transparente con un agujero de descarga en el centro del fondo. Llénenlo de agua, provoquen cierta circulación con un palo y quiten el tapón de la descarga. Obtienen el bonito efecto mostrado en la figura 40-12. (¡Han visto una cosa similar muchas veces en la bañera!) Aunque le pongan alguna ω al principio, pronto desaparece debido a la viscosidad y el flujo se vuelve irrotacional —aunque siempre con cierta circulación alrededor del agujero—.

Podemos calcular teóricamente la forma de la superficie interna del agua. A medida que una partícula de agua se mueve hacia el interior, adquiere velocidad.

Según la ecuación (40.20) la velocidad tangencial crece como $1/r$ —se debe simplemente a la conservación del momentum angular, como la patinadora que junta sus brazos. También la velocidad radial crece como $1/r$. Ignorando el movimiento tangencial, tenemos agua que va radialmente hacia un agujero; de $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=0$ se deduce que la velocidad radial es proporcional a $1/r$. De modo que la velocidad total también aumenta según $1/r$, y el agua va a lo largo de una espiral de Arquímedes. El empuje del aire en la superficie del agua está a presión atmosférica, así que —según la ecuación (40.14)— debemos tener la propiedad

$$gz+\tfrac{1}{2}v^2=\text{constante}.$$

Pero v es proporcional a $1/r$, así que la forma de la superficie es

$$(z-z_0)=\frac{k}{r^2}.$$

Un punto interesante —que *no es cierto en general*, pero es cierto para un flujo irrotacional incompresible— es que si tenemos una solución y una segunda solución, entonces la suma también es una solución. Esto es cierto debido a que las ecuaciones (40.19) son lineales. Las ecuaciones completas de la hidrodinámica, ecuaciones (40.9), (40.10) y (40.11), no son lineales, lo cual hace una diferencia enorme. Sin embargo, para un flujo irrotacional alrededor del cilindro podemos superponer el flujo de la figura 40-11(a) sobre el flujo de la figura 40-11(b) y obtener el nuevo diagrama de flujo mostrado en la figura 40-11(c). Este flujo tiene interés especial. La velocidad del flujo es mayor en la parte superior del cilindro que en la parte inferior. Las presiones son por lo tanto *menores* en la parte *superior* que en la parte inferior. Así, cuando tenemos una combinación de una circulación alrededor de un cilindro *y* un flujo horizontal resultante, hay una *fuerza vertical* resultante sobre el cilindro —se la llama *fuerza de elevación*—. Por supuesto, si no hay circulación, no hay fuerza resultante sobre ningún cuerpo, conforme a nuestra teoría del agua "seca".

40-5 Líneas de vórtice

Ya hemos escrito las ecuaciones generales del flujo de un fluido incompresible cuando puede haber vorticidad. Son

$$\text{I.}\quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=0,$$

$$\text{II.}\quad \boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v},$$

$$\text{III.}\quad \frac{\partial\boldsymbol{\Omega}}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v})=0.$$

El contenido físico de estas ecuaciones ha sido descrito por Helmholtz en función de tres teoremas. Primero, imaginen que dibujáramos en el fluido las *líneas de vórtice* en lugar de las líneas de corriente. Por líneas de vórtice entendemos líneas de campo que tienen la dirección de $\boldsymbol{\Omega}$ y una densidad en cualquier región proporcional al módulo de $\boldsymbol{\Omega}$. Según II, la divergencia de $\boldsymbol{\Omega}$ *siempre* es cero (recuerden —sección 3-7— que la divergencia de un rotacional siempre es cero). Así, las líneas de vórtice son como las líneas de $\boldsymbol{B}$ —nunca empiezan ni terminan y siempre tienden a ir en trayectorias cerradas—. Ahora bien, Helmholtz describió III en palabras con el siguiente enunciado: las líneas de vórtice se *mueven con el fluido*. Esto significa que si se hubiesen marcado las partículas de fluido a lo largo de algunas líneas de vórtice —coloreándolas con tinta, por ejemplo— entonces, como el fluido se mueve y arrastra estas partículas con él, ellas siempre indicarán las líneas de vórtice. Sea cual sea la forma en que los átomos del líquido se muevan, las líneas de vórtice se moverán con ellos. Ésta es una forma de describir las leyes.

También sugiere un método para resolver cualquier problema. Dado el diagrama inicial de flujo —digamos que $\boldsymbol{v}$ en todas partes— pueden calcular $\boldsymbol{\Omega}$. Conociendo $\boldsymbol{v}$ también pueden decir dónde estarán las líneas de vórtice un

momento después —se mueven con la velocidad $\boldsymbol{v}$—. Con la nueva $\boldsymbol{\Omega}$ pueden usar I y II para hallar la nueva $\boldsymbol{v}$. (Es como el problema de hallar $\boldsymbol{B}$ conociendo las corrientes.) Si damos el diagrama de flujo en un instante podemos en principio calcularlo para todos los tiempos posteriores. Tenemos la solución general para el flujo no viscoso.

Querríamos demostrar cómo se puede comprender, al menos parcialmente, el teorema de Helmholtz —y por lo tanto III—. Es realmente la ley de conservación del momentum angular aplicada a un fluido. Imaginen un pequeño cilindro de fluido cuyo eje es paralelo a las líneas de vórtice, como en la figura 40-13(a). Tiempo después, esta *misma* porción de fluido estará en algún otro lugar. Por lo general, ocupará un cilindro de diámetro diferente y estará en un lugar distinto. Además, también puede tener una orientación diferente, digamos que como en la figura 40-13(b). Pero si el diámetro ha disminuido como se muestra en la figura 40-13, la longitud habrá aumentado para mantener el volumen constante (puesto que estamos suponiendo un fluido incompresible). Como las líneas de vórtice están fijas al material, su densidad aumentará a medida que el área de la sección transversal disminuye. Así pues, el producto de la vorticidad $\boldsymbol{\Omega}$ y el área A del cilindro permanecerá constante; así que, de acuerdo a Helmholtz, tendríamos

$$\Omega_2 A_2 = \Omega_1 A_1. \tag{40.21}$$

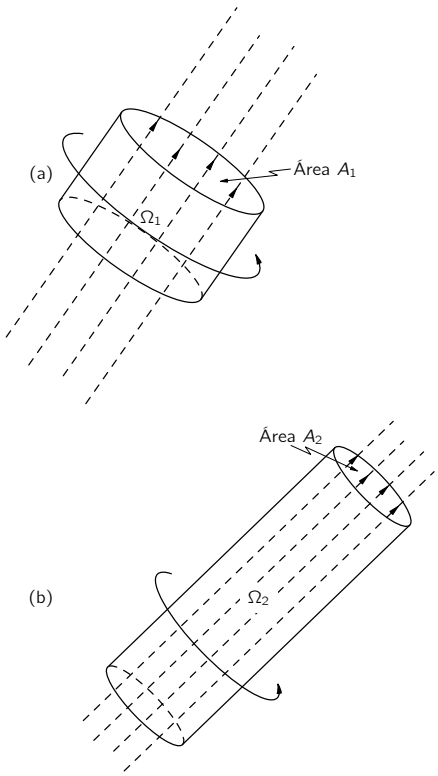


Figura 40-13. (a) Un grupo de líneas de vortice en t; (b) las mismas líneas en un instante posterior t'.

Observen ahora que con viscosidad cero todas las fuerzas sobre la superficie del volumen cilíndrico (o *cualquier* volumen, por cierto) son perpendiculares a la superficie. Las fuerzas de presión pueden hacer que el volumen se mueva de un lugar a otro, o pueden hacer que cambie de forma; pero sin fuerzas *tangenciales* el módulo del *momentum angular del material que hay dentro* no puede variar. El momentum angular del líquido contenido en el cilindro pequeño es su momento de inercia I por la velocidad angular del líquido, que es proporcional a la vorticidad Ω. Para un cilindro, el momento de inercia es proporcional a mr^2. Así, de la conservación del momentum angular concluiríamos que

$$(M_1 R_1^2)\Omega_1 = (M_2 R_2^2)\Omega_2.$$

Pero la masa es la misma, $M_1 = M_2$, y las áreas son proporcionales a R^2, así que otra vez obtenemos la ecuación (40.21). El enunciado de Helmholtz —que es equivalente a III— es una consecuencia de que no habiendo viscosidad el momentum angular de un elemento del fluido no puede cambiar.

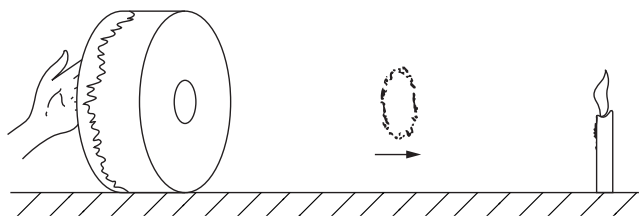


Figura 40-14. Haciendo un anillo de vórtice que viaja.

Hay una bonita demostración de un vórtice en movimiento que se hace con el aparato sencillo de la figura 40-14. Es un "tambor" de 60 cm de diámetro y 60 cm de alto hecho estirando una hoja gruesa de goma sobre el extremo abierto de una "caja" cilíndrica. El "fondo" —el tambor está colocado de lado— es sólido exceptuando que tiene un agujero de 7 u 8 cm. Si dan un golpe fuerte con la mano en el diafragma de goma se proyecta un anillo de vórtice por el agujero. Aunque el vórtice es invisible, pueden decir que "existe" porque sopla una vela situada a una distancia de 3 a 6 metros. Por lo que se tarda un poco en verse el efecto, podemos decir que "algo" está viajando a una velocidad finita. Podrán ver mejor lo que está sucediendo si primero echan un poco de humo dentro de la caja. Entonces ven el vórtice como un hermoso "anillo de humo".

El anillo de humo es un haz de líneas de vórtice en forma de toro, como muestra la figura 40-15(a). Como $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v}$, estas líneas de vórtice representan también

una circulación de $\boldsymbol{v}$ como muestra la parte (b) de la figura. Podemos entender el movimiento de avance del anillo en la siguiente forma: la velocidad circulante en la parte *inferior* del anillo se extiende a la parte superior, teniendo allí un movimiento de avance. Como las líneas de $\boldsymbol{\Omega}$ se mueven con el fluido, también se moverán hacia adelante con la velocidad $\boldsymbol{v}$. (Por supuesto, la circulación de $\boldsymbol{v}$ alrededor de la parte superior del anillo es responsable del movimiento de avance de las líneas de vórtice en la parte inferior.)

Ahora debemos mencionar una seria dificultad. Ya hemos notado que la ecuación (40.9) dice que si $\boldsymbol{\Omega}$ es inicialmente cero, sería siempre cero. Este resultado es un gran fracaso de la teoría del agua "seca", debido a que significa que una vez que $\boldsymbol{\Omega}$ es cero, *siempre* es cero —es imposible *producir* un vórtice en ninguna circunstancia—. Sin embargo, en nuestra demostración sencilla con el tambor, podemos generar un anillo de vórtice empezando con aire que inicialmente estaba en reposo. (Ciertamente, $\boldsymbol{v} = 0$ y $\boldsymbol{\Omega} = 0$ en cualquier parte dentro de la caja antes de golpearla.) Además, todos sabemos que podemos formar vorticidad en un lago con un remo. Evidentemente, tenemos que ir a una teoría del agua "mojada" para lograr una comprensión completa del comportamiento de un fluido.

Otra característica incorrecta de la teoría del agua seca es la suposición que hicimos en cuanto al flujo en la frontera entre ella y la superficie de un sólido. Cuando discutimos el flujo en torno a un cilindro —como en la figura 40-11, por ejemplo— permitimos que el fluido se deslizara sobre la superficie del sólido. En nuestra teoría, la velocidad en una superficie sólida podría tener cualquier valor dependiendo de cómo hubiese empezado y no consideramos cualquier "fricción" entre el fluido y el sólido. Es un hecho experimental, sin embargo, que la velocidad de un fluido real siempre tiende a cero en la superficie de un objeto sólido. Por tanto, nuestra solución para un cilindro, con o sin circulación, está equivocada —como también nuestro resultado en cuanto a la producción de vorticidad—. Les hablaremos de teorías más correctas en el capítulo siguiente.

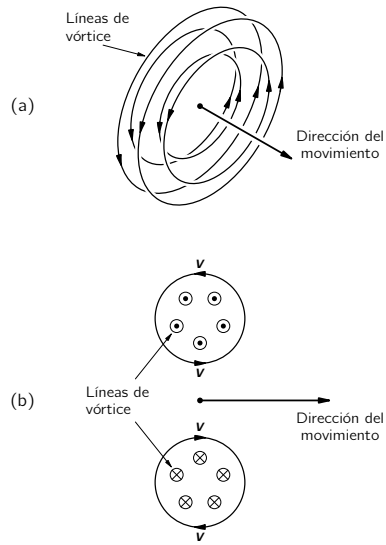


Figura 40-15. Un anillo de vórtice moviéndose (un anillo de humo). (a) Las líneas de vórtice. (b) Una sección transversal del anillo.

41

El flujo de agua mojada

41-1 Viscosidad
41-2 Flujo viscoso
41-3 El número de Reynolds
41-4 Flujo transversal en torno a un cilindro
41-5 El límite de viscosidad nula
41-6 Flujo de Couette

41-1 Viscosidad

En el capítulo anterior estudiamos el comportamiento del agua dejando de lado el fenómeno de viscosidad. Ahora querríamos estudiar los fenómenos del flujo de fluidos, *incluyendo* los efectos de la viscosidad. Además, queremos examinar el *comportamiento real* de los fluidos. Describiremos cualitativamente el comportamiento verdadero de los fluidos en diversas circunstancias para que tengan una idea del tema. Aunque verán algunas ecuaciones complicadas y oirán hablar de algunas cosas complicadas, nuestro propósito no es que aprendan todo eso. En cierto sentido, éste es un capítulo "cultural" que les dará una idea de cómo es el mundo. Hay una sola cosa que vale la pena aprender y es la definición simple de viscosidad de la que nos ocuparemos dentro de un momento. El resto es sólo para que se entretengan.

En el capítulo anterior encontramos que las leyes de movimiento de un fluido están contenidas en la ecuación

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = -\frac{\boldsymbol{\nabla}p}{\rho} - \boldsymbol{\nabla}\phi + \frac{\boldsymbol{f}_{\text{visc}}}{\rho}. \tag{41.1}$$

En la aproximación del agua "seca" omitimos el último término, así que hemos despreciado todo efecto de viscosidad. Además, hicimos a veces una aproximación adicional considerando que el fluido era incompresible; teníamos entonces una ecuación más

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0.$$

Esta última aproximación es a menudo bastante buena —especialmente cuando las velocidades de flujo son mucho menores que la velocidad del sonido—. Pero en los fluidos reales casi nunca es cierto que podamos despreciar la fricción interna que llamamos viscosidad; la mayoría de las cosas interesantes que ocurren provienen de ella en una u otra forma. Por ejemplo, vimos que en el agua "seca" la circulación nunca cambia —si no la hay al principio, no la habrá nunca—. No obstante, la circulación en fluidos es algo que ocurre todos los días. Tenemos que arreglar nuestra teoría.

Comencemos con un hecho experimental importante. Al calcular el flujo del agua "seca" que pasa alrededor o a través de un cilindro —el llamado "flujo potencial"— no había razón para no permitir que el agua tuviera una velocidad tangente a la superficie; sólo la componente normal tenía que ser cero. No tuvimos en cuenta la posibilidad de que pudiera haber una fuerza de corte entre el líquido y el sólido. Resulta que —aunque de ninguna manera es evidente por sí mismo— en toda circunstancia en que se ha hecho una verificación experimental, la *velocidad de un fluido es exactamente cero en la superficie de un sólido.* Sin duda habrán notado que las aspas de un ventilador acumulan una fina capa de polvo —y que sigue estando allí después que el ventilador ha estado agitando el aire—. Pueden ver el mismo efecto aún en el gran ventilador de un túnel de viento. ¿Por qué el aire no saca el polvo? Aunque las aspas del ventilador se estén moviendo a alta velocidad a través del aire, la velocidad del aire respecto a las aspas tiende a cero justo en la superficie. Por eso las partículas más pequeñas

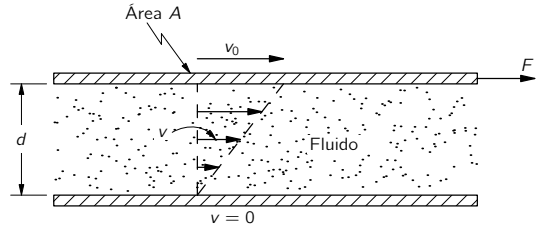


Figura 41-1. Arrastre viscoso entre dos placas paralelas.

de polvo no son perturbadas.* Tenemos que modificar la teoría para que esté acorde con el hecho experimental de que en todos los fluidos ordinarios las moléculas que están junto a la superficie de un sólido tienen velocidad cero (respecto a la superficie).†

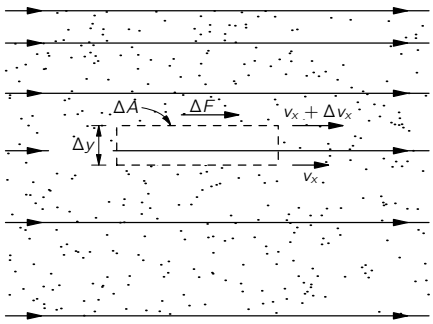


Figura 41-2. El esfuerzo de corte en un fluido viscoso.

Originalmente habíamos caracterizado un líquido por el hecho de que si se le aplica un esfuerzo de corte —por pequeño que se quiera— cede. Fluye. En situaciones estáticas no hay esfuerzos de corte. Pero antes de que se alcance el equilibrio —en tanto lo sigan empujando— puede haber fuerzas de corte. La *viscosidad* describe estas fuerzas de corte que existen en un fluido en movimiento. Para tener una medida de las fuerzas de corte durante el movimiento de un fluido, consideremos el siguiente tipo de experimento. Supongan que tenemos dos superficies sólidas planas con agua entre ellas, como en la figura 41-1, y mantenemos una quieta mientras movemos la otra paralelamente a ella a una velocidad baja v_0. Si miden la fuerza necesaria para mantener el movimiento de la placa superior, encuentran que es proporcional al área de las placas y a v_0/d, donde d es la distancia entre las placas. Entonces el esfuerzo de corte F/A es proporcional a v_0/d:

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{v_0}{d}.$$

La constante de proporcionalidad η se llama *coeficiente de viscosidad*.

Si tenemos una situación más complicada, siempre podemos considerar una pequeña celda rectangular y plana en el agua con sus caras paralelas al flujo, como en la figura 41-2. La fuerza de corte a través de esta celda está dada por

$$\frac{\Delta F}{\Delta A} = \eta \frac{\Delta v_x}{\Delta y} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y}. \tag{41.2}$$

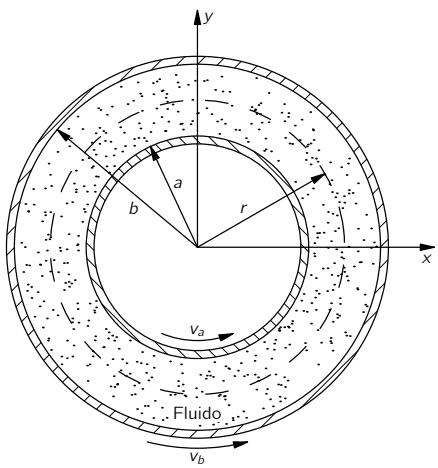


Figura 41-3. El flujo de un fluido entre dos cilindros concéntricos rotando con velocidades angulares diferentes.

Ahora bien, $\partial v_x/\partial y$ es la *derivada* de la deformación de corte definida en el capítulo 39, así que para un líquido, el esfuerzo de corte es proporcional a la *derivada* de la deformación de corte.

En el caso general escribimos

$$S_{xy} = \eta\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right). \tag{41.3}$$

Si hay una rotación uniforme del fluido, $\partial v_x/\partial y$ es menos $\partial v_y/\partial x$ y S_{xy} es cero —como debe ser, ya que no hay esfuerzos en un fluido que rota uniformemente—. (Hicimos algo similar al definir e_{xy} en el capítulo 39.) Por supuesto, están las expresiones correspondientes para S_{yz} y S_{zx}.

Como ejemplo de aplicación de estos conceptos, consideremos el movimiento de un fluido entre dos cilindros coaxiales. Sea a el radio del cilindro interno, b el del externo y v_a y v_b las correspondientes velocidades periféricas. Vean la figura 41-3. Podríamos preguntar, ¿cuál es la distribución de velocidades entre los cilindros? Para responder esta pregunta, comencemos por hallar una fórmula para el esfuerzo de corte por viscosidad en el fluido a una distancia r del eje. Por

* *Pueden* soplar partículas *grandes* de polvo de la superficie de una mesa, pero *no* las más pequeñas. Las grandes se pegan a la brisa.

† Pueden imaginar circunstancias donde no es cierto: el vidrio es teóricamente un "líquido", pero se le puede hacer deslizar sobre una superficie de acero. Así, nuestra suposición debe fallar en algún punto.

la simetría del problema, podemos suponer que el flujo siempre es tangencial y que su módulo depende únicamente de r; $v = v(r)$. Si observamos un punto en el agua a un radio r, sus coordenadas en función del tiempo son

$$x = r\cos\omega t, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\omega t,$$

donde $\omega = v/r$. Las componentes x y y de la velocidad son

$$v_x = -r\omega\,\mathrm{sen}\,\omega t = -\omega y \qquad \text{y} \qquad v_y = r\omega\cos\omega t = \omega x. \tag{41.4}$$

Según la ecuación (41.3) tenemos

$$S_{xy} = \eta\left[\frac{\partial}{\partial x}(x\omega) - \frac{\partial}{\partial y}(y\omega)\right] = \eta\left[x\,\frac{\partial\omega}{\partial x} - y\,\frac{\partial\omega}{\partial y}\right]. \tag{41.5}$$

Para un punto en $y = 0$, $\partial\omega/\partial y = 0$ y $x\,\partial\omega/\partial x$ es igual a $r\,d\omega/dr$. Por lo tanto, en ese punto

$$(S_{xy})_{y=0} = \eta r\,\frac{d\omega}{dr}. \tag{41.6}$$

(Es razonable que S dependa de $\partial\omega/\partial r$; cuando ω no varía con r, el líquido está en rotación uniforme y no hay esfuerzos.)

El esfuerzo que hemos calculado es el esfuerzo tangencial de corte que es el mismo alrededor de todo el cilindro. Podemos obtener el *torque* que actúa *a través de una superficie cilíndrica* de radio r multiplicando el esfuerzo de corte por el brazo de momento r y el área $2\pi rl$ (donde l es la longitud del cilindro). Obtenemos

$$\tau = 2\pi r^2 l(S_{xy})_{y=0} = 2\pi\eta l r^3\,\frac{d\omega}{dr}. \tag{41.7}$$

Como el movimiento del agua es estacionario —no hay aceleración angular— el torque resultante sobre la capa cilíndrica de agua entre r y $r + dr$ debe ser cero; es decir, que el torque en r tiene que estar equilibrado por un torque igual y opuesto en $r + dr$, de modo que τ tiene que ser independiente de r. En otras palabras, $r^3\,d\omega/dr$ es igual a una constante, A digamos, y

$$\frac{d\omega}{dr} = \frac{A}{r^3}. \tag{41.8}$$

Integrando tenemos que ω varía con r así

$$\omega = -\frac{A}{2r^2} + B. \tag{41.9}$$

Las constantes A y B se determinan por las condiciones $\omega = \omega_a$ en $r = a$, y $\omega = \omega_b$ en $r = b$. Obtenemos

$$\begin{aligned} A &= \frac{2a^2b^2}{b^2 - a^2}\,(\omega_b - \omega_a), \\ B &= \frac{b^2\omega_b - a^2\omega_a}{b^2 - a^2}. \end{aligned} \tag{41.10}$$

Así, conocemos ω en función de r y de ella $v = \omega r$.

Si queremos el torque, podemos obtenerlo de las ecuaciones (41.7) y (41.8):

$$\tau = 2\pi\eta l A$$

o sea

$$\tau = \frac{4\pi\eta l a^2 b^2}{b^2 - a^2}\,(\omega_b - \omega_a). \tag{41.11}$$

Es proporcional a la velocidad angular relativa de los cilindros. Uno de los aparatos comunes para medir coeficientes de viscosidad se construye de esta manera. Uno de los cilindros —digamos que el externo— está sobre pivotes, pero se lo mantiene en reposo mediante una balanza de resorte que mide el torque que

experimenta, mientras se rota el cilindro interno a velocidad angular constante. Luego se determina el coeficiente de viscosidad con la ecuación (41.11).

Según su definición, ven que las unidades de η son $\mathrm{N}\cdot\mathrm{s/m^2}$. Para el agua a 20°C,

$$\eta = 10^{-3}\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{s/m^2}.$$

Por lo común es conveniente usar la *viscosidad cinemática*, que es η dividida entre la densidad ρ. Los valores para el agua y el aire son entonces comparables:

$$\begin{aligned} &\text{agua a } 20^\circ\mathrm{C}, \qquad \eta/\rho = 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s},\\ &\text{aire a } 20^\circ\mathrm{C}, \qquad \eta/\rho = 15\times 10^{-6}\ \mathrm{m^2/s}. \end{aligned} \tag{41.12}$$

Generalmente las viscosidades dependen fuertemente de la temperatura. Por ejemplo, para el agua justo por encima del punto de congelación, η/ρ es 1.8 veces mayor que a 20°C.

41-2 Flujo viscoso

Pasemos ahora a la teoría general del flujo viscoso —por lo menos en la forma más general que conoce el hombre—. Ya comprendemos que las componentes del esfuerzo de corte son proporcionales a las derivadas espaciales de las diversas componentes de la velocidad como $\partial v_x/\partial y$ o $\partial v_y/\partial x$. Sin embargo, en el caso general de un fluido *compresible*, el esfuerzo contiene otro término que depende de otras derivadas de la velocidad. La expresión general es

$$S_{ij} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \eta'\,\delta_{ij}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}), \tag{41.13}$$

donde x_i es una de las componentes cartesianas x, y o z y v_i es una de las componentes cartesianas de la velocidad. (El símbolo δ_{ij} es la delta de Kronecker que es 1 si $i = j$ y 0 si $i \neq j$). El término adicional agrega $\eta'\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}$ a todos los elementos diagonales S_{ii} del tensor de esfuerzo. Si el líquido es incompresible, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v} = 0$ y este término adicional no aparece. Por lo tanto, tiene que ver con fuerzas internas durante la compresión. Así, se necesitan dos constantes para describir el líquido, como teníamos dos constantes para describir un sólido elástico homogéneo. El coeficiente η es el coeficiente de viscosidad "ordinario" con que ya nos hemos encontrado. También se lo llama *primer coeficiente de viscosidad* o "coeficiente de viscosidad de corte" y el nuevo coeficiente η' se llama *segundo coeficiente de viscosidad*.

Ahora queremos determinar la fuerza de viscosidad por unidad de volumen $\boldsymbol{f}_{\mathrm{visc}}$ para introducirla en la ecuación (41.1) y obtener la ecuación de movimiento de un fluido real. La fuerza sobre un pequeño elemento cúbico de volumen de un fluido es la resultante de las fuerzas sobre las seis caras. Tomándolas de dos en dos obtendremos diferencias que dependen de las derivadas de los esfuerzos y por lo tanto de las segundas derivadas de la velocidad. Esto es muy bueno porque nos llevará de vuelta a una ecuación vectorial. La componente de la fuerza de viscosidad por unidad de volumen en dirección de la componente cartesiana x_i es

$$\begin{aligned} (f_{\mathrm{visc}})_i &= \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j}\\ &= \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right\} + \frac{\partial}{\partial x_i}\,(\eta'\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}). \end{aligned} \tag{41.14}$$

Por lo común, la variación de los coeficientes de viscosidad con la posición es poca y se la puede despreciar. Luego, la fuerza de viscosidad por unidad de volumen sólo contiene segundas derivadas de la velocidad. Vimos en el capítulo 39 que la forma más general de segundas derivadas que puede aparecer en una ecuación vectorial es la suma de un término con un laplaciano ($\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} = \nabla^2\boldsymbol{v}$) y

un término con el gradiente de la divergencia ($\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v})$). La ecuación (41.14) es precisamente una suma de este tipo con los coeficientes η y $(\eta+\eta')$. Obtenemos

$$\boldsymbol{f}_{\text{visc}} = \eta\,\nabla^2\boldsymbol{v} + (\eta+\eta')\,\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}). \tag{41.15}$$

En el caso incompresible, $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}=0$, y la fuerza de viscosidad por unidad de volumen es simplemente $\eta\nabla^2\boldsymbol{v}$. Ésta es la que muchos usan; sin embargo, si quisieran calcular la absorción de sonido en un fluido, necesitarían el segundo término.

Ahora podemos completar la ecuación general de movimiento para un fluido real. Sustituyendo la ecuación (41.15) en la ecuación (41.1) obtenemos

$$\rho\left\{\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v}\right\} = -\boldsymbol{\nabla}p-\rho\,\boldsymbol{\nabla}\phi+\eta\,\nabla^2\boldsymbol{v}+(\eta+\eta')\,\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}).$$

Es complicada; pero la naturaleza es así.

Si como antes, introducimos la vorticidad $\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v}$, podemos escribir la ecuación en la forma

$$\rho\left\{\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}+\frac{1}{2}\,\boldsymbol{\nabla}v^2\right\} = -\boldsymbol{\nabla}p-\rho\,\boldsymbol{\nabla}\phi+\eta\,\nabla^2\boldsymbol{v} + (\eta+\eta')\,\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{v}). \tag{41.16}$$

De nuevo estamos suponiendo que las únicas fuerzas de masa que actúan son fuerzas conservativas, como la gravedad. Para ver lo que significa el nuevo término, examinemos el caso de un fluido incompresible. Entonces, si tomamos el rotacional de la ecuación (41.16), obtenemos

$$\frac{\partial\boldsymbol{\Omega}}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}) = \frac{\eta}{\rho}\,\nabla^2\boldsymbol{\Omega}. \tag{41.17}$$

Esta ecuación es como la (40.9) excepto por el nuevo término del segundo miembro. Cuando el segundo miembro era cero, teníamos el teorema de Helmholtz de acuerdo el cual la vorticidad acompaña al fluido. Ahora tenemos en el segundo miembro el término no nulo y bastante complicado, el cual, sin embargo, tiene consecuencias físicas directas. Si por el momento dejamos de lado el término $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v})$, tenemos una *ecuación de difusión*. El nuevo término significa que la vorticidad $\boldsymbol{\Omega}$ *se difunde* por el fluido. Si hay un gradiente grande de vorticidad, se extenderá por el fluido circundante.

Éste es el término que hace que los anillos de humo engrosen a medida que avanzan. Además se manifiesta elegantemente si mandan un vórtice "limpio" (un anillo "sin humo" hecho por el aparato descrito en el capítulo anterior) a través de una nube de humo. Cuando sale de la nube ha sacado un poco de humo y verán que queda el hueco dejado por el paso del anillo. Parte de la $\boldsymbol{\Omega}$ se difunde hacia afuera en el humo, pero manteniendo su movimiento de avance con el vórtice.

41-3 El número de Reynolds

Describiremos ahora el cambio que aparece en el carácter del flujo de los fluidos como consecuencia del nuevo término de viscosidad. Examinaremos dos problemas con algún detalle. El primero es el flujo de un fluido que pasa en torno a un cilindro —flujo que tratamos de calcular en el capítulo anterior usando la teoría del flujo no viscoso—. Resulta que actualmente sólo se puede resolver las ecuaciones con viscosidad en unos pocos casos especiales. Así, parte de lo que les contaremos está basado en medidas experimentales —suponiendo que el modelo experimental satisface la ecuación (41.17)—.

El problema matemático es éste: queremos la solución para el flujo transversal de un fluido viscoso incompresible en torno a un cilindro largo de diámetro D. El flujo debe estar dado por la ecuación (41.17) y por

$$\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{v} \tag{41.18}$$

con las condiciones de que la velocidad a gran distancia sea cierta velocidad constante V (paralela al eje x) y que en la superficie del cilindro sea cero. Es decir,

$$v_x = v_y = v_z = 0 \tag{41.19}$$

para

$$x^2 + y^2 = \frac{D^2}{4}.$$

Esto especifica completamente el problema matemático.

Si examinan las ecuaciones, verán que hay cuatro parámetros diferentes en el problema: η, ρ, D y V. Podrían pensar que tenemos que dar toda una serie de casos para diferentes V, diferentes D, etc. Sin embargo, éste no es el caso. Todas las soluciones distintas posibles corresponden a distintos valores de *un solo parámetro*. Esto es lo más general e importante que podemos decir sobre el flujo viscoso. Para ver por qué es así, observen primero que la viscosidad y la densidad aparecen únicamente en el cociente η/ρ —la viscosidad *cinemática*—. Esto reduce a tres el número de parámetros independientes. Supongan ahora que medimos todas las distancias usando como unidad la única longitud que aparece en el problema: el diámetro D del cilindro, es decir, sustituimos x, y, z por las nuevas variables x', y', z' con

$$x = x'D, \qquad y = y'D, \qquad z = z'D.$$

Entonces D desaparece de (41.19). De la misma manera, si medimos todas las velocidades en términos de V —o sea que ponemos $v = v'V$— nos desembarazamos de V, y v' es simplemente igual a 1 a grandes distancias. Como hemos fijado nuestras unidades de longitud y de velocidad, nuestra unidad de tiempo es ahora D/V, así que debemos poner

$$t = t' \frac{D}{V}. \tag{41.20}$$

Con nuestras nuevas variables, las derivadas que aparecen en la ecuación (41.18) se transforman de $\partial/\partial x$ en $(1/D)\partial/\partial x'$, etc. Así, la ecuación (41.18) se convierte en

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v} = \frac{V}{D} \boldsymbol{\nabla}' \times \boldsymbol{v}' = \frac{V}{D} \boldsymbol{\Omega}'. \tag{41.21}$$

Nuestra ecuación principal (41.17) toma entonces la forma

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}'}{\partial t'} + \boldsymbol{\nabla}' \times (\boldsymbol{\Omega}' \times \boldsymbol{v}') = \frac{\eta}{\rho V D} \nabla'^2 \boldsymbol{\Omega}'.$$

Todas las constantes se condensan en un solo factor que, siguiendo la tradición, indicamos con $1/\mathcal{R}$

$$\mathcal{R} = \frac{\rho}{\eta} V D. \tag{41.22}$$

Si nos acordamos de que hay que escribir todas las ecuaciones con todas las cantidades en las nuevas unidades, podemos omitir todos los apóstrofos. Nuestras ecuaciones de flujo son entonces

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}) = \frac{1}{\mathcal{R}} \nabla^2 \boldsymbol{\Omega} \tag{41.23}$$

y

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{v},$$

con las condiciones

$$\boldsymbol{v} = 0$$

para

$$x^2 + y^2 = 1/4 \tag{41.24}$$

y

$$v_x = 1, \qquad v_y = v_z = 0$$

para

$$x^2 + y^2 + z^2 \gg 1.$$

El significado físico de todo esto es muy interesante. Significa, por ejemplo, que si resolvemos el problema del flujo para una velocidad V_1 y cierto diámetro D_1 del cilindro, y luego preguntamos cuál es el flujo para un diámetro D_2 diferente y un fluido distinto, el flujo será el mismo para la velocidad V_2 que dé el mismo número de Reynolds, es decir, cuando

$$\mathcal{R}_1 = \frac{\rho_1}{\eta_1} V_1 D_1 = \mathcal{R}_2 = \frac{\rho_2}{\eta_2} V_2 D_2. \tag{41.25}$$

Para dos situaciones cualesquiera que tengan el mismo número de Reynolds, el flujo tendrá el mismo "aspecto" —en función de las variables x', y', z' y t' calibradas en forma apropiada—. Esto constituye un enunciado importante porque significa que podemos determinar cuál será el comportamiento del flujo de aire en torno de un ala de avión sin tener que construir un avión y probarlo. En su lugar, podemos hacer un modelo y hacer mediciones usando una velocidad que dé el mismo número de Reynolds. Éste es el principio que permite aplicar las soluciones de medidas en "túnel de viento" sobre aviones en escala reducida, o los resultados de medidas en "canal de prueba" sobre modelos de barcos en escala, a los objetos de tamaño normal. Recuerden, sin embargo, que sólo podemos hacer esto siempre que se puede despreciar la compresibilidad del fluido. De lo contrario aparece una nueva cantidad —la velocidad del sonido—. Y situaciones diferentes se corresponderán realmente sólo si el cociente entre V y la velocidad del sonido también es el mismo. Este último cociente se llama *número de Mach*. Así, para velocidades cercanas a la del sonido o mayores, los flujos son iguales en dos situaciones si *ambos*, el *número de Mach* y el *número de Reynolds* son iguales en ambas situaciones.

41-4 Flujo transversal en torno a un cilindro

Volvamos al problema del flujo a baja velocidad (casi incompresible) en torno a un cilindro. Daremos una descripción cualitativa del flujo de un fluido real. Hay muchas cosas que querríamos saber sobre este flujo —por ejemplo, ¿cuál es la fuerza de arrastre sobre el cilindro? La fuerza de arrastre sobre un cilindro

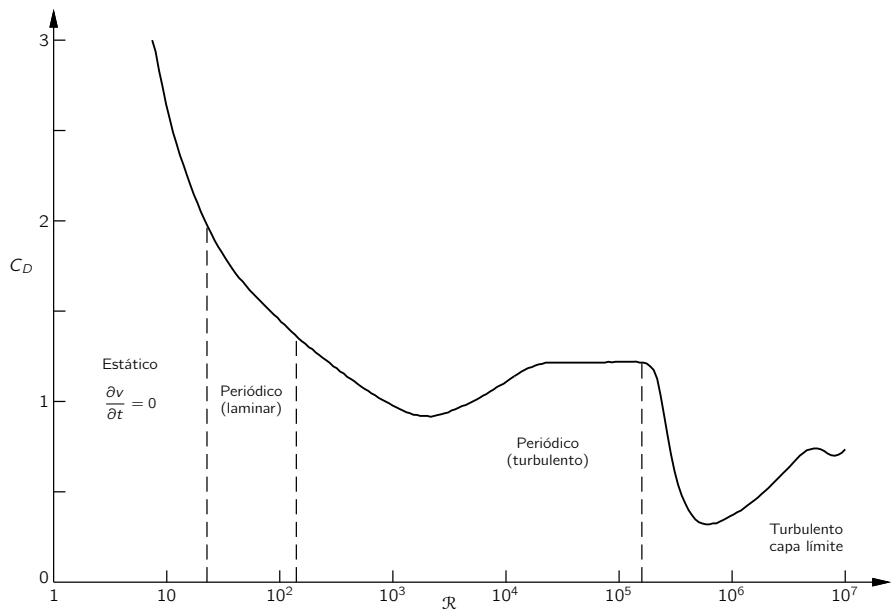


Figura 41-4. El coeficiente de arrastre C_D de un cilindro como función del número de Reynolds.

está representada en la figura 41-4 en función de $\mathcal{R}$ —que es proporcional a la velocidad del aire V si se mantiene fijo todo lo demás—. Lo que se ha representado realmente es el llamado coeficiente *de arrastre* C_D, que es un número adimensional igual a la fuerza dividida entre $\frac{1}{2}\rho V^2 Dl$, donde D es el diámetro, l la longitud del cilindro y ρ la densidad del líquido:

$$C_D = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho V^2 Dl}.$$

El coeficiente de arrastre varía de una manera bastante complicada, dándonos un indicio de que algo bastante interesante y complicado está sucediendo en el flujo. Describiremos ahora la naturaleza del flujo para diferentes intervalos del número de Reynolds. Primero, cuando el número de Reynolds es muy pequeño, el flujo es casi estacionario; es decir que la velocidad es constante en todo punto, y el flujo da vuelta alrededor del cilindro. Sin embargo, la verdadera distribución de las líneas de flujo no es como en el flujo potencial. Son soluciones de una ecuación algo diferente. Cuando la velocidad es muy baja o, lo que es equivalente, cuando la viscosidad es muy alta de modo que el fluido es como miel, los términos inerciales son despreciables y el flujo queda descrito por la ecuación

$$\nabla^2 \boldsymbol{\Omega} = 0.$$

Esta ecuación fue resuelta por primera vez por Stokes, quien también resolvió el mismo problema con una esfera. Si tienen una esfera pequeña moviéndose en esas condiciones de número de Reynolds bajo, la fuerza necesaria para arrastrarla es igual a $6\pi\eta a V$, donde a es el radio de la esfera y V su velocidad. Ésta es una fórmula muy útil porque da la velocidad a la cual los pequeños granos de suciedad (u otras partículas de las que se pueda hacer la aproximación a esferas) se mueven en un fluido bajo la acción de una fuerza dada —como por ejemplo, en una centrífuga, en la sedimentación o en la difusión. En la región de números de Reynolds bajos —para $\mathcal{R}$ menor que 1— las líneas de $\boldsymbol{v}$ alrededor de un *cilindro* son como las dibujadas en la figura 41-5.

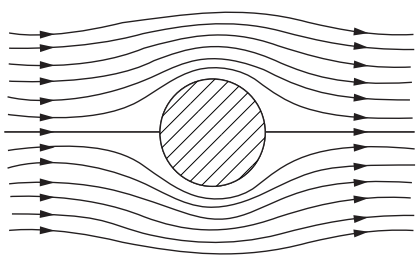


Figura 41-5. Flujo viscoso (a baja velocidad) en torno a un cilindro.

Si ahora aumentamos la velocidad del fluido para obtener un número de Reynolds un poco mayor que 1, encontramos que el flujo es diferente. Además, hay una circulación detrás del cilindro, como se observa en la figura 41-6(b). Todavía es una cuestión abierta el determinar si siempre hay circulación allí hasta en los números de Reynolds más pequeños o si siempre que las cosas cambian repentinamente en un cierto número de Reynolds. Se solía pensar que la circulación crecía continuamente. Pero ahora se cree que aparece repentinamente y está claro que la circulación crece con $\mathcal{R}$. En todo caso, hay un carácter distinto del flujo para $\mathcal{R}$ en la región entre cerca de 10 y 30. Por lo que hay un par de vórtices detrás del cilindro.

El flujo cambia nuevamente cuando llegamos a un número de unos 40 o algo así. De repente hay un cambio completo del carácter del movimiento. Así pues, lo que ocurre es que uno de los vórtices que hay detrás del cilindro se hace tan largo que se rompe y va corriente abajo con el fluido. Entonces el fluido se tuerce detrás del cilindro, que al cerrarse forma un nuevo vórtice. Por ello, los vórtices se desprenden alternadamente de cada lado, de modo que una vista instantánea del flujo es más o menos como se ha esquematizado en la figura 41-6(c). La corriente de vórtices se llama "calle de vórtices de Kármán". Siempre aparece para $\mathcal{R} > 40$. En la figura 41-7 mostramos una fotografía de un flujo de este tipo.

La diferencia entre el flujo que se observa en la figura 41-6(c) y el de la 41-6(b) o el de la 41-6(a) es casi una diferencia total de régimen. En la figura 41-6(a) o la (b), la velocidad es constante, mientras que en la figura 41-6(c) la velocidad en cualquier punto varía en el tiempo. No hay soluciones estacionarias por encima de $\mathcal{R} = 40$ —lo cual hemos indicado en la figura 41-4 con una línea discontinua—. Para estos números de Reynolds mayores, el flujo varía en el tiempo, pero de una manera *regular* y cíclica.

Podemos hacernos una idea física de cómo se producen estos vórtices. Sabemos que la velocidad del fluido debe ser cero en la superficie del cilindro y

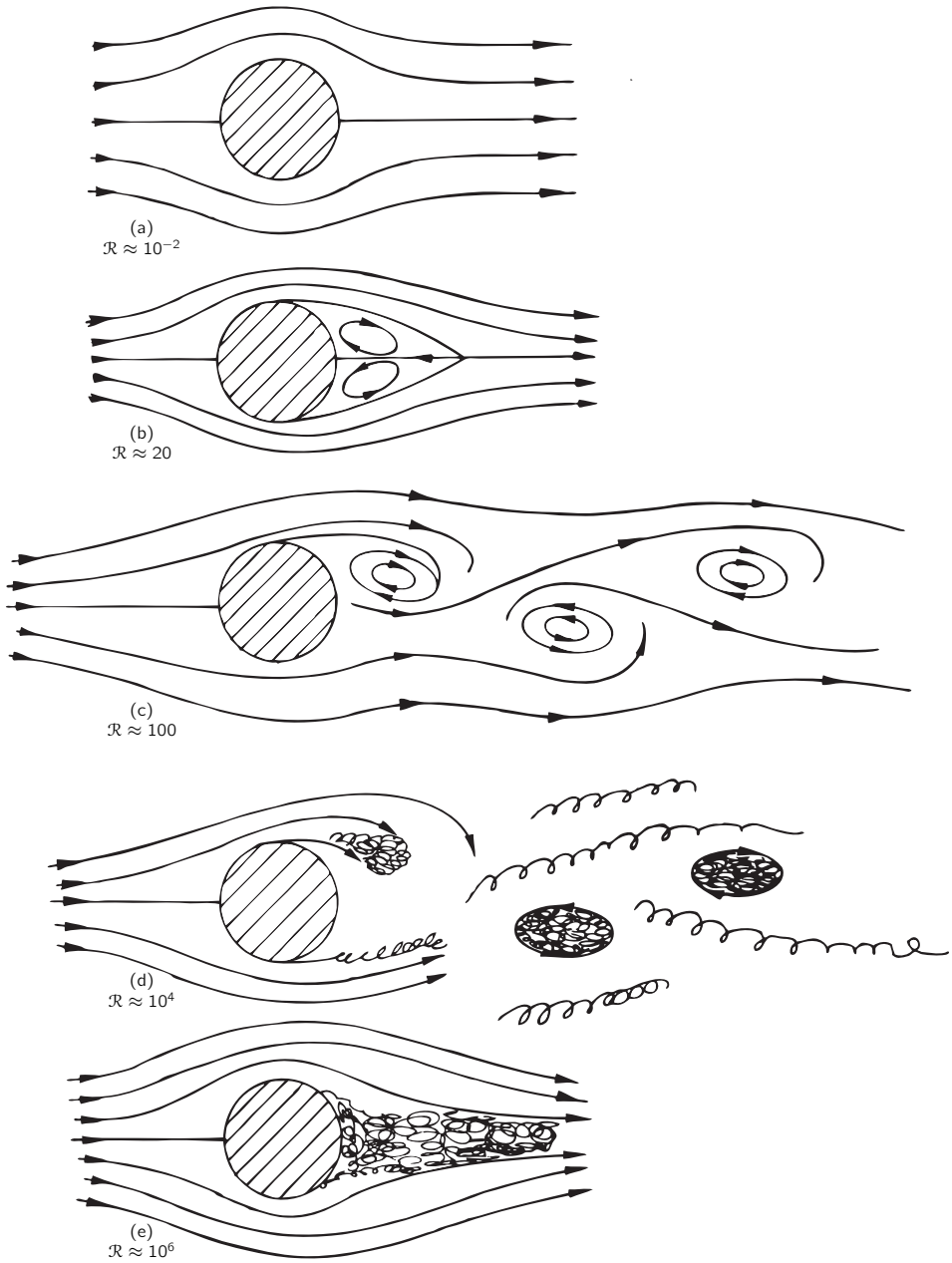


Figura 41-6. Flujo en torno a un cilindro para varios números de Reynolds.

además que debe aumentar rápidamente al alejarse de la superficie. Esta gran variación local de la velocidad del fluido es la que crea la vorticidad. Ahora bien, cuando la velocidad de la corriente principal es suficientemente baja hay bastante tiempo para que esta vorticidad se difunda alejándose de la pequeña área cerca de la superficie del sólido donde se produce y formando una gran región de vorticidad. Esta imagen física debe ayudar a prepararnos para el siguiente cambio de naturaleza del flujo cuando la velocidad de la corriente principal, o $\mathcal{R}$, aumenta aún más.

A medida que la velocidad aumenta más y más, la vorticidad tiene cada vez menos tiempo de difundirse y ocupar una región mayor del fluido. Cuando llegamos a un número de Reynolds de varios cientos, la vorticidad comienza a llenar una banda delgada, como muestra la figura 41-6(d). En esta capa el flujo es caótico e irregular. La región se llama *capa límite* y esta zona de flujo irregular

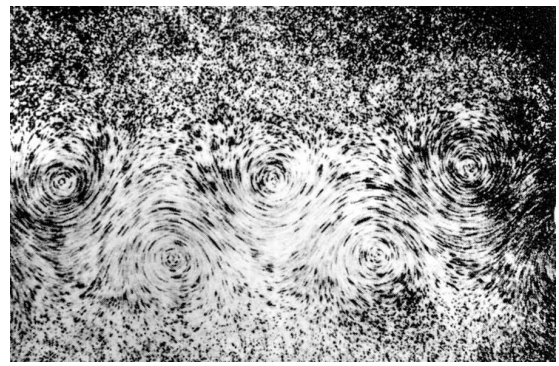


Figura 41-7. Fotografía de Ludwig Prandtl de la "calle de vórtices" en el flujo detrás de un cilindro.

se aleja más y más corriente abajo a medida que $\mathcal{R}$ aumenta. En la región turbulenta, las velocidades son muy irregulares y "ruidosas"; además el flujo ya no es bidimensional sino que se arremolina en las tres dimensiones. Todavía queda un movimiento alternado superpuesto al turbulento.

Aumentando aún más el número de Reynolds, la región turbulenta se abre camino hasta alcanzar —para flujos algo por encima de $\mathcal{R} = 10^5$— el punto en que las líneas de flujo dejan el cilindro. El flujo es como muestra la figura 41-6(e) y tenemos lo que se llama una "capa límite de turbulencia". Además la fuerza de arrastre varía radicalmente; disminuye en un factor grande, como muestra la figura 41-4. En esta región de velocidades, la fuerza de arrastre realmente *disminuye* al aumentar la velocidad. Parece que hay poca evidencia de que haya periodicidad.

¿Y qué pasa para números de Reynolds aún mayores? Si aumentamos la velocidad aún más, la estela vuelve a aumentar de tamaño, aumentando la fuerza de arrastre. Los experimentos más recientes —que van hasta $\mathcal{R} = 10^7$ más o menos— indican que aparece una nueva periodicidad en la estela, ya sea porque toda la estela está oscilando en un movimiento global, o porque aparece un nuevo tipo de vórtice junto con un movimiento irregular ruidoso. Todavía los detalles no son totalmente claros y se los está estudiando experimentalmente.

41-5 El límite de viscosidad nula

Querríamos señalar que ninguno de los flujos que hemos descrito se parece en algo al flujo potencial que hallamos en el capítulo anterior. A primera vista es bastante sorprendente. Después de todo, $\mathcal{R}$ es proporcional a $1/\eta$, así que hacer tender η a cero es equivalente a hacer tender $\mathcal{R}$ a infinito. Y si tomamos el límite para $\mathcal{R}$ grande en la ecuación (41.23), desaparece el segundo miembro y obtenemos precisamente la ecuación del capítulo anterior. No obstante, les resultaría difícil creer que el flujo altamente turbulento para $\mathcal{R} = 10^7$ estuviera tendiendo al flujo uniforme calculado con la ecuación del agua "seca". ¿Cómo puede ser que a medida que nos aproximamos a $\mathcal{R} = \infty$, el flujo descrito por la ecuación (41.23) dé una solución completamente diferente de la que obtuvimos tomando $\eta = 0$ como punto de partida? La respuesta es muy interesante. Observen que el segundo miembro de la ecuación (41.23) es $1/\mathcal{R}$ por una *segunda derivada*. Es la derivada más alta que aparece en la ecuación. Lo que ocurre es que aunque el coeficiente $1/\mathcal{R}$ es pequeño, hay variaciones rapidísimas de $\boldsymbol{\Omega}$ cerca de la superficie. Estas variaciones rápidas compensan el coeficiente pequeño y el producto *no tiende a cero* al aumentar $\mathcal{R}$. Las soluciones no tienden al caso límite cuando el coeficiente de $\nabla^2\boldsymbol{\Omega}$ tiende a cero.

Puede que se estén preguntando: "¿Cómo es esta turbulencia en escala muy pequeña y cómo se mantiene? ¿Cómo puede la vorticidad producida cerca de la superficie del cilindro generar tanto ruido en el fondo?" De nuevo la respuesta es interesante. La vorticidad tiene una tendencia a amplificarse. Si por un momento olvidamos la difusión de la vorticidad, la cual ocasiona pérdidas, las leyes de flujo dicen (como vimos) que las líneas de vórtice son arrastradas con el fluido

a velocidad $\boldsymbol{v}$. Podemos imaginar cierto número de líneas de $\boldsymbol{\Omega}$ que se están deformando y retorciendo debido al complicado diagrama de flujo de $\boldsymbol{v}$. Esto acerca las líneas y las mezcla todas. Líneas que antes eran simples se entrelazan y se juntan. Serán más largas y más apretadas. La intensidad de la vorticidad aumentará y así sus irregularidades —los más y los menos— también aumentarán en general. Así, la magnitud de la vorticidad en tres dimensiones aumenta a medida que arremolinamos el líquido.

También podrían preguntar: "¿Cuándo es el flujo potencial una teoría satisfactoria?" En primer lugar, es satisfactoria fuera de la región turbulenta, donde la vorticidad no ha entrado por difusión en forma apreciable. Dando a los cuerpos con líneas de corriente especiales, podemos hacer que la región de turbulencia sea lo menor posible; el flujo en torno a las alas de un avión —las cuales están cuidadosamente diseñadas— es casi totalmente un verdadero flujo potencial.

41-6 Flujo de Couette

Es posible demostrar que el carácter complejo y cambiante del flujo transversal en torno a un cilindro no es especial, sino que la gran variedad de posibilidades de flujo se presenta en general. Hemos hallado en la sección 41-1 una solución para el flujo viscoso entre dos cilindros y podemos comparar los resultados con lo que ocurre en la realidad. Si tomamos dos cilindros concéntricos con aceite entre ellos y suspendemos polvo fino de aluminio en el aceite, es fácil ver el flujo. Si rotamos lentamente el cilindro externo no ocurre nada inesperado; vean la figura 41-8(a). Si a su vez, se rota lentamente el cilindro interno, no pasa nada del otro mundo. Sin embargo, si rotamos el cilindro interno a mayor velocidad, recibimos una sorpresa. El flujo se rompe en bandas horizontales, como indica la figura 41-8(b). Cuando el cilindro externo rota a una velocidad parecida estando el interno en reposo, el efecto no se presenta. ¿Cómo puede ser que haya una diferencia entre rotar el cilindro interno y rotar el externo? Después de todo, el diagrama de flujo que obtuvimos en la sección 41-1 dependía únicamente de $\omega_b - \omega_a$. Podemos encontrar la respuesta examinando las secciones transversales mostradas en la figura 41-9. Cuando las capas internas del fluido se están moviendo más rápidamente que las externas, tienden a desplazarse *hacia afuera* —la fuerza centrífuga es mayor que la presión que las mantiene en su lugar—. Una capa completa no se puede mover uniformemente porque las capas externas se lo obstaculizan. Se debe romper en células y circular, como muestra la figura 41-9(b). Es como las corrientes de convección en una habitación que tiene aire caliente abajo. Cuando el cilindro interno está en reposo y el externo tiene una velocidad alta, las fuerzas centrífugas establecen un gradiente de presión que mantiene todo en equilibrio —vean la figura 41-9(c) (como en una habitación con aire caliente cerca del techo)—.

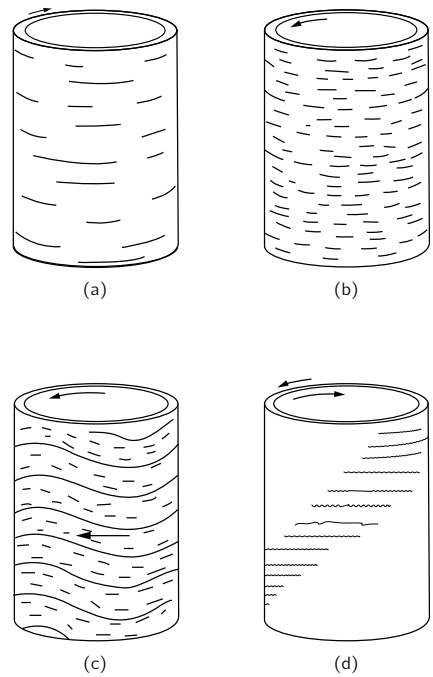


Figura 41-8. Patrones del flujo de un líquido entre dos cilindros transparentes rotando.

Aceleremos ahora el cilindro interno. Al principio aumenta el número de bandas. Luego vemos que de repente las bandas se hacen onduladas, como en la

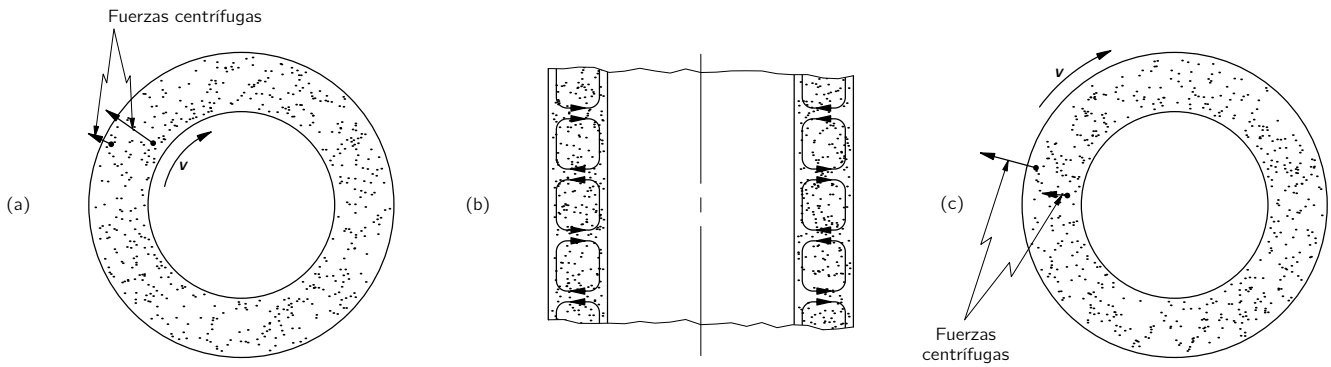


Figura 41-9. Por qué el flujo se rompe en bandas.

figura 41-8(c), y las ondas se desplazan alrededor del cilindro. Se puede medir fácilmente la velocidad de estas ondas. Para velocidades de rotación altas, se aproxima a 1/3 de la velocidad del cilindro interno. ¡Y nadie sabe por qué! Ahí tienen un desafío. Un simple número como 1/3 y ninguna explicación. En realidad no se comprende muy bien todo el mecanismo de la formación de ondas; sin embargo, es flujo laminar estacionario.

Si ahora empezamos a rotar el cilindro externo también —pero en sentido opuesto— el diagrama de flujo comienza a romperse. Obtenemos regiones onduladas que alternan con regiones aparentemente tranquilas, como se ha esquematizado en la figura 41-8(d), formando un diagrama en espiral. Sin embargo, en estas regiones "tranquilas" podemos ver que el flujo es realmente bastante irregular; en realidad, es completamente turbulento. Las regiones onduladas también empiezan a mostrar flujo turbulento irregular. Si se rotan los cilindros aún más rápidamente, todo el flujo se vuelve caóticamente turbulento.

Vemos en este experimento simple muchos regímenes interesantes de flujo que son enteramente diferentes y que no obstante están contenidos en nuestra ecuación simple para diversos valores de un solo parámetro $\mathcal{R}$. Con los cilindros rotando podemos ver muchos efectos que se presentan en el flujo que pasa en torno a un cilindro: primero, hay un flujo estacionario; segundo, se establece un flujo que varía en el tiempo, pero de una manera regular y uniforme; finalmente, el flujo se vuelve completamente irregular. Todos han visto los mismos efectos en la columna de humo que sube de un cigarrillo en aire traquilo. Hay una columna estacionaria y uniforme seguida de una especie de ensortijado a medida que la corriente de humo comienza a romperse, terminando finalmente en una nube de humo irregular y arremolinada.

La lección importante que se debe aprender de todo esto es que hay una tremenda variedad de comportamientos escondida en el conjunto simple de ecuaciones (41.23). Todas son soluciones de las mismas ecuaciones, sólo que con valores diferentes de $\mathcal{R}$. No tenemos razón alguna para pensar que faltan términos en estas ecuaciones. La única dificultad es que actualmente no tenemos el poder matemático para analizarlas, excepto para números de Reynolds muy pequeños —es decir, en el caso completamente viscoso—. El que hayamos escrito una ecuación no le quita al flujo de fluidos ni su encanto, ni su misterio, ni su asombro.

Si tal variedad es posible con una ecuación simple que tiene un solo parámetro, ¡la variedad que se tendrá con ecuaciones más complejas! Quizá la ecuación fundamental que describe las nebulosas llenas de remolinos, y las estrellas y galaxias que se condensan, giran y explotan, es sólo una ecuación simple para el comportamiento hidrodinámico de hidrógeno gaseoso casi puro. A menudo se dice, por un miedo injustificado a la física, que no se puede escribir una ecuación de la vida. Bueno, quizá podamos. En realidad, es muy posible que ya tengamos la ecuación en una aproximación suficiente cuando escribimos la ecuación de la mecánica cuántica:

$$H\psi = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Acabamos de ver que la complejidad de las cosas puede escaparse muy fácil y espectacularmente de la simplicidad de las ecuaciones que las describen. Por desconocimiento de los alcances de las ecuaciones simples, el hombre ha llegado frecuentemente a la conclusión de que nada inferior a Dios, y no simples ecuaciones, puede explicar las complejidades del universo.

Hemos escrito las ecuaciones del flujo de agua. A partir de los datos experimentales encontramos un conjunto de conceptos y aproximaciones que utilizar en el estudio de las soluciones —calles de vórtices, estelas turbulentas, capas límite—. Cuando tenemos ecuaciones similares en situaciones menos familiares en las que ni siquiera podemos experimentar, tratamos de resolverlas de una manera primitiva, vacilante y confusa para intentar determinar qué nuevas características cualitativas pueden resultar o qué nuevas formas cualitativas son consecuencia de las ecuaciones. Como, por ejemplo, nuestras ecuaciones para el Sol como una esfera de hidrógeno gaseoso, describen un Sol sin manchas solares, sin la

estructura de granos de arroz de la superficie, sin prominencias, sin coronas. Y sin embargo, todo eso está en las ecuaciones; sólo que no hemos encontrado la manera de extraerlo de allí.

Están los que se van a sentir defraudados cuando no se encuentre vida en otros planetas. Yo no —quiero recordar y gozar y sorprenderme una vez más, a través de la exploración interplanetaria, con la variedad y novedad infinitas de los fenómenos que principios tan simples pueden generar—. La puesta a prueba de la ciencia es su capacidad de predecir. Si nunca hubiesen estado en la Tierra, ¿podrían ustedes predecir las tormentas, los volcanes, las olas de los océanos, las auroras y los colores de los ocasos? Será una lección saludable cuando aprendamos lo que pasa en cada uno de esos planetas muertos, esas ocho o 10 pelotas, todas aglomeradas a partir de la misma nube de polvo y todas obedeciendo exactamente las mismas leyes de la física.

La próxima gran era del despertar del intelecto humano puede muy bien proporcionar un método para comprender el contenido *cualitativo* de las ecuaciones. Hoy no podemos. Hoy no podemos ver que las ecuaciones del flujo del agua contengan cosas como la estructura de la turbulencia en forma de los avisos de las barberías que se ve entre los cilindros rotantes. Hoy no podemos ver si la ecuación de Schrödinger contiene ranas, compositores de música o la moralidad —o si no los contiene—. No podemos decir si se necesita o no algo más, como Dios. Y por lo tanto podemos tener opiniones bien definidas en uno u otro sentido.

42

El espacio curvo

42-1 Espacios curvos en dos dimensiones

42-2 La curvatura en el espacio tridimensional

42-3 Nuestro espacio es curvo

42-4 Geometría en el espacio-tiempo

42-5 La gravedad y el principio de equivalencia

42-6 La velocidad de los relojes en un campo gravitacional

42-7 La curvatura del espacio-tiempo

42-8 El movimiento en el espacio-tiempo curvo

42-9 La teoría de la gravitación de Einstein

42-1 Espacios curvos en dos dimensiones

De acuerdo con Newton todas las cosas atraen a todas las demás cosas con una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas, y los objetos responden a las fuerzas con aceleraciones proporcionales a las fuerzas. Son las leyes de Newton de la gravitación universal y del movimiento. Como saben, dan cuenta del movimiento de pelotas, planetas, satélites, galaxias, etcétera.

Einstein tenía una interpretación diferente de la ley de gravitación. De acuerdo con él, espacio y tiempo —que deben ponerse juntos como espacio-tiempo— se *curvan* cerca de masas pesadas. Y es el intento de las cosas por seguir "líneas rectas" en este espacio-tiempo curvo el que hace que se muevan en la forma que lo hacen. Ésta es una idea compleja —muy compleja—. Es la idea que queremos explicar en este capítulo.

Nuestro tema tiene tres partes. En una intervienen los efectos gravitatorios; en otra las ideas de espacio-tiempo que ya hemos estudiado. La tercera tiene que ver con la idea del espacio-tiempo curvo. Simplificaremos nuestro tema en el comienzo no preocupándonos de la gravedad y dejando de lado el tiempo —discutiendo simplemente el espacio curvo—. Les hablaremos más adelante de las otras partes, pero nos concentraremos ahora en la idea del espacio curvo —qué se entiende por espacio curvo, y más específicamente qué se entiende por espacio curvo en esta aplicación de Einstein—. Ahora bien, incluso eso resulta algo difícil en tres dimensiones. Por lo tanto, reduciremos primero el problema aún más y hablaremos de qué se entiende con las palabras "espacio curvo" en dos dimensiones.

Con el fin de entender esta idea del espacio curvo en dos dimensiones tienen realmente que darse cuenta del punto de vista limitado de quien vive en un espacio de este tipo. Supongan que nos imaginamos un insecto sin ojos que vive sobre un plano, como muestra la figura 42-1. Se puede mover solamente sobre el plano y no tiene manera de saber si hay un medio de descubrir un "mundo exterior". (No tiene la imaginación de ustedes.) Por supuesto, vamos a razonar por analogía. *Nosotros* vivimos en un mundo tridimensional y no nos imaginamos para nada que se pueda salir de este mundo tridimensional en una nueva dirección; de manera que haremos las cosas por analogía. Es como si fuésemos insectos viviendo en un plano y hubiera un espacio en otra dirección. Es por esto que trabajaremos primero con el insecto, recordando que debe vivir sobre su superficie y no puede salir de ella.

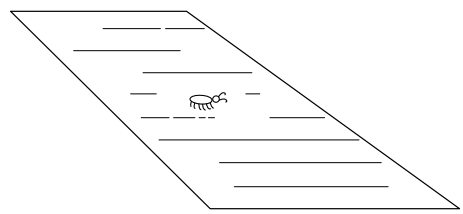


Figura 42-1. Insecto sobre una superficie plana.

Como otro ejemplo de insecto que vive en dos dimensiones, podemos imaginarnos uno que viva sobre una esfera. Imaginamos que puede caminar por la superficie de la esfera, como se ve en la figura 42-2, pero no puede mirar hacia "arriba", hacia "abajo" o hacia "afuera".

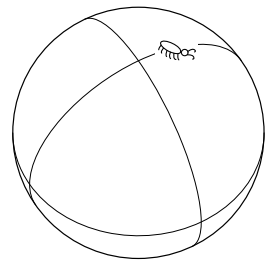


Figura 42-2. Insecto sobre una esfera.

Vamos a considerar ahora una *tercera* clase de criatura. También es un insecto como los demás, y también vive sobre un plano como nuestro primer insecto, pero esta vez el plano es muy particular. La temperatura es diferente en distintos lugares. Además, cualquier regla que se pudiera utilizar y el insecto estarán hechos del mismo material, que se dilata cuando se calienta. Siempre que el insecto coloque una regla en cualquier lugar para medir algo, la regla se dilata en forma inmediata a fin de adoptar la longitud correspondiente a esa temperatura en ese lugar. Dondequiera que se coloque algún objeto —él mismo, una regla, un triángulo o cualquier otra cosa— el objeto se estira debido a la dilatación térmica. Todas las cosas son más largas en los lugares calientes que en los fríos y todas

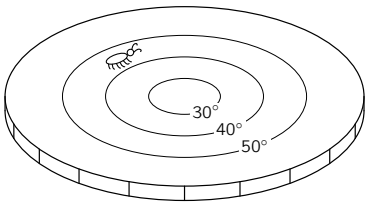


Figura 42-3. Insecto sobre una placa caliente.

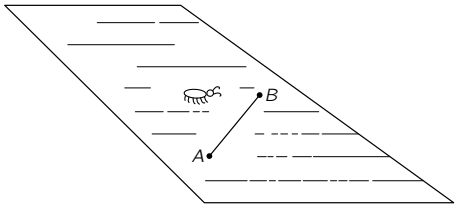


Figura 42-4. Construcción de una "recta" sobre un plano.

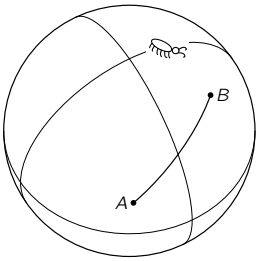


Figura 42-5. Construcción de una "recta" sobre una esfera.

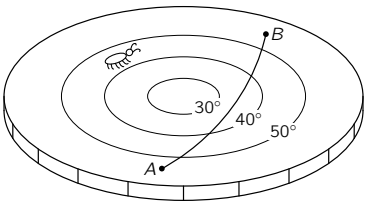


Figura 42-6. Construcción de una "recta" sobre una placa caliente.

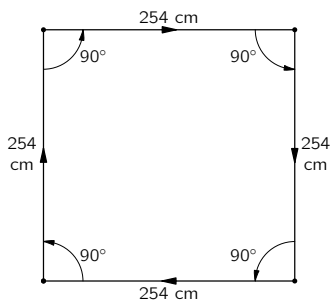


Figura 42-7. Un cuadrado, un triángulo y un círculo en un espacio plano.

las cosas tienen el mismo coeficiente de dilatación. Llamaremos "placa caliente" a la casa de nuestro tercer insecto aunque preferiríamos pensar particularmente en una clase especial de placa caliente que sea fría en el centro y cada vez más caliente a medida que nos aproximamos a los bordes (figura 42-3).

Ahora vamos a imaginar que nuestros insectos comienzan a estudiar geometría. Aunque imaginemos que son ciegos, es decir, que no pueden ver nada del mundo "exterior", pueden hacer muchas cosas con sus patas y antenas. Pueden dibujar líneas, pueden construir reglas y medir longitudes. Supongamos primero que comienzan con la idea más simple de geometría. Aprenden a trazar una recta —definida como la línea más corta entre dos puntos—. Nuestro primer insecto —vean la figura 42-4— aprende a trazar muy buenas rectas. Pero ¿qué sucede con el insecto de la esfera? Traza sus rectas como la menor distancia —*para él*— entre dos puntos, como se ve en la figura 42-5. A nosotros nos parecerá una curva, pero el insecto no tiene medios para salir de la esfera y descubrir que en "realidad" hay una línea más corta. Sabe simplemente que si intenta *en su mundo* otra trayectoria, siempre será más larga que su recta. Porque debemos reconocer que su recta es el arco más corto entre dos puntos. (Por supuesto, es un arco de círculo máximo.)

Finalmente, nuestro tercer insecto —el de la figura 42-3— dibujará igualmente su "recta" que a nosotros nos parecerá una curva. Por ejemplo, la menor distancia entre A y B en la figura 42-6 será una curva como la indicada. ¿Por qué? Porque cuando la línea se curva hacia la parte más caliente de la placa caliente, las reglas se vuelven más largas (desde nuestro punto de vista omnisciente) y bastan menos "metros" puestos en fila para ir desde A hasta B. Por lo tanto, *para él* la línea es recta —no tiene manera de saber que pudiera haber alguien fuera, en un extraño mundo tridimensional que pudiera llamar "recta" a una línea diferente—.

Creemos que ahora ya tienen la idea de que todo el resto de nuestro análisis se realizará siempre desde el punto de vista de las criaturas en las superficies particulares y no desde *nuestro* punto de vista. Con esto en mente, veamos qué otros aspectos tienen sus geometrías. Supongan que todos lo insectos han aprendido a construir dos líneas que se intersectan en un ángulo recto. (Pueden imaginarse cómo podrían hacerlo.) Entonces nuestro primer insecto (el que está sobre el plano normal) descubre un hecho interesante. Si parte del punto A y construye una línea de 254 centímetros de largo, más tarde dobla un ángulo recto y marca otros 254 centímetros, luego dobla otro ángulo recto y prosigue por otros 254 centímetros, luego dobla un tercer ángulo recto y marca una cuarta línea de 254 centímetros; al final se encuentran en el punto de partida, como muestra la figura 42-7(a). Es una propiedad de su mundo —uno de los hechos de su "geometría"—.

Luego descubre otra cosa interesante. Si construye un triángulo —una figura con tres rectas— la suma de los ángulos internos es 180°, es decir, la suma de dos ángulos rectos. Vean la figura 42-7(b).

Luego inventa el círculo. ¿Qué es el círculo? Un círculo se construye de esta manera: a partir de un solo punto se trazan líneas rectas en muchísimas

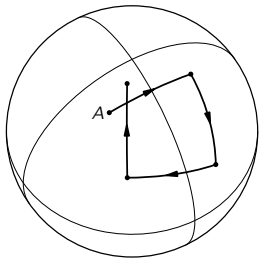


Figura 42-8. Intento de construcción de un "cuadrado" sobre una esfera.

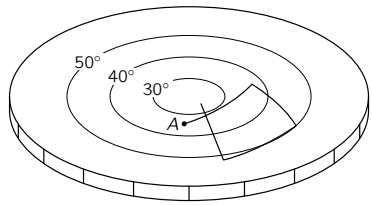


Figura 42-9. Intento de construcción de un "cuadrado" sobre una placa caliente.

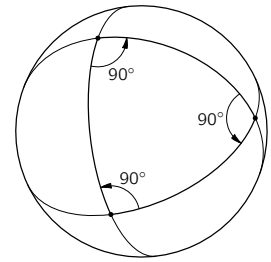


Figura 42-10. Un "triángulo" puede tener tres ángulos de 90° sobre una esfera.

direcciones y se señala un conjunto de puntos que están todos a la misma distancia del punto de partida. Vean la figura 42-7(c). (Debemos tener cuidado al definir estas cosas para que podamos hacer las analogías respecto a sus compañeros.) Por supuesto, la curva obtenida es equivalente a la que se obtendría haciendo girar una regla en torno de un punto. Comoquiera que sea, nuestro insecto aprende a construir círculos. Luego, un día piensa en medir la distancia alrededor del círculo. Mide varios círculos y encuentra una clara relación: la distancia alrededor del círculo es siempre el mismo número multiplicado por el radio r (que por supuesto es la distancia desde el centro hasta la curva). La circunferencia y el radio tienen siempre la misma relación —aproximadamente 6.283— independientemente del tamaño del círculo.

Veamos ahora qué han encontrado los otros insectos respecto a *sus* geometrías. Primero, ¿qué sucede con el insecto que está sobre la esfera cuando trata de construir un cuadrado?

Si él sigue las rectas que dimos antes probablemente pensará que el resultado no ha valido tanto trabajo. Obtiene una figura parecida a la que se muestra en la figura 42-8. Su punto final B no se superpone a su punto de partida A. No resulta ninguna figura cerrada. Consíganse una esfera y prueben. Algo similar le sucederá a nuestro amigo de la placa caliente. Si traza cuatro rectas de igual longitud —medidas con sus reglas que se dilatan— unidas en ángulos rectos obtienen una figura parecida a la de la figura 42-9.

Supongan ahora que cada uno de nuestros insectos tiene su propio Euclides que le ha dicho cómo "debe" ser la geometría y que han verificado aproximadamente lo que él dice, haciendo mediciones imperfectas en *pequeña* escala. Al intentar luego hacer medidas más precisas en una escala mayor habrán descubierto que algo estaba equivocado. Lo que importa es que sólo con *mediciones geométricas* descubrirán que pasa algo con su espacio. Definimos un *espacio curvo* como aquél donde la geometría no es la que se espera para un plano. La geometría de los insectos sobre la esfera o sobre la placa caliente es la geometría de un espacio curvo. Las reglas de la geometría euclideana fracasan. Y no es necesario poder salir del plano para darnos cuenta de que el mundo en que vivimos es curvo. No es necesario circunnavegar el globo para darse cuenta de que es una pelota. Pueden encontrar que viven sobre una pelota simplemente construyendo un cuadrado. Si el cuadrado es muy pequeño necesitarán bastante precisión, pero si el cuadrado es grande las medidas podrán realizarse más imperfectamente.

Tomemos el caso de un triángulo sobre un plano. La suma de los ángulos es 180°. Nuestro amigo de la esfera podrá encontrar triángulos muy raros. Por ejemplo puede encontrar triángulos que tienen *tres ángulos rectos*. ¡De verdad! La figura 42-10 muestra uno. Supongan que nuestro insecto parte del polo norte y traza una línea recta hasta el ecuador. Luego dobla un ángulo recto y construye otra línea recta perfecta de la misma longitud. Luego hace lo mismo. Debido a la longitud muy especial que ha tomado se encuentra nuevamente en el punto de partida y además encuentra la primera línea recta en ángulo recto. Por lo tanto, no hay dudas de que para él su triángulo tiene tres ángulos rectos, es decir, que la suma es 270 grados. Resulta que para él la suma de los ángulos de un

triángulo es *siempre* mayor que 180 grados. De hecho, el exceso (para el caso especial mostrado es de 90 grados) es proporcional a la superficie del triángulo. Si un triángulo sobre una esfera es muy pequeño sus ángulos suman un poco más de 180°. A medida que el triángulo es mayor, la discrepancia se hace mayor. El insecto que está sobre la placa caliente descubrirá dificultades similares con sus triángulos.

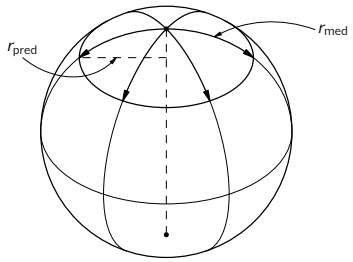


Figura 42-11. Construcción de un círculo sobre una esfera.

Pasemos a examinar lo que encuentran los otros insectos respecto a los círculos. Construyen círculos y miden sus circunferencias. Por ejemplo, el insecto de la esfera podrá trazar un círculo como el de la figura 42-11. Y descubrirá que la circunferencia es *menor* que 2π por el radio. (Pueden ver que debido a la sabiduría de nuestra vista tridimensional esto resulta evidente, ya que cuando habla del "radio" se refiere a una curva *más larga* que el radio verdadero de círculo.) Supongan que el insecto de la esfera ha leído a Euclides y decide predecir un radio dividiendo la circunferencia C entre 2π; obtiene

$$r_{\text{pred}} = \frac{C}{2\pi}. \tag{42.1}$$

Luego encontrará que el radio medido es más largo que el predicho. Continuando con su estudio, podrá definir la diferencia como el "exceso radial" y escribir

$$r_{\text{med}} - r_{\text{pred}} = r_{\text{exceso}} \tag{42.2}$$

y estudiar cómo el exceso radial depende del tamaño del círculo.

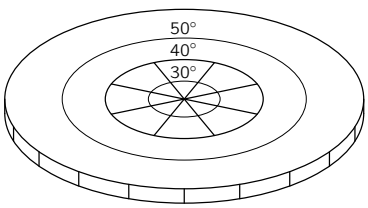


Figura 42-12. Construcción de un círculo sobre una placa caliente.

Nuestro insecto de la placa caliente descubrirá un fenómeno parecido. Supongan que trace un círculo centrado en el punto frío de la placa como en la figura 42-12. Si lo observásemos mientras traza el círculo notaríamos que sus reglas son más cortas cerca del centro y más largas a medida que las lleva hacia la periferia —aunque el insecto no lo sabe, por supuesto—. Cuando mide la circunferencia, la regla es siempre larga, así que también él encuentra que el radio medido es mayor que el predicho $C/2\pi$. El insecto de la placa caliente también encuentra un "exceso radial". Y nuevamente la magnitud de exceso depende del radio del círculo.

Definiremos como "espacio curvo" aquel en que se presentan errores geométricos de este tipo: la suma de los ángulos de un triángulo es diferente de 180°; la circunferencia dividida entre 2π no es igual al radio; la regla para trazar un cuadrado no da una figura cerrada. Pueden pensar otros.

Hemos dado dos ejemplos diferentes de espacio curvo: la esfera y la placa caliente. Sin embargo, es interesante que si tomamos la variación correcta de la temperatura en función de la distancia en la placa caliente, las dos *geometrías* serán exactamente iguales. Esto es bastante divertido. Podemos hacer que el insecto de la placa caliente obtenga exactamente el mismo resultado que el de la esfera. A aquellos a quienes gusta la geometría y los problemas geométricos les diremos cómo lo pueden hacer. Si suponen que la longitud de las reglas (en cuanto está determinada por la temperatura) varían en proporción de uno más cierta constante por el cuadrado de la distancia al origen, pueden encontrar que la geometría de la placa caliente es exactamente igual en todos los detalles* a la geometría de la esfera.

Hay, por supuesto, otras clases de geometría. Podríamos interesarnos por la geometría de un insecto que vive sobre una pera, es decir, algo que tenga una curvatura más acentuada en un lugar que en otro, de manera que el exceso angular en los triángulos sea más notable cuando construye triángulos pequeños en un lugar de su mundo que cuando los construye en otra parte. En otras palabras, la curvatura de un espacio puede variar de un lugar a otro. Es sólo una generalización de la idea. También se la puede imitar con una distribución correspondiente de temperaturas sobre una placa caliente.

Podemos señalar además que los resultados podrían presentarse con el tipo opuesto de discrepancia. Podrían encontrar, por ejemplo, que todos los triángulos tienen la suma de sus ángulos *menor* que 180 grados cuando son muy grandes.

* Excepto para el punto en el infinito.

Puede parecer imposible, pero no lo es. Primero que todo, podríamos tener una placa caliente con la temperatura decreciendo con la distancia al centro. Entonces todos los efectos se invertirán. Pero también podemos hacer esto en forma puramente geométrica observando la geometría bidimensional de la superficie de una silla de montar. Imaginen una superficie en forma de silla de montar como la esbozada en la figura 42-13. Dibujen ahora un "círculo" sobre la superficie, definido como el lugar geométrico de todos los puntos a la misma distancia de un centro. Este círculo es una curva que oscila hacia arriba y hacia abajo con un efecto de festón. La circunferencia que resulta es mayor que la que sería de esperar del cálculo de $2\pi r_{\text{med}}$. Así $C/2\pi$ es ahora *mayor* que r_{med}. El "exceso radial" será negativo.

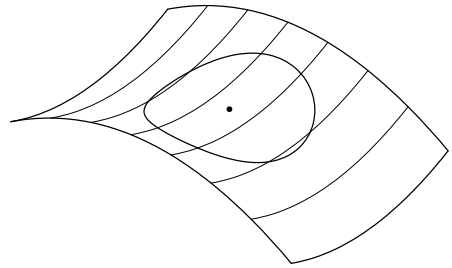


Figura 42-13. Un "círculo" sobre una superficie en forma de silla de montar.

Esferas, peras y superficies similares son todas de curvatura *positiva*; mientras que las otras se llaman superficies de curvatura *negativa*. En general, un mundo de dos dimensiones tendrá una curvatura que varía de un lugar a otro y puede ser positiva en algunos lugares y negativa en otros. En general, entendemos por espacio curvo simplemente uno en el que las reglas de la geometría de Euclides pierden validez por discrepancia de un signo u otro. El grado de curvatura —definido por el exceso radial, digamos— puede variar de un lugar a otro.

Señalemos que, según nuestra definición de curvatura, resulta bastante sorprendente que un cilindro no sea curvo. Si un insecto viviera sobre un cilindro, como muestra la figura 42-14, encontraría que los triángulos, cuadrados y círculos tienen el mismo comportamiento que sobre un plano. Esto es fácil de ver, pensando simplemente cómo se verían todas las figuras si el cilindro se desarrollase sobre un plano. Entonces se puede hacer que todas las figuras geométricas correspondan exactamente a las que están en el plano. Por lo que no hay forma de que un insecto que viva sobre un cilindro (suponiendo que no dé la vuelta a todo el cilindro sino que realice sólo mediciones locales) descubra que su espacio *no* es curvo. De lo que vamos a hablar es de lo que se llama más precisamente curvatura *intrínseca*; esto es, una curvatura que se puede sólo encontrar por mediciones en una región local. (Un cilindro no tiene curvatura intrínseca.) Éste es el sentido que pretendía Einstein cuando decía que nuestro espacio es curvo. Pero, hasta ahora, hemos definido solamente un espacio curvo en dos dimensiones; debemos seguir adelante para ver qué puede significar esta idea en tres dimensiones.

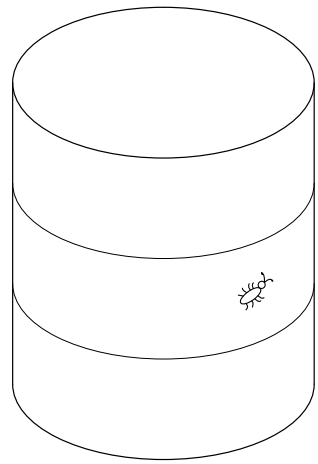


Figura 42-14. Espacio bidimensional con curvatura intrínseca nula.

42-2 La curvatura en el espacio tridimensional

Vivimos en un espacio tridimensional y vamos a considerar la idea de que el espacio tridimensional es curvo. Ustedes me dirán, "¿pero cómo puede imaginar que se curva en alguna dirección?" Bueno, no podemos imaginarnos que el espacio se curva en alguna dirección porque nuestra imaginación no es lo suficientemente buena. (Quizá sea bueno que no podamos imaginarnos mucho, a fin de no desvincularnos demasiado del mundo real.) Pero podemos siempre *definir* una curvatura sin salirnos de nuestro mundo tridimensional. Todo lo que hemos discutido respecto a dos dimensiones fue simplemente un ejercicio para mostrarles cómo podemos obtener una definición de la curvatura que no requería que pudiéramos "mirar hacia dentro" desde fuera.

Podemos determinar si nuestro mundo es o no curvo de una manera bastante análoga a la usada por los señores que viven sobre la esfera o sobre la placa caliente. Puede que no seamos capaces de distinguir entre estos dos casos, pero ciertamente podemos distinguirlos del caso del espacio plano, es decir, del plano ordinario. ¿Cómo? Bastante fácil: se traza un triángulo y se miden los ángulos. O trazamos un gran círculo y medimos la circunferencia y el radio. O tratamos de trazar un cuadrado preciso, o construir un cubo. En cada caso verificamos si se cumplen las leyes de la geometría. Si no se cumplen decimos que nuestro espacio es curvo. Si trazamos un gran triángulo y la suma de los ángulos excede los 180 grados, podemos decir que nuestro espacio es curvo. O si medimos el radio de un círculo y no resulta igual a la circunferencia sobre 2π, podemos decir que nuestro espacio es curvo.

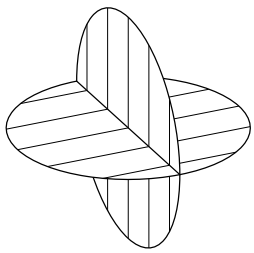


Figura 42-15. El exceso radial puede ser diferente para círculos con diferentes orientaciones.

Notarán que en tres dimensiones la situación puede ser mucho más complicada que para dos. En dos dimensiones hay cierto grado de curvatura en cualquier punto. Pero en tres dimensiones puede haber *varias componentes* de la curvatura. Si trazamos un triángulo sobre cierto plano, podremos obtener una respuesta diferente de la que obtendríamos si orientamos el plano del triángulo de una manera diferente. O bien, podemos tomar el ejemplo de un círculo. Supongan que dibujamos un círculo y medimos el radio y no coincide con $C/2\pi$, así que hay cierto exceso radial. Dibujamos ahora otro círculo perpendicular al primero —como en la figura 42-15—. No es necesario que el exceso sea exactamente el mismo para ambos círculos. Efectivamente, puede haber un exceso positivo para el círculo de un plano y un defecto (exceso negativo) para el círculo del otro plano.

Quizá estén pensando en una idea mejor: ¿no podríamos evitar todas estas componentes utilizando una *esfera* en tres dimensiones? Podemos especificar una esfera tomando todos los puntos de una superficie que estén a la misma distancia de un punto del espacio. Luego podemos medir la superficie trazando una red rectangular muy fina sobre la superficie de la esfera y sumando todos los pedazos de superficie. De acuerdo con Euclides la superficie total A debería ser 4π por el cuadrado del radio; por lo tanto, podemos definir un "radio predicho" como $\sqrt{A/4\pi}$. Pero también podemos medir directamente el radio haciendo un agujero hasta el centro y midiendo la distancia. Nuevamente podemos tomar el radio medido menos el predicho y llamar exceso radial a la diferencia,

$$r_{\text{exceso}} = r_{\text{med}} - \left(\frac{\text{área medida}}{4\pi}\right)^{1/2},$$

que será una medida perfectamente satisfactoria de la curvatura. Tiene la gran ventaja de que no depende de cómo se orienta un triángulo o un círculo.

Pero el exceso radial de una esfera tiene también una desventaja; no caracteriza completamente al espacio. Da lo que se llama la *curvatura media* del mundo tridimensional, puesto que es un efecto promedio sobre las diversas curvaturas. Siendo un promedio, no resuelve completamente el problema de definir la geometría. Si solamente se conoce este número no se pueden predecir todas las propiedades de la geometría del espacio, porque no se puede decir qué sucede con un círculo de orientación diferente. La definición completa requiere la especificación de seis "números de curvatura" en cada punto. Por supuesto, los matemáticos saben cómo escribir todos estos números. Pueden algún día leer en un libro de matemáticas cómo se los escribe a todos de una manera elegante y con gran clase, pero es una buena idea conocer primero en forma rudimentaria qué es lo que tratan de escribir. Para la mayoría de nuestros objetivos la curvatura media será suficiente.*

42-3 Nuestro espacio es curvo

Ahora viene el problema principal. ¿Es cierto? Es decir, el espacio físico real de tres dimensiones en que vivimos, ¿es curvo? Una vez que han tenido imaginación suficiente para darse cuenta de la posibilidad de que el espacio sea curvo, la mente humana siente naturalmente curiosidad por saber si el mundo real es o no curvo. Se han hecho medidas geométricas directas para tratar de descubrirlo, pero no se han encontrado desviaciones. Por otro lado, con razonamientos sobre la gravitación, Einstein descubrió que el espacio *es* curvo y queremos contarles cuál es la ley de Einstein para el grado de curvatura, y hablarles también un poco de cómo llegó a su descubrimiento.

* Para completar las cosas debemos mencionar algo más. Si quieren llevar a tres dimensiones la placa caliente como modelo de espacio curvo, tienen que imaginar que la longitud de la regla no sólo depende de dónde la ponen, sino también de qué orientación tiene cuando se la coloca sobre algo. Es una generalización del caso simple en que la longitud de la regla depende de dónde está, pero es la misma si se la orienta en dirección norte-sur, este-oeste o arriba-abajo. Se necesita esta generalización si quieren representar un espacio tridimensional de geometría arbitraria con ese modelo, aunque da la casualidad que no es necesaria en dos dimensiones.

Einstein dijo que el espacio es curvo y que la materia es la responsable de la curvatura. (La materia es además el origen de la gravitación, por lo que la gravedad está relacionada con la curvatura —pero esto vendrá más adelante en este capítulo—.) Supongamos, para facilitar las cosas, que la materia está distribuida en forma continua con cierta densidad, que puede variar, sin embargo, tanto como quieran de un lugar a otro.* La regla que Einstein dio para la curvatura es la siguiente: si en una región del espacio hay materia y tomamos una esfera suficientemente pequeña como para que la densidad ρ de la materia que contiene sea efectivamente constante, entonces el *exceso radial* para la esfera es proporcional a la masa que contiene. Utilizando la definición de exceso radial tenemos lo siguiente:

$$\text{Exceso radial} = r_{\text{med}} - \sqrt{\frac{A}{4\pi}} = \frac{G}{3c^2} \cdot M. \tag{42.3}$$

Aquí, G es la constante gravitacional (de la teoría de Newton), c es la velocidad de la luz y $M = 4\pi\rho r^3/3$ es la masa de la materia contenida en la esfera. Ésta es la ley de Einstein para la curvatura media del espacio.

Supongan que tomamos la Tierra como ejemplo y olvidamos que la densidad varía de un punto a otro —así que no tenemos que hacer ninguna integral—. Supongan que medimos la superficie de la Tierra muy cuidadosamente y luego hacemos un agujero hasta el centro y medimos el radio. A partir del área de la superficie podríamos calcular el radio predicho que se obtendría haciendo la superficie igual a $4\pi r^2$. Al comparar el radio predicho con el efectivo, encontraríamos que el radio efectivo excede al predicho en la cantidad dada por la ecuación (42.3). La constante $G/3c^2$ es de aproximadamente 2.5×10^{-29} cm por gramo, así que por cada gramo de material el radio medido difiere del predicho en 2.5×10^{-29} cm. Introduciendo la masa de la Tierra, que es de alrededor de 6×10^{27} gramos, se encuentra que la Tierra tiene un radio que es 1.5 milímetros mayor que el que debería tener de acuerdo a su superficie.† Haciendo el mismo cálculo para el Sol, encuentran que el radio del Sol es medio kilómetro más largo.

Deben notar que la ley dice que la curvatura *media por encima* de la superficie de la Tierra es cero. Pero esto *no* significa que todas las componentes de la curvatura sean cero. Puede haber —y en efecto la hay— cierta curvatura por encima de la Tierra. Para un círculo en un plano habrá un exceso radial con un signo para una cierta orientación y con el signo opuesto para otra orientación. Se encuentra inmediatamente que el promedio sobre una esfera es cero cuando no hay masa *dentro* de ella. A propósito, se encuentra que hay una relación entre las diversas componentes de la curvatura y la *variación* de la curvatura media de un lugar a otro. Así, si conocen la curvatura media en todas partes, pueden determinar los detalles de la curvatura en cada punto. La curvatura media por encima de la Tierra varía con la altura, así que algunos componentes de la curvatura no son cero, dentro y fuera de la Tierra. Y es esta curvatura lo que vemos como fuerza gravitacional.

Supongan que tenemos un insecto sobre un plano y que el "plano" tiene pequeñas ronchas en la superficie. Donde haya una roncha el insecto concluirá que su espacio tiene pequeñas regiones con curvatura local. Tenemos lo mismo en dimensión tres. Donde hay un terrón de materia, nuestro espacio tridimensional tendrá una curvatura local —una especie de roncha tridimensional—.

Si hacemos un montón de protuberancias sobre un plano podría haber una curvatura global además de todas las ronchas —la superficie podría llegar a parecerse a una pelota—. Sería interesante saber si nuestro espacio tiene una curvatura media total además de las ronchas locales, debidas a los terrones de materia como la Tierra y el Sol. Los astrofísicos han estado tratando de resolver esta cuestión realizando mediciones en galaxias muy distantes. Por ejemplo, si el número de galaxias que vemos en un cascarón esférico a una gran distancia

* Nadie —ni Einstein— sabe cómo hacer las cosas si la materia está concentrada en puntos.

† Aproximadamente, porque la densidad no es independiente del radio como estamos suponiendo.

fuera diferente del que sería de esperar según nuestro conocimiento del radio del cascarón tendríamos una medida de exceso radial de una esfera tremendamente grande. A partir de tales mediciones se espera determinar si el universo entero es en promedio plano o redondo —si es "cerrado" como una esfera, o "abierto" como un plano—. Es posible que hayan oído hablar de los debates que se realizan sobre este asunto. Hay debates debido a que las mediciones astronómicas todavía no son nada concluyentes; los datos experimentales no son lo suficientemente precisos para dar una respuesta definida. Desafortunadamente, no contamos con la más vaga idea sobre la curvatura global de nuestro universo en una gran escala.

42-4 Geometría en el espacio-tiempo

Ahora tenemos que hablar del tiempo. Como saben por la teoría especial de la relatividad, las mediciones del espacio y las del tiempo están interrelacionadas. Y sería una especie de locura que algo sucediera en el espacio en lo que el tiempo no interviniera. Recordarán que la medición del tiempo depende de la velocidad con que se mueven. Por ejemplo, si observamos un sujeto que se va en una nave espacial vemos que las cosas suceden más lentamente para él que para nosotros. Digamos que parta de viaje y vuelva exactamente en 100 segundos *según nuestros relojes*; su reloj podría decir que ha estado fuera solamente 95 segundos. En comparación con los nuestros, su reloj —y todos los otros procesos, como los latidos de su corazón— han andado más lentamente.

Consideremos ahora un problema interesante. Supongan que uno de ustedes es el que está en la nave espacial. Parte a una señal dada y regresa al punto de partida justo en el momento de recibir una señal posterior —digamos que exactamente 100 segundos después de acuerdo con *nuestro* reloj—. Y le pedimos además que realice el viaje de tal manera que *su* reloj marque el intervalo de tiempo *más largo posible*. ¿Cómo se deberá mover? Deberá permanecer quieto. Si realiza el más pequeño movimiento su reloj marcará menos de 100 segundos en el momento de llegar de vuelta.

Supongan, sin embargo, que modificamos un poco el problema. Supongan que le pedimos que parta del punto A a una señal dada y que vaya al punto B (ambos fijos en relación a nosotros) y que lo haga de tal manera que esté de regreso justo en el momento de una segunda señal (digamos que 100 segundos después según nuestro reloj fijo). Nuevamente le pedimos que realice el viaje de manera que regrese con su reloj marcando el mayor tiempo posible. ¿Cómo hacerlo? ¿Por cuál camino y ajustándose a qué horario *su* reloj marcará el mayor intervalo de tiempo cuando regrese? La respuesta es que tardará el mayor tiempo posible desde *su* punto de vista si realiza el viaje a velocidad uniforme en línea recta. La razón: cualquier movimiento extra y cualquier mayor velocidad extra hará andar más lentamente su reloj. (Como la desviación temporal depende del *cuadrado* de la velocidad, lo que pierden por ir más rápido en un lado nunca lo pueden ganar yendo más lentamente en otro lugar.)

Lo esencial de todo esto es que podemos usar la idea para definir "una recta" en el espacio-tiempo. Lo análogo de una recta en el espacio es un *movimiento* a velocidad uniforme en dirección fija para el espacio-tiempo.

La curva de menor distancia en el espacio corresponde en el espacio-tiempo no al camino de menor tiempo, sino al de *mayor* tiempo, a causa de las cosas divertidas que suceden con los signos de los t términos temporales en relatividad. Movimiento en "línea recta" —lo análogo a "velocidad rectilínea uniforme"— es entonces el movimiento que transporta un reloj desde un lugar en un cierto instante hasta otro lugar en otro instante de modo que el reloj marque el mayor tiempo posible. Ésta será nuestra definición análoga de recta en el espacio-tiempo.

42-5 La gravedad y el principio de equivalencia

Ahora bien, estamos listos para discutir las leyes de la gravitación. Einstein trataba de construir una teoría de la gravitación que se adaptase a la teoría de la

relatividad que había desarrollado anteriormente. Continuó en su esfuerzo hasta que llegó a un principio importante que lo guió para obtener las leyes correctas. Este principio se basa en la idea de que cuando algo cae libremente, todo en su interior parece no tener peso. Por ejemplo, un satélite en órbita cae libremente en la gravedad de la Tierra, y un astronauta a bordo se siente desprovisto de peso. Esta idea, enunciada con mayor precisión, se llama *principio de equivalencia de Einstein*. Depende del hecho de que todos los objetos caen exactamente con la misma aceleración, cualesquiera sean su masa o su composición. Si tenemos una nave espacial que se está moviendo con los motores apagados —de modo que está en caída libre— con un hombre en su interior, las leyes que gobiernan la caída del hombre y la de la nave son las mismas. Así, si se ubica en el medio de la nave, permanecerá allí. No cae *respecto a la nave*. Esto es lo que queremos decir cuando decimos que "no tiene peso".

Supongan ahora que están en un cohete espacial que está acelerando. ¿Acelerando respecto a qué? Decimos simplemente que sus motores están encendidos generando un empuje de manera que no está moviéndose en caída libre. Imaginemos además que están muy lejos en el espacio vacío de manera que prácticamente no hay fuerzas gravitacionales actuando sobre la nave. Si la nave tiene una aceleración de "1 g" podrán pararse sobre el "piso" y sentirán su peso normal. Además, si sueltan una pelota, "caerá" hacia el piso. ¿Por qué? Porque la nave está acelerando "hacia arriba", pero sobre la pelota no están actuando fuerzas, así que no sufrirá aceleración; se quedará atrás. Dentro de la nave la pelota aparecerá como teniendo una aceleración de "1 g" hacia abajo.

Comparemos ahora esta situación con la de una nave espacial que permanece en reposo sobre la superficie de la Tierra. *¡Todo es lo mismo!* Se sentirán apretados hacia el piso, una pelota caerá con una aceleración de 1 g, y así sucesivamente. Y entonces ¿cómo podrían distinguir desde dentro de una nave espacial si están posados sobre la Tierra o si se están acelerando en el espacio libre? De acuerdo con el principio de equivalencia de Einstein ¡no hay forma de decirlo si solamente realizan mediciones de lo que sucede en el interior!

Para ser estrictamente correctos, esto es cierto, sólo para un punto en el interior de la nave. El campo gravitacional de la Tierra no es exactamente uniforme, así que una pelota en caída libre sufre aceleraciones ligeramente diferentes en distintos lugares —la dirección y el módulo cambian—. Pero si imaginamos un campo gravitacional rigurosamente uniforme, un sistema con una aceleración constante lo imita por completo en todos los aspectos. Éste es el fundamento del principio de equivalencia.

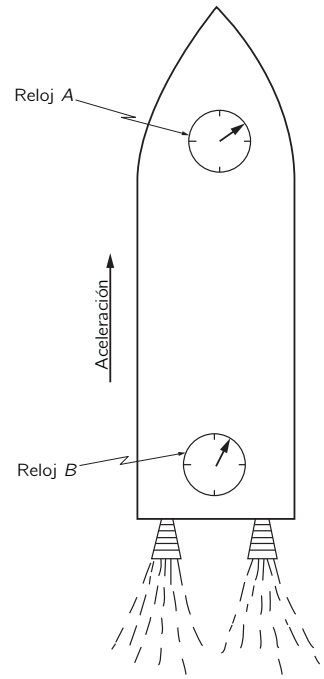


Figura 42-16. Cohete espacial que acelera llevando dos relojes.

42-6 La velocidad de los relojes en un campo gravitacional

Queremos aplicar ahora el principio de equivalencia para encontrar algo extraño que ocurre en un campo gravitacional. De modo que les mostraremos un poco de lo que sucede en un cohete espacial y que probablemente no hubieran esperado que sucediera en un campo gravitacional. Supongan que colocamos un reloj en la "cabeza" de la nave espacial —es decir, en el extremo "delantero"— y colocamos otro reloj idéntico en la "cola", como en la figura 42-16. Llamemos A y B a los dos relojes. Si hacemos una comparación estos dos relojes cuando la nave acelera, el reloj de la cabeza parece marchar más rápido que el de la cola. Para ver esto, imaginemos que el reloj delantero emite un destello de luz cada segundo y que ustedes están sentados en la cola comparando la llegada de los destellos de luz con los tic-tac del reloj B. Digamos que el cohete está en la posición a de la figura 42-17 cuando el reloj A emite un destello, y en la posición b cuando el destello llega al reloj B. Posteriormente, la nave estará en la posición c cuando el reloj A emita su próximo destello, y en la posición d cuando ven que llega el reloj B.

El primer destello recorre la distancia L_1 y el segundo destello la distancia menor L_2. Es una distancia menor porque la nave está acelerando y tiene una velocidad mayor en el momento del segundo destello. Pueden ver entonces, que si los dos destellos fueron emitidos por el reloj A con una separación de 1 segundo,

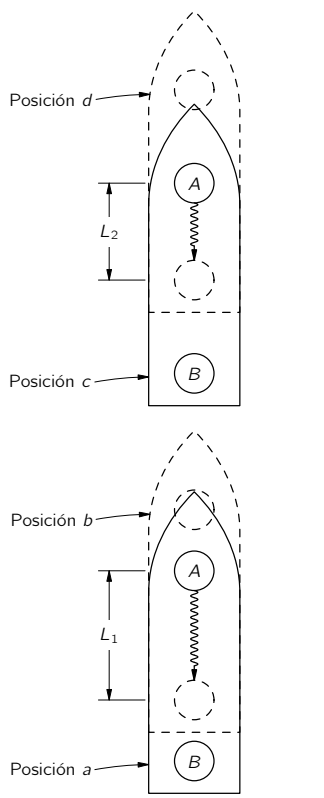


Figura 42-17. Un reloj en la cabeza de un cohete espacial que acelera parece adelantarse respecto a un reloj en la cola.

llegarán al reloj B con una separación algo menor que un segundo, puesto que el segundo destello no tarda tanto tiempo en el recorrido. La misma cosa sucederá también con todos los destellos posteriores. Así, si estuviesen sentados en la cola podrían concluir que el reloj A está marchando más rápido que el B. Si hicieran la misma cosa a la inversa —considerando que el reloj B emite luz y observándola desde el reloj A— encontrarían que el reloj B está marchando *más lento* que el A. Todo concuerda y no hay nada de misterioso en todo esto.

Pero consideremos ahora que el cohete espacial está en reposo en el campo de gravedad terrestre. *Sucede la misma cosa.* Si se sientan en el suelo con un reloj y observan otro colocado en un estante alto, ¡éste aparecerá como marchando más rápido que el que está en el suelo! Ustedes dirán: "Pero está mal. Los tiempos deben ser iguales. Si no hay aceleración no hay razón para que los relojes aparezcan en desacuerdo". Pero debe ser así si el principio de equivalencia es correcto. Y Einstein insistió en que el principio *era* correcto, y siguió adelante de manera correcta, con coraje. Propuso que los relojes ubicados en lugares distintos de un campo gravitacional deben aparecer marchando a velocidades diferentes. Pero si uno *aparece* siempre marchando a una velocidad diferente respecto al otro, entonces desde el punto de vista del primero, el otro *está* marchando a una velocidad diferente.

Pero ahora ven que tenemos para los relojes algo análogo a la dilatación de la regla que hablamos antes, cuando teníamos el insecto sobre la placa caliente. Imaginábamos que reglas, insectos y todas las cosas cambiaban de longitud de la misma manera a las diversas temperaturas de modo tal que nunca podían darse cuenta de que sus metros cambiaban al moverse sobre la placa caliente. Es lo mismo que con los relojes en un campo gravitacional. Cada reloj que colocamos a un nivel más alto se ve marchar más rápidamente. Los latidos del corazón van más rápido, todos los procesos marchan más rápido.

Si no fuera así, podrían hallar la diferencia entre un campo gravitacional y un sistema de referencia acelerado. La idea de que el tiempo puede variar de un lugar a otro es difícil, pero ésta es la que usó Einstein, y es la correcta —aunque no lo crean—.

Usando el principio de equivalencia podemos calcular cuánto varía la velocidad de un reloj con la altura en un campo gravitacional. Calculamos simplemente la discrepancia aparente entre los dos relojes del cohete espacial en aceleración. La forma más simple de hacerlo es utilizar el resultado que encontramos en el capítulo 34 del volumen I para el efecto Doppler. Encontramos allí —vean la ecuación (34.14)— que si v es la velocidad *relativa* de una fuente y un receptor, la frecuencia *recibida* ω está relacionada con la frecuencia *emitida* ω_0 mediante

$$\omega = \omega_0 \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{42.4}$$

Si consideramos ahora el cohete espacial que acelera de la figura 42-17, el emisor y el receptor se están moviendo con igual velocidad en cualquier instante. Pero durante el tiempo que tarda la señal de luz en ir desde el reloj A hasta el reloj B la nave ha acelerado. De hecho, ha adquirido la velocidad adicional gt, donde g es la aceleración y t es el tiempo que ha tardado la luz en recorrer la distancia H entre A y B. Este tiempo es muy cercano a H/c. Así, cuando las señales llegan a B, la nave ha aumentado sus velocidades en gH/c. El receptor tiene siempre esta velocidad *respecto al emisor* en el instante en que la señal llega hasta él. Así ésta es entonces la velocidad que debemos usar en la fórmula del corrimiento Doppler, ecuación (42.4). Suponiendo que la aceleración y la longitud de la nave son suficientemente pequeñas, ya que esta velocidad es mucho menor que c, podemos despreciar el término en v^2/c^2. Tenemos que

$$\omega = \omega_0\left(1 + \frac{gH}{c^2}\right). \tag{42.5}$$

Así, tenemos la siguiente relación para los dos relojes de la nave espacial:

$$\text{(Frecuencia en el receptor)} = \text{(Frecuencia en el emisor)}\left(1 + \frac{gH}{c^2}\right), \qquad (42.6)$$

donde H es la altura del emisor *sobre* el receptor.

Según el principio de equivalencia el mismo resultado debe valer para dos relojes separados por la altura H en un campo gravitacional con una aceleración de caída libre igual a g.

Ésta es una idea tan importante que querríamos demostrar que se deduce de otra ley de la física —de la conservación de la energía—. Sabemos que la fuerza gravitacional sobre un objeto es proporcional a su masa M, la cual está relacionada con su energía interna total E por $M = E/c^2$. Por ejemplo, la masa del núcleo determinada a partir de las *energías* de las reacciones nucleares que transmutan un núcleo en otro, concuerda con las masas obtenidas a partir de los *pesos* atómicos.

Consideremos ahora un átomo que tiene un estado de energía mínima total E_0, y un estado de energía más alta E_1, y que puede pasar del estado E_1 al E_0 mediante la emisión de luz. La frecuencia ω de la luz estará dada por

$$\hbar\omega = E_1 - E_0. \qquad (42.7)$$

Supongan ahora que tenemos tal átomo en el estado E_1 sobre el suelo y que lo llevamos desde el piso hasta la altura H. Para hacerlo debemos realizar cierto trabajo para subir la masa $m_1 = E_1/c^2$ contra la fuerza de gravedad. La cantidad de trabajo realizado es

$$\frac{E_1}{c^2}\, gH. \qquad (42.8)$$

Luego dejamos que el átomo emita un fotón y vaya al estado de energía más bajo E_0. Después llevamos el átomo nuevamente al suelo. En el viaje de vuelta la masa es E_0/c^2; se restituye la energía

$$\frac{E_0}{c^2}\, gH, \qquad (42.9)$$

así que hemos realizado una cantidad neta de trabajo igual a

$$\Delta U = \frac{E_1 - E_0}{c^2}\, gH. \qquad (42.10)$$

Al emitir el fotón, el átomo cede la energía $E_1 - E_0$. Supongan ahora que el fotón haya bajado hasta el piso y que haya sido absorbido. ¿Cuánta energía entregará allí? Pensarán a primera vista que debe entregar precisamente la energía $E_1 - E_0$. Pero esto no puede ser correcto si se conserva la energía, como se deduce a partir del siguiente razonamiento. Partimos con la energía E_1 sobre el piso. Al final la energía al nivel del piso es la energía E_0 del átomo en su estado más bajo, más la energía E_f recibida del fotón. En el intermedio tuvimos que suministrar la energía adicional ΔU de la ecuación (42.10). Si la energía se conserva, la energía final al nivel del piso debe ser mayor que la de partida en una cantidad que es precisamente el trabajo que hemos realizado. Es decir que debemos tener

$$E_\mathrm{f} + E_0 = E_1 + \Delta U,$$

o (42.11)

$$E_\mathrm{f} = (E_1 - E_0) + \Delta U.$$

El fotón *no* puede llegar al piso precisamente con la energía $E_1 - E_0$ con la que partió, sino con un *poco más de energía*. De otra manera se había perdido cierta energía. Si sustituimos en la ecuación (42.11) el ΔU que obtuvimos en la ecuación (42.10) obtenemos que el fotón llega al suelo con la energía

$$E_\mathrm{f} = (E_1 - E_0)\left(1 + \frac{gH}{c^2}\right). \qquad (42.12)$$

Pero un fotón con energía E_f tiene la frecuencia $\omega = E_f/\hbar$. Llamando ω_0 a la frecuencia del fotón *emitido* —que según la ecuación (42.7) es igual a $(E_1 - E_0)/\hbar$— el resultado de la ecuación (42.12) da nuevamente la relación (42.5) entre las frecuencias del fotón al ser absorbido sobre el suelo y al ser emitido.

Se puede obtener ahora el mismo resultado de otra manera. Un fotón de frecuencia ω_0 tiene la energía $E_0 = \hbar\omega_0$. Como la energía E_0 tiene una masa relativista E_0/c^2 el fotón tiene una masa (que *no es* masa en reposo) $\hbar\omega_0/c^2$, y es "atraído" por la Tierra. Cayendo desde la altura H ganará una energía adicional $(\hbar\omega_0/c^2)gH$, de manera que llega con la energía

$$E = \hbar\omega_0\left(1 + \frac{gH}{c^2}\right).$$

Pero su frecuencia después de la caída es $E/\hbar$, dando nuevamente el resultado de la ecuación (42.5). Nuestras ideas sobre la relatividad, la física cuántica y la conservación de la energía encajan perfectamente sólo si las predicciones de Einstein sobre los relojes en un campo gravitacional son correctas. Las variaciones de frecuencia de las que estamos hablando son normalmente muy pequeñas. Por ejemplo, para una diferencia de altura de 20 metros en la superficie de la Tierra, la diferencia de frecuencia es solamente de alrededor de dos partes en 10^{15}. Sin embargo, precisamente tal cambio ha sido encontrado recientemente en forma experimental usando el efecto Mössbauer.* Einstein tenía toda la razón.

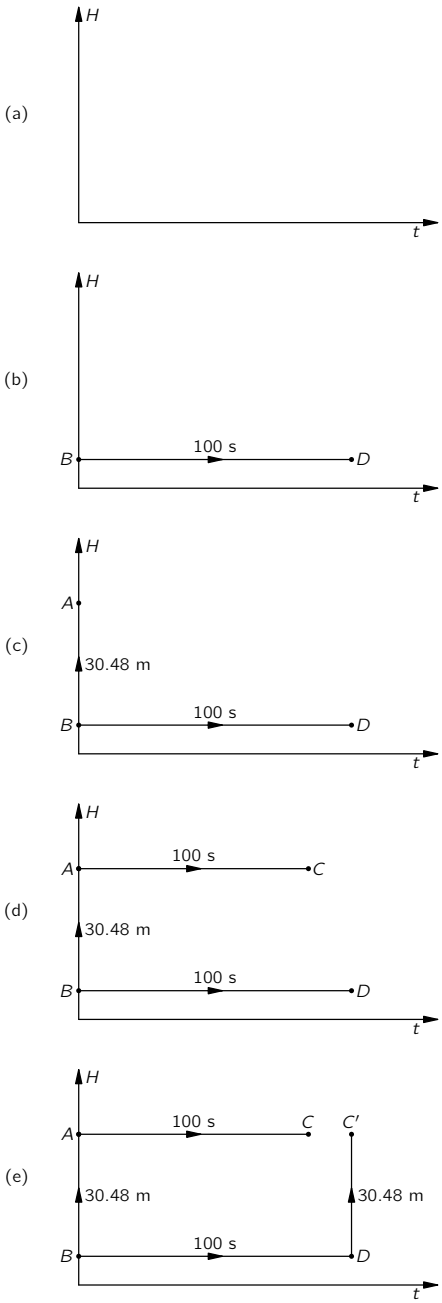


Figura 42-18. Intento de construcción de un rectángulo en el espacio-tiempo t.

42-7 La curvatura del espacio-tiempo

Ahora queremos relacionar lo que hemos estado diciendo con la idea del espacio-tiempo curvo. Ya hemos puntualizado que si el tiempo transcurre con diferente rapidez en lugares distintos, es análogo al espacio curvo de la placa caliente. Pero es más que una analogía; significa que el espacio-tiempo *es* curvo. Tratemos de hacer alguna geometría en el espacio-tiempo. Esto puede parecer extraño al principio pero frecuentemente hemos construido diagramas en el espacio-tiempo representando distancias según un eje y tiempo según otro eje. Supongan que tratamos de construir un rectángulo en el espacio-tiempo. Comenzamos por trazar una gráfica de altura H en función de t como en la figura 42-18(a). Para construir la base de nuestro rectángulo tomamos un objeto que *en reposo* está a la altura H_1 y seguimos su línea de universo durante 100 segundos. Obtenemos la línea BD de la parte (b) de la figura que es paralela al eje t. Tomemos ahora otro objeto que esté 30.48 metros sobre el primero en $t = 0$. Parte del punto A en la figura 42-18(c). Ahora seguimos su línea de universo durante 100 segundos medidos por un reloj en A. El objeto va de A a C, como se muestra en la parte (d) de la figura. Pero notemos que como el tiempo transcurre con rapidez diferente a las dos alturas —hemos supuesto que hay un campo gravitacional— los dos puntos C y D no son simultáneos. Si queremos completar el cuadrado trazando una línea al punto C' que está 30.48 metros sobre D al mismo tiempo, como en la figura 42-18(e), los lados no empalman. Es esto lo que queremos decir cuando decimos que el espacio-tiempo es curvo.

42-8 El movimiento en el espacio-tiempo curvo

Consideremos un acertijo interesante. Tenemos dos relojes idénticos, A y B, ubicados juntos sobre la superficie de la Tierra como en la figura 42-19. Llevamos ahora el reloj A hasta cierta altura H, lo dejamos ahí un rato y lo llevamos nuevamente al suelo de modo que llegue precisamente en el instante en que el reloj B ha avanzado 100 segundos. El reloj A marcará algo así como 107 segundos, porque marchó más rápido cuando estaba en el aire. Ahora bien, éste es el acertijo. ¿Cómo debemos mover el reloj A de manera que marque el mayor tiempo posible —suponiendo siempre que regresa cuando B marca 100 segundos—? Ustedes dirán: "Es fácil. Simplemente lleve a A tan alto como pueda.

* R. V. Pound y G. A. Rebka, Jr., *Physical Review Letters*, Vol. **4**, p. 337 (1960).

Por lo tanto, andará lo más rápidamente posible, y marcará la máxima hora cuando regrese". Equivocado. Olvidan algo: tenemos solamente 100 segundos para subir y bajar. Si vamos muy alto, debemos ir muy rápido para llegar allí y regresar en 100 segundos. Y no deben olvidar el efecto de la relatividad especial según la cual los relojes en movimiento se *atrasan* en el factor $\sqrt{1-v^2/c^2}$. Este efecto relativista actúa en el sentido de hacer que el reloj A marque *menos tiempo* que el B. Ven que tenemos una especie de juego. Si nos quedamos quietos con el reloj A obtenemos 100 segundos. Si subimos lentamente hasta una pequeña altura y regresamos lentamente, podemos obtener un tiempo algo menor que 100 segundos. Si vamos un poco más alto, puede ser que podamos ganar un poco más. Pero si vamos demasiado alto tenemos que movernos rápido para llegar y puede que el reloj se atrase tanto como para que regresemos en menos de 100 segundos. ¿Qué programa de altura en función del tiempo —hasta qué altura y con qué velocidad llegar allí, ajustadas cuidadosamente para regresar cuando el reloj B ha marchado 100 segundos— podrá dar el mayor tiempo posible marcado por el reloj A?

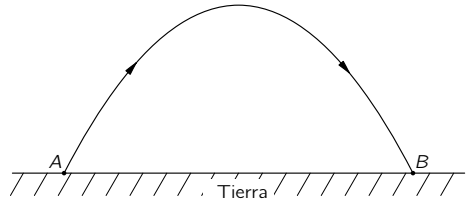


Figura 42-19. En un campo gravitacional uniforme la trayectoria con el tiempo máximo adecuado para un tiempo fijo transcurrido es una parábola.

Respuesta: calculen con qué velocidad hay que lanzar una pelota al aire de modo que regrese a la tierra en exactamente 100 segundos. El movimiento de la pelota —partiendo rápido, frenándose, deteniéndose y volviendo hacia abajo— es exactamente el movimiento correcto para hacer que el tiempo sea el máximo en un reloj de pulsera atado a la pelota.

Consideremos ahora un acertijo ligeramente diferente. Tenemos dos puntos A y B sobre la superficie de la Tierra a cierta distancia uno de otro. Haremos el mismo juego que antes para hallar lo que llamamos línea recta. Preguntamos cómo debemos ir de A a B de manera que el tiempo que marca nuestro reloj en movimiento sea el mayor posible —suponiendo que partimos de A con una señal dada y que llegamos a B con otra, digamos que 100 segundos más tarde según un reloj fijo—. Ahora dirán: "Bueno, hemos encontrado antes que lo que hay que hacer es moverse en línea recta a una velocidad uniforme determinada a fin de llegar a B exactamente 100 segundos más tarde. Si no seguimos una línea recta se necesitará ir más rápido y nuestro reloj se atrasará". ¡Pero un momento! Eso era antes de tomar en cuenta la gravedad. ¿No es mejor subir un poco y luego bajar? ¿Acaso nuestro reloj no se adelantará un poco cuando estemos más alto? Así es en verdad. Si resuelven el problema matemático de ajustar la curva del movimiento de manera que el tiempo transcurrido para el reloj en movimiento sea el máximo posible, encuentran que el movimiento es una parábola, la misma curva seguida por cualquier cosa que se mueve en una trayectoria balística libre en el campo gravitacional, como en la figura 42-19. Por lo tanto, la ley de movimiento en un campo gravitacional se puede enunciar así: *Un objeto se mueve siempre de un punto a otro de manera que un reloj que lo acompaña indica un tiempo más largo que el que indicaría sobre cualquier otra trayectoria posible* —por supuesto, con las mismas condiciones inicial y final—. El tiempo medido por el reloj en movimiento se llama frecuentemente "tiempo propio". En caída libre, la trayectoria hace máximo el tiempo propio del objeto que cae.

Veamos cómo funciona todo esto. Comencemos con la ecuación (42.5) que dice que el *adelanto* de frecuencia de un reloj en movimiento es

$$\frac{\omega_0 g H}{c^2}. \tag{42.13}$$

Además de esto, debemos recordar que hay una corrección de signo opuesto, por efecto de la velocidad. Para este efecto sabemos que

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-v^2/c^2}.$$

Aunque el principio es válido para cualquier velocidad, tomemos un ejemplo en que la velocidad sea siempre mucho menor que c. Podemos escribir entonces esta ecuación en la forma

$$\omega = \omega_0(1 - v^2/2c^2),$$

y el atraso de frecuencia de nuestro reloj es

$$-\omega_0 \frac{v^2}{2c^2}. \tag{42.14}$$

Combinando los dos términos (42.13) y (42.14) tenemos que

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{c^2}\left(gH - \frac{v^2}{2}\right). \tag{42.15}$$

Tal corrimiento de frecuencia de nuestro reloj en movimiento significa que si medimos un tiempo dt en un reloj fijo, el reloj en movimiento registrará el tiempo

$$dt\left[1 + \left(\frac{gH}{c^2} - \frac{v^2}{2c^2}\right)\right]. \tag{42.16}$$

El atraso total de tiempo sobre la trayectoria es la integral del término adicional respecto al tiempo, es decir

$$\frac{1}{c^2}\int\left(gH - \frac{v^2}{2}\right)dt, \tag{42.17}$$

que se supone es un máximo.

El término gH es precisamente el potencial gravitacional ϕ. Supongan que multiplicamos todo esto por un factor constante $-mc^2$, donde m es la masa del objeto. La constante no cambiará la condición de máximo, pero el signo menos cambia el máximo en un mínimo. La ecuación (42.16) dice entonces que el objeto se moverá de manera que

$$\int\left(\frac{mv^2}{2} - m\phi\right)dt = \text{un mínimo}. \tag{42.18}$$

Pero ahora el integrando es precisamente la diferencia entre las energías cinética y potencial. Y se encuentra en el capítulo 19; verán que al discutir el principio de mínima acción demostramos que las leyes de Newton para un objeto en cualquier potencial se podían escribir exactamente en la forma de la ecuación (42.18).

42-9 La teoría de la gravitación de Einstein

La forma dada por Einstein a las ecuaciones de movimiento —que el tiempo adecuado debe ser máximo en el espacio-tiempo curvo— da los mismos resultados que las leyes de Newton a bajas velocidades. Mientras Gordon Cooper giraba alrededor de la Tierra, su reloj marcaba la hora más adelantada que la que marcaría en cualquier otra trayectoria que puedan imaginar para su satélite.*

Así, se puede enunciar la ley de gravitación en términos de las ideas de la geometría del espacio-tiempo de esta manera notable. Las partículas siempre toman el tiempo adecuado más largo —en el espacio-tiempo es una cantidad análoga a la "distancia más corta"—. Ésta es la ley de movimiento en un campo gravitacional. La gran ventaja de ponerla en esta forma es que la ley no depende de las coordenadas ni de cualquier otra forma de definir la situación.

Resumamos ahora lo que hemos hecho. Les hemos dado dos leyes para la gravedad:

(1) Cómo cambia la geometría del espacio-tiempo cuando hay materia presente —es decir, que la curvatura expresada en términos del exceso radial es proporcional a la masa contenida en una esfera, ecuación (42.3)—.

(2) Cómo se mueven los objetos si hay solamente fuerzas gravitacionales —es decir, que los objetos se mueven de modo que sus tiempos propios entre dos situaciones terminales sean un máximo—.

* Estrictamente hablando es solamente un máximo *local*. Deberíamos haber dicho que el tiempo adecuado es mayor que para otra trayectoria *vecina*. Por ejemplo, el tiempo adecuado de una órbita elíptica en torno a la Tierra no es necesariamente mayor que para la trayectoria balística de un objeto lanzado a gran altura y que luego cae.

Estas dos leyes corresponden a pares similares de leyes que hemos visto anteriormente. Originalmente describíamos el movimiento en un campo gravitacional en términos de la ley de gravitación de Newton (la de la inversa del cuadrado) y sus leyes de movimiento. Ahora las leyes (1) y (2) las remplazan. Nuestro nuevo par de leyes corresponde también a lo que hemos visto en electrodinámica. Teníamos allí nuestra ley —el sistema de ecuaciones de Maxwell— que determina los campos producidos por las cargas. Nos dice cómo cambia el carácter del "espacio" por la presencia de materia cargada, que es lo que nos da la ley (1) para la gravedad. Además, teníamos una ley sobre cómo se mueven las partículas en los campos dados —$d(m\boldsymbol{v})/dt = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$—. Para la gravedad, esto está dado por la ley (2).

En las leyes (1) y (2) tienen un enunciado preciso de la teoría de la gravitación de Einstein —aunque por lo común la encontrarán en una forma matemática más complicada—. Sin embargo, debemos agregar algo más. Como las escalas de tiempo cambian de lugar a lugar en un campo gravitacional, también lo hacen las escalas de longitud. Las reglas cambian de longitud cuando se mueven. Es imposible que con el espacio y el tiempo tan íntimamente mezclados le suceda algo al tiempo sin que se refleje de algún modo en el espacio. Tomen hasta el ejemplo más simple: se están moviendo respecto a la Tierra. Lo que es *tiempo* desde *su* punto de vista es en parte espacio desde *nuestro* punto de vista. Así, debe haber cambios en el espacio. Es el *espacio-tiempo* en su conjunto el que se distorsiona por la presencia de materia, y esto es más complicado que un cambio en la escala de los tiempos únicamente. Sin embargo, la regla que habíamos dado en la ecuación (42.3) es suficiente para determinar completamente todas las leyes de gravitación, siempre que se entienda que esta regla sobre la curvatura del espacio sirve no sólo para el punto de vista de un observador, sino que es válida para todos. Entonces, un observador en movimiento respecto a una masa de material ve un contenido de masa diferente, debido a la energía cinética que el material tiene respecto a él, y se debe incluir la masa correspondiente a esta energía. La teoría debe ser planteada de manera que cualquiera —se mueva como se mueva— cuando dibuje una esfera, encuentra que el exceso radial es $G/3c^2$ por la masa total (o mejor dicho, $G/3c^4$ por el contenido total de energía) de la esfera. Que esta ley —ley (1)— debe ser válida en cualquier sistema en movimiento es una de las grandes leyes de la gravitación, llamada *ecuación campo de Einstein*. La otra gran ley es la (2) —que las cosas deben moverse de manera que el tiempo apropiado sea un máximo— y se llama *ecuación de movimiento de Einstein*.

Escribir estas leyes en forma completamente algebraica, para compararlas con las leyes de Newton o para relacionarlas con la electrodinámica, es matemáticamente difícil. Pero es la forma en que se presentan actualmente nuestras leyes más completas para la física de la gravedad.

Aunque dan un resultado en concordancia con la mecánica de Newton para el ejemplo simple que hemos considerado, no sucede siempre así. Las tres discrepancias deducidas primeramente por Einstein han sido confirmadas experimentalmente: la órbita de Mercurio no es una elipse fija; la luz de las estrellas que pasa cerca del Sol se desvía el doble de lo que sería de esperar; y la rapidez de los relojes depende de su ubicación en un campo gravitatorio. Siempre que se encuentra que las predicciones de Einstein han diferido de las de la mecánica de Newton, la naturaleza ha elegido las de Einstein.

Vamos a resumir todo lo que hemos dicho de la siguiente manera. Primero, las escalas de tiempo y de distancia dependen del lugar del espacio donde se realice la medición y del tiempo. Esto es equivalente a la afirmación de que el espacio-tiempo es curvo. A partir de la superficie medida de una esfera podemos definir un radio predicho $\sqrt{A/4\pi}$, pero el radio real medido debe tener un exceso sobre aquel que es proporcional (la constante es $G/3c^2$) a la masa total contenida dentro de la esfera. Esto fija el grado exacto de curvatura del espacio-tiempo. Y la curvatura debe ser la misma, mire quien mire y se mueva como se mueva. En segundo lugar, las partículas se mueven en "línea recta" (trayectorias con tiempo adecuado máximo) en este espacio-tiempo curvo. Éste es el contenido de la formulación de Einstein de las leyes de gravitación.

Índice analítico

A

Aberración
  esférica
    de un microscopio electrónico, 29-4
Agua "mojada", 7, 41-1
Agua "seca", 40-13
Aislante, 1-2, 10-1
Aislantes ferromagnéticos, 37-13
Álgebra vectorial, 2-2, 2-7, 2-12, 3-1, 3-12, 27-4
Alnico V, 36-11, 37-11
Ámbar, 1-11, 37-14
Amperímetro, 16-1
Ángulo de incidencia, 33-1
Átomo
  estabilidad de los, 3, 5-1, 5-3
  modelo de Rutherfford-Bohr, 5-3
  modelo de Thomson, 5-3
Autoinducido, 16-5
Autoinductancia, 4, 16-5, 17-1, 17-12

B

Batería, 22-16
Betatrón, 4, 17-1, 17-4, 29-6

C

Cálculo
  de variaciones, 19-3
  diferencial, 3, 2-1
Cálculo integral, 3, 3-1
Calibre de Lorenz, 18-11
Calle de vórtices de Kármán, 41-8
Calor específico, 37-5
Cámara "Boys", 9-11
Campo, 36-7
  de un conductor, 3, 5-1, 5-8
  eléctrico, 3, 1-1, 1-3–1-5, 6-15, 7-1, 7-3, 12-3
  electrostático, 3, 5-1, 7-3
    de una rejilla, 3, 7-1, 7-11
  en dos dimensiones, 3, 7-1, 7-2
  en un conductor cargado, 6-15
  en una cavidad, 3, 5-1, 5-9
  escalar, 3, 2-1, 2-2
  Flujo de un ∼ vectorial, 3-4
  magnético, 3, 4, 1-1, 1-3, 1-4, 13-1, 14-1
    de corrientes estáticas, 13-4, 13-13
  magnetizante, 36-7
  Relatividad de un ∼ eléctrico, 4, 13-1, 13-7
  Relatividad de un ∼ magnético, 4, 13-1, 13-7
  tensorial, 31-12
  vectorial, 3, 1-1, 1-4, 2-1
  viajero, 5, 18-1, 18-5
Campos guía en aceleradores, 6, 29-1, 29-4
Capa límite, 41-9, 41-10
Capacidad, 6-13, 8-2
  de un condensador, 8-2
Capacitancia mutua, 22-18
Capacitor, 22-3
  a altas frecuencias, 5, 23-1, 23-2
Carga de polarización, 4, 10-1, 10-3
Carga imagen, 6-9–6-11
Carga puntual, 1-6
  Energía del campo, 27-2, 27-3
Cavidad resonante, 23-12
Celda hexagonal, 30-7
Celda ortorrómbica, 30-8
Celda unitaria, 30-7
  monoclínica, 30-7
Chispa eléctrica, 9-10
Ciclotrón, 29-4
Circuitos de corriente alterna, 5, 22-1
Circuitos equivalentes, 5, 22-1, 22-11
Circuitos resonantes, 5, 23-1, 23-9, 23-11
Circulación, 3, 1-5, 3-1, 3-9, 3-10
Coeficiente
  de absorción, 32-9
  de arrastre, 41-8
  de viscosidad, 41-3, 41-4
Coeficiente de acoplamiento, 17-14
Condensador
  Energía de, 4, 8-1, 8-2
Condensador de placas paralelas, 3, 6-1, 6-12, 6-13, 8-3
Condición de Lorenz, 25-9
Conducción del calor, 3, 3-1, 3-6, 3-8
Conductividad, 32-10
Conductividad térmica, 2-9
Conductor, 1-2
Conductor cargado, 3, 4, 6-1, 6-8, 8-1, 8-2
Conservación
  de carga, 13-2
  de la energía, 5, 4-1, 8-1, 27-1, 27-2, 42-11
Conservación de, 4, 13-1
Constante
  de Boltzmann, 7-9
  dieléctrica, 4, 10-1
Constante de Planck, 15-10, 19-10, 28-11
Constantes elásticas, 39-13, 39-14
Constantes elásticas de Lamé, 39-6
Corriente amperiana, 36-2
Corriente de Foucault, 16-6
Corriente eléctrica, 4, 13-1
  en la atmósfera, 4, 9-1, 9-2
Corrientes atómicas, 4, 13-1, 13-5
Corrientes de magnetización, 6, 36-1
Corrientes inducidas, 4, 16-1, 16-6
Cristal iónico, 4, 8-1, 8-4
Cristal molecular, 30-3
Cuadripotencial, 5, 25-1, 25-10
Curva de histéresis, 36-8
Curvas de la elástica, 38-13
Curvatura
  en el espacio tridimensional, 7, 42-1, 42-5
  intrínseca, 42-5
  media, 42-6
  negativa, 42-5
  positiva, 42-5

D

Deformación de volumen, 38-3
Delta de Kronecker, 31-6
Densidad
  de carga eléctrica, 2-9
  de corriente, 13-1
  de corriente eléctrica, 2-9
  de energía, 27-3
  de energía, 5, 27-1, 27-3
Descarga de alto voltaje, 3, 6-1, 6-14
Desmagnetización adiabática, 6, 35-1, 35-10

Diamagnetismo, 6, 34-1, 34-5, 34-8
Dieléctrico, 4, 10-2, 11-1, 35-1
Difracción, 8-5, 29-1, 30-1
de rayos X, 8-5, 30-1
Difusión
de neutrones, 4, 12-1, 12-7
Dipolo, 11-1
eléctrico, 3, 6-1, 6-2
magnético, 4, 14-1, 14-7
molecular, 4, 11-1
oscilante, 5, 21-1, 21-6, 21-7
Dislocación, 30-9
helicoidal, 30-9, 30-13
por deslizamiento, 30-9, 30-13
y crecimiento de cristales, 6, 30-1, 30-9
Divergencia
de vectores de dimensión cuatro, 25-2
Divergencia cero, 3, 3-1, 3-11, 4-1
Dominio, 37-6

E

Ecuación
de campo de Einstein, 42-15
de Clausius-Mossotti, 11-7, 32-7
de difusión
de calor, 3-8
de neutrones, 12-7
de Laplace, 7-1, 7-2
de movimiento de Einstein, 42-15
de onda, 5, 18-1, 18-10
de Poisson, 6-1
de Schrödinger, 15-13, 41-13
Ecuaciones de Maxwell, 5, 6, 2-1, 2-8, 4-1, 6-1, 7-7, 8-11, 10-7, 13-3, 13-7, 13-12, 15-15, 18-1, 22-1, 22-8, 22-11, 23-3, 23-7, 23-8, 23-10, 24-5, 25-8, 25-9, 25-11, 26-11, 27-3, 27-9, 28-1, 32-1, 32-3, 33-1, 34-9, 36-5, 36-13, 38-2, 39-9, 42-15
en un dieléctrico, 32-5
Modificaciones de, 28-6, 28-8
para vectores de cuatro dimensiones, 25-7
Resolviendo, 5, 18-1, 18-10
Solución general de, 5, 21-1, 21-4, 21-5
Soluciones de ∼ con corrientes y cargas, 5, 21-1
Soluciones de ∼ en el espacio libre, 5, 20-1, 26-1
Ecuaciones electrostáticas
en presencia de dieléctricos, 4, 10-1, 10-6
Efecto
Barkhausen, 37-10
Doppler, 42-10
Mössbauer, 42-12
Elasticidad, 6, 38-1
Electreto, 11-8
Electrodinámica, 1-3
Electrodinámica cuántica
y cargas puntuales, 28-11
Electromagnetismo, 3, 1-1
Elementos de circuito, 5, 23-1
activos, 22-5
pasivos, 22-5, 22-11
Emisividad, 6-15
Energía, 5, 22-1, 22-11
de Boltzmann, 36-12
de pared, 37-6
del campo, 5, 27-1
eléctrica, 4, 15-1, 15-4
electrostática, 4, 8-1
de un cristal iónico, 4, 8-1, 8-4
de una carga, 4, 8-1, 8-12
de una carga puntual, 4, 8-1, 8-12
en los núcleos, 4, 8-1, 8-6
en el campo electrostático, 4, 8-1, 8-10
magnética, 4, 17-1, 17-13
mecánica, 15-1
potencial, 4-1, 8-1
relativista, 25-1
Enlace covalente, 30-2
Enlaces iónicos, 30-2
Enlaces químicos, 6, 30-1, 30-2
Enrejado tetragonal, 30-8
Enrejado triclínico, 30-8
Enrejado trigonal, 30-8
Esfera de, 5-8
Esfuerzo, 38-2
Esfuerzo de volumen, 38-3
Espacio curvo, 7, 42-1
Espacio de Minkowski, 31-13
Espacio-tiempo, 26-13
Espectro del momentum, 29-2
Espectrómetro de momentum, 29-1
Espín de protón, 8-7
Espín órbita, 8-7
Espinela ($MgAl_2O_4$), 37-13
Estado fundamental, 8-7, 8-8
Estados
excitados, 8-7
Estados magnéticos cuantizados, 6, 35-1
Expansión de Taylor, 6-8

F

Factor de propagación, 22-15
Factor g de Landé, 34-4
Factor nuclear g, 34-4
Faradio (unidad), 6-13
Ferritas, 37-13
Ferroelectricidad, 4, 11-1, 11-9
Ferromagnetismo, 6, 36-1
Filtro, 5, 22-1, 22-14
Física de estado sólido, 8-6
Flujo
de calor, 4, 2-4, 12-1, 12-2
de Couette, 7, 41-1, 41-11
de energía, 5, 27-1, 27-3, 27-7
de un campo vectorial, 3, 3-1, 3-9
de un fluido, 4, 12-1, 12-8
eléctrico, 1-5
estacionario, 7, 40-1, 40-6
irrotacional, 4, 12-1, 12-8, 12-9
viscoso, 7, 41-1, 41-4
Fórmula de Lorentz, 21-1, 21-12
Fotón Yukawa, 28-14
Frecuencia de corte, 22-14
Frecuencia de Larmor, 34-7
Frecuencia de palsma, 7-7, 32-1, 32-11
Fuerza
centrífuga, 34-7, 41-8
coriolis, 34-7
de intercambio, 37-2
de Lorentz, 13-1, 15-17
eléctrica, 3, 1-1, 13-1
en notación relativista, 5, 25-1
electromotriz ∼ (emf), 16-3
Euler, 38-12
magnética, 1-3, 13-1
sobre una corriente, 4, 13-1, 13-2
nuclear, 1-2, 8-6, 28-11
Función de Bessel, 23-8, 23-10, 24-4

G

Galvanómetro, 1-9, 16-1
Gauss (unidad), 36-6
Generador de corriente alterna, 4, 17-1, 17-7
Generador de Van de Graff, 5-10, 8-8
Generador eléctrico, 16-10, 22-5
Geometría de un cristal, 6, 30-1
Gradiente de potencial en la atmósfera, 4, 9-1
Granates, 37-13
Gravedad, 7, 42-1, 42-8
Gravitación, 7, 42-1, 42-14
teoría de, 7, 42-1, 42-14
Grupo de Lorentz, 25-3
Guías de onda, 24-4

H

Hidrodinámica, 40-3
Hidrostática, 7, 40-1
Hoja cargada, 5-4
Hoja de, 5-9

I

Iluminación, 4, 12-1, 12-11
Impedancia, 22-3
Índice, 6, 11-1, 21-1, 32-1
  de refracción, 6, 11-1, 21-1, 32-1
Índice de campo, 29-5
Inductancia, 4, 16-4, 17-1, 17-9, 17-10, 22-2, 22-18
  mutua, 17-10, 22-18
Integral de línea, 3, 3-1
Integrales vectoriales, 3, 3-1
Intensidad del campo, 1-4
Interacciones nucleares, 8-7
Ionosfera, 7-7, 9-3, 32-14
Isoterma, 2-3

K

Kilocaloría (unidad), 8-5

L

La primera función principal de Hamilton, 19-8
Lagrangiano, 19-8
Lente
  cuadrupolar, 7-4, 29-6
  electrostática, 6, 29-1, 29-3
  magnética, 6, 29-1, 29-3
Ley
  de Ampère, 4, 13-1, 13-3
  de Biot-Savart, 4, 14-1, 14-9
  de Coulomb, 3, 1-2, 1-3, 4-1, 4-2, 4-10, 5-6
  de Curie, 11-5
  de Curie-Weiss, 11-10
  de Gauss, 3, 4-1, 4-10
    aplicaciones de la ∼, 3, 5-1
    para líneas de campo, 4-12
  de Hooke, 6, 10-7, 30-13, 31-12, 38-1, 39-4, 39-10
  de inducción de Faraday, 17-2, 18-1, 18-7
  de Kirchhoff, 5, 22-1, 22-7, 22-9
  de Lenz, 16-5, 34-2
  de Newton, 7-6, 19-1, 42-1, 42-14
  de Snell, 33-1
Leyes
  de electromagnetismo, 3, 1-1, 1-5
  de inducción, 4, 17-1, 36-1
Línea coaxial, 24-1
Línea de carga, 3, 5-1, 5-3, 5-4
Línea de transmisión, 24-1
Líneas de campo, 3, 4-1, 4-11
Líneas de corriente, 40-6
Líneas de vórtice, 7, 40-1, 40-11
Longitud de Debye, 7-10
Luz, 5, 21-1

M

magnética, 6, 35-1, 35-12
  nuclear, 35-12
Magnetismo, 34-2, 34-3, 34-5, 34-6, 36-1, 37-3
  Dia, 34-5, 34-6
  Ferro, 36-1, 37-3
  Para, 34-2
Magnetización espontánea, 6, 36-1, 36-11
Magnetón de Bohr, 34-12, 35-10, 37-1
Magnetostática, 4-1, 13-3
Magnetostricción, 37-7, 37-10
Masa
  electromagnética, 28-3
Material antiferromagnético, 37-12
Material birrefringente, 33-3, 39-9
Material ferromagnético, 37-1
Materiales elásticos, 39-1
Materiales magnéticos, 37-1
Mecánica cuántica, 15-11
  del potencial vectorial, 15-11
Medición de Lamb y Retherford, 5-7
Método de haces moleculares de Rabi, 6, 35-1, 35-4
Microscopio
  de campo-ion, 6-15
  de emisión por campo, 3, 6-1, 6-15
  electrónico, 6, 29-1, 29-4
Modelo atómico de Thomson, 5-3
Modelo cristalino de Bragg-Nye, 6, 30-1, 30-10
Modo resonante, 23-10
Módulo de compresibilidad, 38-3
Módulo de corte, 38-5
Módulo de Young, 38-2
Molécula
  no polar, 11-1
  polar, 4, 11-1, 11-3
Momento
  dipolar, 6-3
    magnético, 14-8
  magnético orientado, 35-4
Momentos magnéticos, 6, 34-1, 34-3
Momentum
  del campo, 5, 27-1
Momentum del campo de una carga en movimiento, 5, 28-1, 28-2
Motor eléctrico, 16-1
Movimiento
  de cargas, 6, 29-1
  orbital, 34-4

N

Neutrones, 12-7
  difusión de, 12-7
No mundano, 25-11
Número de Avogadro, 8-5
Número de Mach, 41-7
Número de Reynolds, 41-7

O

Oersted (unidad), 36-6
Ondas, 5, 6, 20-1, 20-8, 20-12, 21-1, 21-2, 33-1, 33-8, 38-1, 38-6
  de corte, 6, 38-1, 38-6
  electromagnéticas, 5, 21-1
  esféricas, 5, 20-1, 20-12, 21-1, 21-2
  planas, 5, 20-1
  reflejadas, 6, 33-1, 33-8
  transmitidas, 6, 33-1, 33-8
  tridimensionales, 5, 20-1, 20-8
Ondas de Rayleigh, 38-8
Operador
  D'Alembertiano, 25-9
  de divergencia, 2-8, 3-1
  gradiente, 3, 2-1, 2-4, 3-1
  laplaciano, 2-11
  nabla (∇), 3, 2-1, 2-6
  rotacional, 2-8, 3-1
  vectorial, 2-7
Órbitas atómicas, 1-8
Oscilaciones de plasma, 3, 7-1, 7-6

P

Paramagnetismo, 34-1, 34-7, 35-7
Partículas coloidales, 7-8
Partículas "extrañas", 8-7
Permalloy, 37-12
Permeabilidad, 36-9
  relativa, 36-9
Piezoelectricidad, 11-8
Piroelectricidad, 11-8
Plano de división, 30-1
Plasma, 7-6
Polarizabilidad atómica, 32-2
Polarización, 4, 6, 11-1, 11-3, 32-1
  de la materia, 6, 32-1
  de orientación, 4, 11-1, 11-3
Polarización electrónica, 11-1
Polarización iónica, 11-9
Potencia trifásica, 16-7
Potencial, 4, 6-8, 14-1, 15-7
  cuadrupolar, 6-8
  de dimensión cuatro, 25-9
  de Yukawa, 28-14
  dipolar, 6-8
  eléctrico, 4-4
  electrostático, 3, 6-1
  vectorial, 4, 14-1, 15-1, 15-7
    de corrientes conocidas, 4, 14-1, 14-3
    y la mecánica cuántica, 4, 15-1, 15-9

Potenciales de Liénard-Wiechert, 5, 21-1, 21-10
Precesión, 6, 34-1, 34-4, 34-5
Ángulo de ∼, 34-5
de los imanes atómicos, 6, 34-1, 34-4
Presión, 40-1
hidrostática, 40-1
Principio, 1-3, 4-2, 19-1, 42-9
de equivalencia, 42-9
de mínima acción, 19-1
de superposición, 1-3, 4-2
Principio de exclusión de Pauli, 36-16
Principio de incertidumbre, 5-3
estabilidad de los átomos, 5-3
Problema con condición de frontera, 7-1
Producto escalar, 25-4
de cuatro dimensiones, 25-4
Producto punto, 2-5
de un vector de cuatro dimensiones, 25-4
Producto vectorial, 2-10, 31-9
Profundidad de penetración, 32-12
Punto Curie, 37-5, 37-11

R

Radiación, 21-1
Efectos relativistas en la ∼, 21-1
rayos cósmicos, 9-2
Radio, 42-4, 42-8
clásico del electrón, 28-3
de exceso, 42-4, 42-8
de Poisson, 38-2
Rapidez
de la luz, 18-9
Rayos cósmicos, 9-3
Reactancia, 22-12
Rectificador, 22-16
Red cristalina, 30-1, 30-4
cúbica, 30-4
hexagonal, 30-4
monoclínico, 30-8
ortorrómbico, 30-8
tetragonal, 30-8
triclínico, 30-7, 30-8
trigonal, 30-7
Red plana, 30-5
Reflexión, 6, 33-1, 33-13
Ángulo de ∼, 33-1
de luz, 33-1
interna total, 6, 33-1, 33-12
Refracción, 6, 32-1, 33-1
de la luz, 6, 33-1
índice de, 32-1
Regla de Lenz, 16-6, 34-6
Regla del flujo, 17-2
Relámpago, 9-8
Relatividad, 4, 13-1, 13-7, 25-1
de los campos eléctricos, 13-11
de los campos magnéticos, 13-11
Teoría especial de la ∼, 13-1, 25-1
Resistencia, 22-3
Resonancia, 6, 6-1, 22-1, 23-1, 35-1, 35-12
Rotación, 31-1
en el espacio, 31-1

S

Separación de cargas en una tormenta eléctrica, 9-9
Sincrotrón, 17-6, 29-4, 29-8
Sistema lineal, 22-1
Solenoide, 4, 13-1, 13-5
Superficie, 4-12
equipotencial, 4-12
isotérmica, 2-3
Supermalloy, 36-9
Superposición, 4, 13-1, 13-13
Susceptibilidad, 10-4
eléctrica, 10-4
magnética, 35-8

T

Temperatura de Curie, 36-14, 36-16, 37-1, 37-12
Tensión de Poincaré, 28-4
Tensor, 6, 26-8, 31-1, 31-2
de deformación, 31-12, 39-1
de elasticidad, 39-4
de esfuerzo, 31-9
de inercia, 31-7
de polarizabilidad, 6, 31-1
transformación de componentes, 6, 31-1, 31-3
Teorema, 7, 40-1, 40-6
de Bernoulli, 40-6
de Fourier, 7-11
de Gauss, 3-9
de Helmholtz, 40-12
de Larmor, 34-7
de Stokes, 3-11
Teoría de la gota que se rompe, 9-10
Termodinámica, 37-5
Tormentas eléctricas, 9-4
Torsión, 38-6
Trabajo, 4-1, 8-1
Transformación
de Lorentz, 25-1
de campos, 5, 26-1
Transformador, 16-5

V

Variable compleja, 7-2
Vector, 2-1, 31-1
de cuatro dimensiones, 5, 25-1
de polarización, 4, 10-1, 10-2
de Poynting, 27-6
unitario, 2-4
Velocidad de la luz, 5, 18-1, 18-9
Velocidad potencial, 12-9
Viga voladiza, 38-10
Viscosidad, 7, 41-1
Coeficiente de ∼, 41-2
Voltímetro, 16-1
Vorticidad, 40-5

Índice de nombres

A

Ampère, André-Marie (1775–1836), 13-6

B

Bell, Alexander G. (1847–1922), 16-4
Bessel, Friedrich W. (1784–1846), 23-6
Bohm, David (1917–1992), 15-13
Bohr, Niels (1885–1962), 5-3
Bopp, Friedrich A. (1909–1987), 28-9
Born, Max (1882–1970), 28-8, 28-11
Bragg, William Lawrence (1890–1971), 30-10

C

Coulomb, Charles-Augustin de (1736–1806), 5-7

D

Dirac, Paul A. M. (1902–1984), 2-1, 28-11

E

Einstein, Albert (1879–1955), 7, 13-7, 13-11, 25-12, 26-13, 27-10, 27-11, 28-4, 42-1, 42-5–42-10, 42-12, 42-14, 42-15
Euclides (c. 300 AC), 42-3–42-6

F

Faraday, Michael (1791–1867), 10-1, 10-2, 16-2–16-4, 16-8, 16-11, 17-1, 17-2, 17-4, 18-1, 18-7–18-10, 20-11
Feynman, Richard P. (1918–1988), 21-6, 28-8, 28-11
Franklin, Benjamin (1706–1790), 5-7

G

Gauss, J. Carl F. (1777–1855), 3, 3-1, 3-5–3-7, 3-12, 16-2, 36-2, 36-6
Geiger, Johann W. (1882–1945), 5-3
Gerlach, Walther (1889–1979), 6, 35-1, 35-3, 35-4

H

Heisenberg, Werner K. (1901–76), 19-10
Helmholtz, Hermann von (1821–1894), 40-11, 40-12
Hess, Victor F. (1883–1964), 9-2

I

Infeld, Leopold (1898–1968), 28-8, 28-11

J

Jeans, James H. (1877–1946), 2-7

L

Lamb, Willis E. (1913–2008), 5-7
Liénard, Alfred-Marie (1869–1958), 21-12
Lorentz, Hendrik Antoon (1853–1928), 21-1, 21-12–21-14, 28-3, 28-8, 28-12

M

MacCullagh, James (1809–1847), 1-10
Marsden, Ernest (1889–1970), 5-3
Maxwell, James Clerk (1831–1879), 5, 6, 1-9, 1-12, 5-7, 5-8, 17-2, 18-1–18-12, 20-1–20-6, 20-8, 20-11, 20-14, 20-15, 21-1, 21-2, 21-4, 21-5, 21-13, 21-14, 26-1, 28-1, 28-3, 28-6, 28-8–28-11, 32-1, 32-3–32-5

N

Newton, Isaac (1643–1727), 4-11, 19-1, 19-6, 19-7, 42-1, 42-7, 42-14, 42-15
Nye, John F. (1923–2019), 30-10, 30-11

O

Oersted, Hans C. (1777–1851), 18-10, 36-6

P

Pines, David (1924–2018), 7-8
Plimpton, Samuel J. (1883–1948), 5-7, 5-8
Poynting, John Henry (1852–1914), 27-3, 27-6–27-11, 28-3
Priestley, Joseph (1733–1804), 5-7

R

Rabi, Isidor I. (1898–1988), 6, 35-1, 35-4, 35-6, 35-11, 35-12
Retherford, Robert C. (1912–1981), 5-7
Rutherford, Ernest (1871–1937), 5-3

S

Schrödinger, Erwin (1887–1961), 19-10
Stern, Otto (1888–1969), 6, 35-1, 35-3, 35-4

T

Thomson, Joseph John (1856–1940), 5-3

V

von Neumann, John (1903–57), 12-9, 40-4

W

Weber, Wilhelm E. (1804–1891), 16-2
Wheeler, John A. (1911–2008), 28-8, 28-11
Wiechert, Emil Johann (1861–1928), 5, 21-1, 21-10, 21-12
Wilson, Charles T. R. (1869–1959), 9-10

Y

Yukawa, Hideki (1907–1981), 28-13, 28-14

Lista de símbolos

S	acción. 19-3
$\mathcal{L}$	autoinductancia. 17-12
j_x, j_y, j_z	componentes cartesianas del vector de densidad de corriente eléctrica. 13-12
A_x, A_y, A_z	componentes cartesianas del vector potencial. 14-8
ρ	densidad de carga eléctrica. 2-9
$\mathcal{E}$	fuerza electromotriz. 17-1
$J_0(x)$	función Bessel de primer orden. 23-7
M	inductancia mutua. 22-17
$\mathfrak{M}$	inductancia mutua. 17-10
$\mathcal{L}$	lagrangiano. 19-8
$\lambda\!\!\!^{-}$	longitud de onda reducida, $\lambda\!\!\!^{-} = \lambda/2\pi$. 15-10
p	magnitud o componente del vector de momento dipolar. 6-3
P	magnitud o componente del vector de polarización. 10-4
μ	módulo de torsión. 38-5
K	módulo de volumen. 38-3
Y	módulo de Young. 38-2
$\mathfrak{M}$	momento de flexión. 38-9
μ	momento magnético. 14-8
U	no mundano. 25-11
$\mathfrak{R}$	número de Reynold. 41-6
$\Box^2$	operador d'alembertiano, $\Box^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$. 25-9
∇^2	operador laplaciano, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$. 2-11
κ	permitividad relativa. 10-5
$A_\mu = (\phi, \boldsymbol{A})$	potencial de cuatro dimensiones. 25-9
ϕ	potencial electroestático. 4-5
p	presión. 40-1
σ	relación de Poison. 38-2
χ	susceptibilidad eléctrica. 10-4
S_{yx}	tensor de estrés. 31-10
I_{ij}	tensor de inercia. 31-7
F_{ij}	tensor electromagnético. 26-8
$\boldsymbol{H}$	vector de campo magnetizante. 32-5
$\boldsymbol{j}$	vector de densidad de corriente eléctrica. 2-9
$\boldsymbol{D}$	vector de desplazamiento eléctrico. 10-7
$\boldsymbol{n}$	vector de flujo de calor. 2-3
$\boldsymbol{F}$	vector de fuerza. 5-2

$\boldsymbol{M}$ vector de magnetización. 35-7
$\boldsymbol{J}$ vector de momento angular de la órbita de electrones. 34-3
$\boldsymbol{p}$ vector de momento dipolar. 6-3
$\boldsymbol{\mu}$ vector de momento magnético. 14-8
$\boldsymbol{P}$ vector de polarización. 10-3
$\boldsymbol{S}$ vector de Poynting. 27-2
$\boldsymbol{n}$ vector normal unitario. 2-4
$\boldsymbol{A}$ vector potencial. 14-8
$\mathcal{V}$ voltaje. 17-12
$\boldsymbol{\Omega}$ vorticidad. 40-5

Los textos contemporáneos de física pueden catalogarse en un antes y después de las lecciones de Richard Feynman, propuestas a partir de las clases impartidas en el Instituto Tecnológico de California (Caltech) de 1961 a 1963. Feynman transformó la concepción de esta pequeña ventana al universo con una nueva propuesta llena de vitalidad en su enfoque. A partir de entonces, la enseñanza de esta ciencia logra profundizar el estudio de los fenómenos físicos de forma puntual y sencilla.

Feynman, Premio Nobel de Física en 1965, dejó en este segundo volumen una presentación de los conocimientos básicos de electromagnetismo y materia. En él se contienen los estudios sobre elasticidad, mecánica de flujos y propiedades del espacio curvo. Con esto, el lector puede sumergirse en uno de los grandes capítulos de la física, uno en donde se garantizan dos polos de atracción: el del conocimiento y el de la curiosidad.

La física de Feynman es sobre simplicidad, belleza, unidad y analogía, presentada con entusiasmo y perspicacia.

Nature

Una reacción en cadena no es una mala analogía para la vida de Feynman. A partir de una masa crítica de materia gris se dispara en todas direcciones, produciendo tanto calor como luz.

Time

www.fondodeculturaeconomica.com

FONDO DE CULTURA ECONÓMICA